

VISIT...

LANZAROTE  
*Caliente*.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ







*A. Ferguson*



А. А. ФРИДМАН

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

*Под редакцией*  
проф. Л. С. ПОЛАКА

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{C^2}{R^2} - \lambda = 0$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1966

082.1 «Классики науки» — А. А. Фридман.

**СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»**

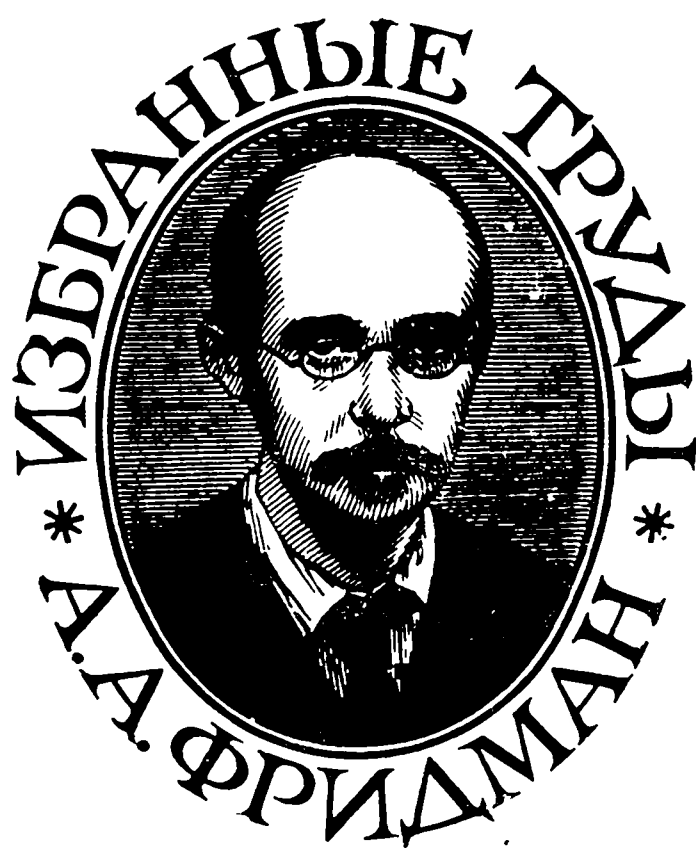
**основана академиком С. И. Вавиловым**

**Редакционная коллегия**

академик *И. Г. Петровский*, академик *А. А. Имшенецкий*, академик *Б. А. Казанский*, член-корр. АН СССР *Б. Н. Делоне*, член-корр. АН СССР *Б. М. Кедров*,

проф. *В. П. Зубов*, проф. *И. В. Кузнецов*, проф. *А. В. Лебединский*,

проф. *Л. С. Полак*, проф. *Н. А. Фигуровский*, проф. *И. И. Шафрановский*



## **ОТ РЕДАКЦИИ**

Труды Александра Александровича Фридмана могут быть в основном подразделены на три группы (первые две из которых во многом перекрываются): механика сжимаемой жидкости и теория турбулентности, динамическая метеорология и физика атмосферы, релятивистская космология. Статьи его разбросаны в малодоступных журналах и до сих пор не были собраны в отдельном издании; значительная часть их появляется на русском языке впервые. В настоящем издании объединены основные работы А. А. Фридмана. Чтобы дать представление о не вошедших в книгу статьях, нами помещены авторские резюме этих статей или краткие их аннотации.

Так как научная биография А. А. Фридмана мало известна, мы сочли уместным поместить в приложении некоторые материалы о его жизни и творчестве. Научное творчество Фридмана так близко современной науке, что вряд ли было целесообразно увеличивать объем примечаний к публикуемым статьям.

В целом книга дает достаточно полное представление о важнейших результатах научного творчества Александра Александровича Фридмана, пролагавшего принципиально новые пути во всех тех областях науки, которыми он занимался.

ГИДРОМЕХАНИКА  
СЖИМАЕМОЙ  
ЖИДКОСТИ





## О ВИХРЯХ В ЖИДКОСТИ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ ТЕМПЕРАТУРОЙ <sup>1</sup>

1. Условия, полученные Гельмгольцем для вихрей, можно рассматривать как результат исключения из уравнений гидродинамики давления  $p$ . При этом предполагается, что давление  $p$  есть функция удельного объема  $\omega$ . Мы покажем, что и в том случае, когда  $p$  не есть функция  $\omega$ , когда, следовательно, в общем случае при движении жидкости меняется температура, исключение функций  $p$  и  $\omega$  из уравнений гидродинамики приводит к ряду условий, содержащих только составляющие внешних сил  $X, Y, Z$ , действующих на единицу массы, и составляющие скоростей  $u, v, w$  с их частными производными разных порядков по времени  $t$  и координатам  $x, y, z$ .

Эти условия необходимы при разыскании различных частных случаев движения жидкости с меняющейся температурой и позволяют решить, в случае ее возможности, задачу об определении  $p$  и  $\omega$  по скоростям  $u, v, w$  при условии удовлетворения уравнениям гидродинамики.

2. При сделанных выше предположениях уравнения гидродинамики будут

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{X - \frac{du}{dt}}{\omega}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{Y - \frac{dv}{dt}}{\omega}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{Z - \frac{dw}{dt}}{\omega}, \quad (1)$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d \ln \omega}{dt}.$$

Введем обозначения

$$G_1 = X - \frac{du}{dt}, \quad G_2 = Y - \frac{dv}{dt}, \quad G_3 = Z - \frac{dw}{dt},$$

$$H_1 = \frac{d\xi}{dt} + \theta\xi - \left( \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right),$$

$$H_2 = \frac{d\eta}{dt} + \theta\eta - \left( \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right),$$

$$H_3 = \frac{d\zeta}{dt} + \theta\zeta - \left( \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right),$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\theta}{2} G_1 + H_2 w - H_3 v}{G_1 u + G_2 v + G_3 w},$$

$$\beta_1 = - \frac{G_1}{G_1 u + G_2 v + G_3 w},$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{\theta}{2} G_2 + H_3 u - H_1 w}{G_1 u + G_2 v + G_3 w},$$

$$\beta_2 = - \frac{G_2}{G_1 u + G_2 v + G_3 w},$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{\theta}{2} G_3 + H_1 v - H_2 u}{G_1 u + G_2 v + G_3 w},$$

$$\beta_3 = - \frac{G_3}{G_1 u + G_2 v + G_3 w},$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} - \beta_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t},$$

$$\delta_1 = \frac{\partial \beta_2}{\partial z} - \frac{\partial \beta_3}{\partial y} + \beta_2 \frac{\partial \beta_3}{\partial t} - \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial t},$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + \beta_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \beta_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial t},$$

$$\delta_2 = \frac{\partial \beta_3}{\partial x} - \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + \beta_3 \frac{\partial \beta_1}{\partial t} - \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial t},$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \beta_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t},$$

$$\delta_3 = \frac{\partial \beta_1}{\partial y} - \frac{\partial \beta_2}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial t} - \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial t},$$

$$\lambda = - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3},$$

$$\omega_i = \frac{\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i}{\delta_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

В этих формулах

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

— суть составляющие вихрей в жидкости.

При этих обозначениях условия возможности определения  $p$  и  $\omega$  из уравнений гидродинамики (1) будут

$$G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 = 0,$$

$$\frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2} = \frac{\gamma_3}{\delta_3},$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial z} = \frac{\partial \omega_3}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \omega_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\partial \omega_3}{\partial t}.$$

Если условия (2) выполнены, то  $\omega$  и  $p$  определяются квадратурами



$$\omega = e^{2 \int \omega_1 dx + \omega_2 dy + \omega_3 dz + \lambda dt},$$

$$p = \int \frac{G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz}{\omega}. \quad (3)$$

Формулы (2) справедливы в общем случае, когда ни один из знаменателей, входящих в них, не обращается в нуль; те случаи, когда это обстоятельство встречается, приводят к условиям, аналогичным условиям (2), но при этом  $\omega$  определяется не квадратурой, а линейным уравнением с частными производными первого порядка.

Введенные нами обозначения и условия (2) принимают весьма простой вид, если их выразить в векторной форме.

Как следствие одного из условий (2) мы получим предложение:

Вектор  $G$  с составляющими  $G_1, G_2, G_3$  есть вектор незакручивающийся, т. е. он ортогонален своему вихрю.

Как частный случай мы получаем условия Гельмгольца, выражающиеся в том, что вихрь вектора  $G$  равен нулю.

3. Укажем несколько приложений условий (2). Положим, что мы рассматриваем движение тяжелой жидкости, скорости частиц которой параллельны между собой, ортогональны направлению силы тяжести и зависят только от  $t$  и  $z$ , причем ось  $z$  направлена противоположно действующей силе тяжести.

Решение вопроса о движении жидкости при указанных предположениях распадается на следующие частные случаи.

I.  $v$  удовлетворяет уравнению

$$g \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{g}{2c} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} \right) = \frac{\partial v}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2,$$

где  $c$  — постоянная,  $g$  — ускорение силы тяжести;

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{c}{g}, \quad \omega_3 = \frac{c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}}{\frac{\partial v}{\partial t}}, \quad \lambda = -\frac{c}{g} v,$$

$p$  и  $\omega$  определяются уравнениями (3). Другой случай может иметь приложения в динамике атмосферы:

$$v = -\frac{g}{c} F(t+z),$$

$$\omega = e^{\frac{2c}{g} y + 2 \int_0^{t+z} F(m) dm},$$

$$p = -\frac{g^2}{2c^2} \frac{F'(t+z)}{\omega},$$

где  $F$  выражается через дробную Бесселеву функцию и определяется уравнением

$$F'' = 2FF' + \frac{2c^2}{g}.$$

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{c_1 z + c_2} f(t) + c,$$

$$\omega = \sqrt{c_1 z + c_2} \Phi \left( k \left( y - \sqrt{c_1 z + c_2} \int_0^t f dt - ct \right) + \frac{2}{c_1} \sqrt{c_1 z + c_2} \right);$$

здесь  $c_1, c_2, c$  — произвольные постоянные, из коих  $c_1$  не равно нулю;  $\Phi$  — произвольная функция своего аргумента;  $f(t)$  определяется соотношением

$$\vartheta \left( \sqrt{\frac{c_1}{4g}} f \right) = c_3 t + c_4,$$

где

$$\vartheta(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx;$$

$c_3, c_4$  — произвольные постоянные; величина  $k$  определяется равенством  $k = f'(0)/g$ .

Так же просто решается задача и в остальных случаях, в коих  $v$  есть функция одной только переменной  $t$  или  $z$  или в коих  $v = c_1 z - \frac{g}{c_1} \ln(c_2 t + c_3)$ , где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные постоянные и  $c_1$  не равно нулю.

*Действующая армия, 10 сентября 1915 г.*

## О ДВИЖЕНИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ <sup>2</sup>

Классическая гидромеханика рассматривает обычно или движения несжимаемой жидкости, когда плотность жидкости  $\rho$  есть физическая постоянная, или же такие движения сжимаемой жидкости, при которых плотность  $\rho$  есть наперед заданная функция давления  $p$ . Таким образом, в классической гидромеханике мы имеем дело с четырьмя неизвестными: тремя составляющими по координатным осям вектора скорости  $\mathbf{v}$  и давлением. Четыре уравнения классической гидромеханики, состоящие из трех уравнений динамики и одного уравнения неразрывности, очевидно, достаточны при известных начальных и граничных условиях для определенности решения той или иной задачи гидромеханики.

Дело коренным образом меняется, когда мы переходим к рассмотрению движений сжимаемой жидкости общего вила, играющих большую роль

в динамике атмосферы, в которых плотность не есть функция давления. Четырех уравнений классической гидромеханики становится недостаточно, и для возможности решения задачи о движении сжимаемой жидкости нам приходится к этим четырем уравнениям прибавлять пятое, известное под именем уравнения притока энергии.

Сложность построения уравнения притока энергии является причиной малой успешности решения задач о движении сжимаемой жидкости; представляется поэтому чрезвычайно полезным изучить свойства движений сжимаемой жидкости, пользуясь тремя уравнениями динамики и уравнением неразрывности и обращаясь к уравнению притока энергии лишь в крайнем случае.

Внимательное изучение классических работ Гельмгольца по теории вихрей указывает путь, при помощи которого может быть практически осуществлен только что упомянутый процесс. В самом деле, Гельмгольц получил свои три уравнения, из которых следуют его две фундаментальные теоремы о динамике вихревых шнуров, с помощью исключения из уравнений классической гидродинамики давления. Обобщая эту идею Гельмгольца, разделим неизвестные величины, входящие в нашу задачу, на две группы: 1) к и н е м а т и ч е с к и е э л е м е н т ы — в эту группу включим составляющие скорости и их производные по времени и координатам и 2) д и н а м и ч е с к и е э л е м е н т ы, отнеся к ним давление и плотность, а также их производные по времени и координатам.

Исключая из четырех уравнений гидродинамики динамические элементы, мы получим ряд соотношений между кинематическими элементами, аналогичных уравнениям Гельмгольца. Эти соотношения будут служить необходимыми и достаточными условиями того, чтобы для скоростей, им подчиняющихся, можно было найти давление и плотность, удовлетворяющие четырем уравнениям гидродинамики. Эти соотношения можно назвать условиями динамической возможности данного движения сжимаемой жидкости, ибо они из бесчисленного множества кинематически мыслимых движений сжимаемой жидкости содержат те, которые возможны на самом деле.

Практическое значение этих условий весьма значительно. Очень часто обстоятельства исследуемого вопроса позволяют указать некоторую общую кинематическую форму движения, содержащую ряд произвольных постоянных или произвольных функций; применяя условия динамической возможности, мы в большинстве случаев будем в состоянии определить эти постоянные и произвольные функции.

Кроме того, процесс получения условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости дает всегда метод, позволяющий определить давление и плотность жидкости, совершающей данное, динамически возможное движение.

Перед тем как перейти к краткому изложению получения указанных условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости, остановимся на вопросе о необходимых и достаточных условиях соблюдения обеих теорем Гельмгольца для векторных трубок поля данного вектора  $A$ .

Первая теорема Гельмгольца, как известно, состоит в том, что жидкие частицы, расположенные в некоторый момент времени на вихревой трубке, остаются расположенными на вихревой трубке и во все последующие моменты. Вторая теорема Гельмгольца утверждает, что напряжение вихревой трубки не меняется с течением времени. Необходимые и достаточные условия применимости обеих теорем Гельмгольца к векторным трубкам поля вектора  $A$  были установлены впервые Зоровским (Z o r a w s k i)\*; они заключаются в выполнении равенства

$$\frac{dA}{dt} + \text{rot } [A, v] + v \text{ div } A = 0, \quad (1)$$

где  $[A, v]$  означает векторное произведение векторов  $A$  и  $v$ , а остальные обозначения общеприняты.

Кинематически обе теоремы Гельмгольца совершенно друг от друга независимы, и даже, более того, динамически возможны такие движения сжимаемой жидкости, при которых одна теорема Гельмгольца имеет место, другая — нет.

Выражение, стоящее в левой части равенства (1), имеет большое значение как в вопросах о кинематике векторных линий, не подчиняющихся теоремам Гельмгольца, так и в вопросах об условиях динамической возможности движений сжимаемой жидкости. Обозначив левую часть уравнения (1) особым символом  $\text{helm } A$ :

$$\text{helm } A = \frac{dA}{dt} + \text{rot } [A, v] + v \text{ div } A, \quad (2)$$

нетрудно убедиться, что этот символ обладает следующим свойством:

$$\text{rot } \frac{dv}{dt} = \text{helm rot } v. \quad (3)$$

Это свойство позволяет, как увидим ниже, сразу доказать обе теоремы Гельмгольца для несжимаемой жидкости. Обозначая через  $\omega$  удельный объем ( $\omega = 1/\rho$ ) и через  $F$  — внешнюю заданную силу, действующую на единицу массы данной жидкой частицы, можем уравнения гидродина-

---

\* Z o r a w s k i K. Über die Erhaltung der Wirbelbewegung. — Bull. Acad. sci. Cracovie, 1900.

мики сжимаемой жидкости написать в следующем виде:

$$\frac{dv}{dt} = -\omega \operatorname{grad} p + F, \quad (4)$$

$$\frac{d \ln \omega}{dt} = \operatorname{div} v.$$

Полагая, что сила  $F$  консервативна, и рассматривая несжимаемую жидкость ( $\omega = \text{const}$ ), будем иметь по исключении  $p$  из уравнений (4) равенство

$$\operatorname{rot} \frac{dv}{dt} = \operatorname{helm} \operatorname{rot} v = 0, \quad (5)$$

что и докажет обе теоремы Гельмгольца.

Переходя теперь к вопросу о получении условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости, введем два вектора  $G$  и  $H$  равенствами

$$G = F - \frac{dv}{dt} = \omega \operatorname{grad} p, \quad (6)$$

$$H = -\operatorname{rot} G = [\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} \omega]. \quad (7)$$

Первый из этих векторов назовем по аналогии с известным метеорологическим термином динамическим градиентом, второй — турбулизирующим вектором, имея в виду его роль в образовании вихрей.

Разрешая первое из уравнений (4) относительно  $\operatorname{grad} p$ , без труда найдем

$$\operatorname{grad} p = \frac{G}{\omega}. \quad (8)$$

Исключая из уравнений (4) давление  $p$ , получим следующие уравнения для определения  $\varphi = \ln \omega$ , долженствующие иметь место, чтобы можно было определить  $p$ , удовлетворяющее уравнениям (4):

$$[G, \operatorname{grad} \varphi] = H, \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{div} v.$$

Когда скоро  $\varphi$  будет удовлетворять уравнениям (9), то  $p$  определится из уравнения (8).

Уравнения (9) дают нам первое условие для кинематических элементов, выражающееся равенством

$$(G, H) = 0, \quad (a)$$

где символ  $(G, H)$  означает скалярное произведение двух векторов  $G$  и  $H$ .

Равенство (а) показывает, что динамический градиент ортогонален своему вихрю и, следовательно, принадлежит к векторам, называемым проф. Н. Е. Жуковским незакручивающимися векторами. Условие (а) будем называть условием незакручиваемости.

Для получения дальнейших условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости нам необходимо обратить внимание на величину  $\mu$ , определяемую равенством

$$\mu = (v, G) = \omega \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (10)$$

Величина эта, которую мы назовем мерой диссипативности, представляет собой работу, совершаемую на действительном перемещении силами давления. Если эта работа отлична от нуля, то такого рода движения условимся называть нормальными движениями; если же  $\mu = 0$ , то движение, обладающее этим свойством, будем называть полуконсервативным.

В дальнейшем мы займемся исключительно нормальными движениями; следует заметить, что изучение полуконсервативных движений не представляет никаких существенных затруднений.

Пользуясь условиями незакручиваемости, нетрудно для случая нормальных движений показать, что система уравнений (9) эквивалентна системе уравнений

$$\alpha + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{grad } \varphi, \quad (11)$$

где

$$\alpha = \frac{[H, v] + \theta G}{\mu}, \quad \beta = -\frac{G}{\mu}, \quad (12)$$

причем  $\theta = \text{div } v$ .

Вектор  $\alpha$  назовем турбомоментом, а вектор  $\beta$  — приведенным градиентом.

Применяя к обеим частям уравнения (11) операцию  $\text{rot}$ , найдем равенство

$$\gamma + \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

где векторы  $\gamma$  и  $\delta$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{rot } \alpha + \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \beta \right], \\ \delta &= \text{rot } \beta + \left[ \frac{\partial \beta}{\partial t}, \beta \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражая оба эти вектора через динамические элементы, будем иметь

$$\begin{aligned}\mu^2 \gamma &= -\omega \frac{\partial \theta}{\partial t} \left[ \text{grad } \frac{dp}{dt}, \text{grad } p \right], \\ \mu^2 \delta &= \omega^2 \left[ \text{grad } \frac{dp}{dt}, \text{grad } p \right].\end{aligned}\quad (15)$$

Близкая связь этих векторов с количеством притекающего к единице объема сжимаемой жидкости тепла дает нам право назвать их соответственно первым и вторым тепловыми векторами.

Уравнение (13) показывает, что тепловые векторы должны удовлетворять соотношению

$$[\gamma, \delta] = 0. \quad (b)$$

Иначе говоря, оба тепловых вектора должны быть параллельны друг другу; соотношение (b) является следующим шагом по пути установления условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости. Эти соотношения (b) мы назовем тепловыми условиями. Хотя тепловые условия по внешнему виду приводятся к двум скалярным уравнениям, но по существу второе уравнение является следствием первого и условий незакручиваемости; таким образом, тепловые условия сведутся лишь к одному скалярному уравнению, которое может быть написано в виде соотношения

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}, [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}]) + \mu (\mathbf{H}, \text{grad div } \mathbf{v}) - \\ - \left( \mathbf{H}_1 + [\text{grad div } \mathbf{v}, \mathbf{G}], \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \text{grad } \mu \right) = 0,\end{aligned}\quad (16)$$

где  $\mathbf{H}_1 = \text{helm } \mathbf{H}$ .

Нормальное движение сжимаемой жидкости разделяется на два класса: 1) общее нормальное движение, когда  $\delta \neq 0$ , и 2) специальное нормальное движение, когда  $\delta = 0$ . Ограничимся изучением общего нормального движения. Введем скаляр  $\lambda$  и вектор  $\sigma$  равенствами

$$\gamma + \lambda \delta = 0, \quad (17)$$

$$\sigma = \alpha + \lambda \beta. \quad (18)$$

Учитывая значение, которое эти величины имеют в определении удельного объема, назовем их стереоскаляром и стереовектором.

Уравнения (11) и (13) дают возможность определить  $\varphi$  с помощью равенств

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi &= \sigma, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \lambda.\end{aligned}\tag{19}$$

Очевидно, что для возможности определения  $\varphi$  из равенств (19) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \sigma &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \operatorname{grad} \lambda.\end{aligned}\tag{с}$$

Условия эти являются также условиями динамической возможности движения; мы назовем их *объемными условиями*. Простые вычисления показывают, что первое из равенств (с) — следствие второго; таким образом, объемные условия дают всего три скалярных равенства.

Итак, условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости состоят: 1) из условия незакручиваемости (равенство (а)), 2) из тепловых условий (равенство (b)) и 3) из объемных условий (равенства (с)), всего из пяти скалярных условий. Коль скоро условия эти выполнены, то  $\varphi$  определится из равенств (19) до аддитивно входящей произвольной постоянной (значит,  $\omega = e^\varphi$  будет иметь множителем произвольную постоянную), а давление  $p$  определится из равенства (8) до аддитивно входящей произвольной функции времени.

9 августа 1921 г.

## О ВИХРЕВОМ ДВИЖЕНИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ<sup>3</sup>

В противоположность теоремам Лагранжа для несжимаемых жидкостей при движении сжимаемой жидкости, как это показали исследования Бьеркнеса (Bjerknes)\* и Зильберштейна (Silberstein)\*\* даже в том случае, когда действуют только консервативные силы, могут возникать и исчезать вихри, поскольку давление зависит не только от плотности, но

\* Bjerknes V. Das dynamische Princip der Cirkulationsbewegungen in der Atmosphäre.— Meteorol. Z., 1900, 17, S. 97; 1900, 17, S. 145.

\*\* Silberstein L.— Bull. Acad. sci. Cracovie, 1896, S. 280.



является также функцией температуры. Согласно аэрологическим наблюдениям \* поверхности постоянного давления и постоянной температуры в атмосфере пересекаются, из чего следует, что давление в ней действительно не является функцией одной только плотности. Вследствие этого основной задачей динамической метеорологии оказывается изучение такого движения сжимаемой жидкости, при котором давление не является функцией только плотности.

Если плотность — постоянная или некоторая определенная функция давления, то остаются в силе основные уравнения классической гидромеханики с четырьмя переменными: три компоненты скорости и давление. Три уравнения движения вместе с уравнением неразрывности, вообще говоря, позволяют найти, при известных начальных и граничных условиях, значения компонент скорости и давление. При исследовании общего случая движения сжимаемой жидкости число переменных возрастает до пяти, так как к указанным четырем переменным добавляется пятая — плотность.

Вследствие этого упомянутых четырех уравнений оказывается недостаточно; для того чтобы определить движение сжимаемой жидкости, мы должны применить еще одно дополнительное уравнение, так называемое уравнение притока энергии; оно является следствием первого начала термодинамики.

Составление уравнения притока энергии — задача сложная, и это обстоятельство так затрудняет полное решение вопроса о движении сжимаемой жидкости, что кажется целесообразным изучить сначала особенности движения сжимаемой жидкости, не используя это уравнение. При этом мы будем следовать путем, аналогичным рассуждениям Гельмгольца при доказательстве теорем о вихрях.

Как известно, свои уравнения и вытекающие из них основные теоремы о вихревых нитях Гельмгольц получил, исключив давление из уравнений гидродинамики. Обобщив эти идеи Гельмгольца, мы разделим переменные, встречающиеся в наших уравнениях, на два класса. К первой группе отнесем компоненты скорости и их производные различных порядков по времени и координатам; ко второй — давление, плотность и их производные различных порядков по времени и координатам. Величины первой группы будем называть кинематическими элементами, второй — динамическими элементами. Исключая из четырех уравнений гидродинамики динамические элементы, получим ряд соотношений между кинематическими элементами, аналогичных уравнениям Гельмгольца. Эти соотношения мы можем рассматривать как условия динамической возможности движения сжимаемой

\* Bjerknes V. Dynamische Meteorologie und Hydrographie, Bd. II. Braunschweig, 1912, S. 90.

жидкости, так как из всех кинематически возможных движений мы выделяем как раз те, которые возможны динамически.

Практическое значение этих условий состоит в следующем. Очень часто свойства исследуемого движения позволяют указать некоторую определенную общую форму для представления движения, которое содержит несколько произвольных постоянных или функций. Исходя из условий динамической возможности, можно большей частью определить эти константы и произвольные функции. Кроме того, вывод условий динамической возможности доставляет всегда способ для определения давления и плотности жидкости, которая находится в данном динамически возможном движении.

1. Теоремы Гельмгольца. Прежде чем, дать краткое представление о выводе названных уравнений условий динамической возможности движения, рассмотрим необходимые и достаточные условия существования обеих известных теорем Гельмгольца о векторных трубках в поле вектора  $A$ .

Первая теорема Гельмгольца, как известно, состоит в том, что частицы жидкости, находящиеся в какой-то момент времени на вихревой линии, остаются на ней и во все последующее время. Вторая теорема утверждает, что интенсивность вихревой трубки со временем не изменяется. Необходимые и достаточные условия того, чтобы обе теоремы Гельмгольца имели силу для векторных трубок или векторных линий в поле вектора  $A$  при скорости  $B$ , впервые установлены Зоравским (Zorawski)\* и Бьеркнесом (Bjerknes)\*\* . Эти условия вытекают из уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \text{rot} [AB] + B \text{ div } A = 0, \quad (1)$$

где  $[A, B]$  означает векторное произведение векторов  $A$  и  $B$ , а остальные обозначения имеют общепринятый смысл. Пусть с каждой частицей жидкости связан вектор  $A$ . Для того чтобы векторные линии, образованные векторами  $A$ , удовлетворяли обоим теоремам, которые Гельмгольд нашел для  $A = \text{rot } B$  (в случае несжимаемой жидкости), должно выполняться уравнение (1).

Кинематически оба положения Гельмгольца совершенно независимы друг от друга; даже более того, динамически возможны такие движения сжимаемой жидкости, при которых одна теорема Гельмгольца выполняется, а другая нет.

Левая часть уравнения (1) играет большую роль в вопросах кинематики векторных трубок, которые не подчиняются теоремам Гельмгольца, так же как и в вопросах, которые относятся к условиям динамической

\* Zorawski K. — Bull. Acad. sci. Cracovie, 1900, S. 335.

\*\* Bjerknes V. См. стр. 19.

возможности движений сжимаемой жидкости. Обозначим левую часть уравнения (1) символом  $\text{helm } A$ :

$$\text{helm } A = \frac{\partial A}{\partial t} + \text{rot } [A, B] + B \text{ div } A. \quad (2)$$

Легко показать, что этот символ обладает следующим свойством:

$$\text{rot } \frac{dB}{dt} = \text{helm rot } B. \quad (3)$$

Из нижеследующего вытекает, что это свойство позволяет сразу же доказать обе теоремы Гельмгольца для несжимаемой жидкости.

Обозначив через  $\omega$  удельный объем (обратную величину удельной массы  $\omega = 1/\rho$ ) и через  $F$  внешнюю силу, которая действует на единицу массы жидкости, мы можем написать гидродинамические уравнения для сжимаемой жидкости\*:

$$\frac{dB}{dt} = -\omega \text{ grad } p + F, \quad \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = \frac{d \ln \omega}{dt} = \text{div } B. \quad (4)$$

Пусть  $F$  — консервативная сила ( $\text{rot } F = 0$ ); примем одновременно во внимание, что жидкость несжимаема ( $\omega = \text{const}$ ), тогда можно исключить  $p$  из уравнений (4), применив операцию  $\text{rot}$  к обеим частям первого уравнения. Получаем таким образом уравнение

$$\text{rot } \frac{dB}{dt} = \text{helm rot } B = 0. \quad (5)$$

2. Вывод первого условия. Мы переходим к исследованию динамической возможности движения сжимаемой жидкости. Для этой цели введем векторы  $G$  и  $H$  уравнениями

$$G = F - \frac{dB}{dt} = \omega \text{ grad } p, \quad (6)$$

$$H = -\text{rot } G = [\text{grad } p, \text{ grad } \omega]. \quad (7)$$

Первый из этих векторов назовем известным метеорологическим термином — динамический градиент, второй, принимая во внимание роль, которую он играет при образовании вихрей, назовем турбулизирующим вектором.

Разрешая первое уравнение (4) относительно  $\text{grad } p$  и принимая во внимание (6), получаем

$$\text{grad } p = \frac{G}{\omega}. \quad (8)$$

---

\* Mises R. V. Technische Hydrodynamik. Leipzig, 1914, § 2, 3; Lamb H. Hydrodynamik. Leipzig, 1907, § 6, 7.

Если исключить из уравнения (4) давление  $p$ , то получим, учитывая (6) и (7), следующие уравнения для определения  $\varphi = \ln \omega$  (без которого невозможно было бы определить  $p$ ):

$$[G, \text{grad } \varphi] = H, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \text{div } B. \quad (9)$$

Если  $\varphi$  удовлетворяет уравнениям (9), то из уравнения (8) можно определить  $p$ .

Уравнение (9) доставляет нам первое условие для кинематических элементов, которые выражаются уравнением

$$(G, H) = 0. \quad (a)$$

Символ  $(A, B)$  обозначает скалярное произведение векторов  $A$  и  $B$ . Уравнение (a) показывает, что динамический градиент ортогонален своему вихрю, а следовательно, принадлежит к тем самым векторам, которые проф. Жуковский называет незакручивающимися векторами. Условие (a) назовем условием незакручиваемости.

3. Уравнение второго условия. Для того чтобы получить дальнейшие условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости, мы должны ввести в рассмотрение величину  $\mu$ , которая определяется уравнениями

$$\mu - (B, G) = \omega (B, \text{grad } \varphi) - \omega \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (10)$$

Эта величина означает работу за одну секунду, совершаемую силами давления при действительном перемещении. Если эта работа отличается от нуля, то такие движения мы будем называть нормальными; если же  $\mu = 0$ , то будем называть движения, которые обладают этим свойством, полуконсервативными. В дальнейшем мы будем рассматривать только нормальные движения; однако необходимо отметить, что исследование полуконсервативных движений не представляет каких-либо существенных трудностей.

Условие незакручиваемости позволяет доказать, что в случае нормальных движений система уравнений (9) равносильна системе

$$a + b \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{grad } \varphi, \quad (11)$$

причем

$$a = \frac{[H, B] + \theta G}{\mu}, \quad b = -\frac{G}{\mu}, \quad \theta = \text{div } B. \quad (12)$$

Для того чтобы получить уравнение (11) из уравнения (9), достаточно умножить векторно уравнения системы (9) соответственно на  $-B$  и на  $G$  и сложить результаты. Наоборот, чтобы из уравнения (11) вывести пер-

вое уравнение (9), необходимо умножить векторно уравнение (11) на  $\mathbf{G}$ , и, наконец, чтобы получить второе уравнение (9), нужно умножить скалярно (11) на  $\mathbf{B}$ .

Назовем вектор  $\mathbf{a}$  турбомоментом, а вектор  $\mathbf{b}$  приведенным градиентом.

Применив к обеим сторонам уравнения (11) операцию  $\text{rot}$ , получим уравнение

$$\mathbf{c} + \mathbf{a} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

в котором векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  определяются уравнениями

$$\mathbf{c} = \text{rot } \mathbf{a} + \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \mathbf{b} \right], \quad \mathbf{d} = \text{rot } \mathbf{b} + \left[ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \mathbf{b} \right]. \quad (14)$$

Если выразить оба эти вектора через динамические элементы, то получим

$$\mu^2 \mathbf{c} = -\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} \left[ \text{grad } \frac{dp}{dt}, \text{grad } p \right], \quad (15)$$

$$\mu^2 \mathbf{d} = \omega^2 \left[ \text{grad } \frac{dp}{dt}, \text{grad } p \right].$$

Тесная связь этих векторов с количеством тепла, подведенным к единице объема сжимаемой жидкости, дает нам право назвать их соответственно **первыми и вторыми тепловыми векторами**.

Уравнение (13) показывает, что тепловые векторы должны удовлетворять соотношению

$$[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = 0, \quad (\text{b})$$

или другими словами: **тепловые векторы должны быть параллельны**. Соотношение (b) представляет следующий шаг на пути к определению условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости. Назовем его **тепловым условием**. Хотя тепловое условие, по-видимому, может быть сведено к двум скалярным уравнениям, однако в действительности второе скалярное уравнение является следствием первого уравнения и условия незакручиваемости. Итак, тепловые условия сводятся к единственному скалярному уравнению, которое можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{B} [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}]) + \mu (\mathbf{H}, \text{grad div } \mathbf{B}) - \\ - \left( \mathbf{H}_1 + [\text{grad div } \mathbf{B}, \mathbf{G}], \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \text{grad } \mu \right) = 0, \quad (16)$$

где  $\mathbf{H}_1 = \text{helm } \mathbf{H}$ .

4. **Дальнейшие условия.** Нормальные движения сжимаемой жидкости распадаются на два класса: 1) **общее нормальное дви-**

жение, если  $\vec{d}$  отлично от нуля, и 2) специальное нормальное движение, если  $\vec{d}$  равно нулю. Ограничимся исследованием общего нормального движения.

Введем следующими уравнениями скаляр  $\lambda$  и вектор  $\vec{s}$ ,

$$\vec{c} + \lambda \vec{d} = 0, \quad (17)$$

$$\vec{s} = \vec{a} + \lambda \vec{b}. \quad (18)$$

Принимая во внимание роль, которую играют эти величины при определении удельных объемов, назовем их соответственно стереоскаляром и стереовектором.

Уравнения (11) и (13) позволяют определить  $\varphi$  следующим образом:

$$\text{grad } \varphi = \vec{s}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda. \quad (19)$$

Для того чтобы найти  $\varphi$  из уравнений (19), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\text{rot } \vec{s} = 0, \quad \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \text{grad } \lambda. \quad (c)$$

Эти условия оказываются одновременно условиями динамической возможности движения; назовем их объемными условиями. Простые вычисления показывают, что первое уравнение (c) является следствием второго, так что условия объема дают только три скалярные уравнения.

Итак, условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости заключаются: 1) в условии незакручиваемости (уравнение (a)); 2) в тепловом условии (уравнение (b)) и 3) в условиях объема (уравнение (c)) — всего в пяти скалярных уравнениях. Если только эти условия выполнимы, из уравнений (19) можно определить  $\varphi$  с точностью до аддитивной произвольной постоянной (это означает, что еще одна произвольная постоянная будет входить как множитель в  $\omega = e^{\varphi}$ , а давление  $p$  будет определено из уравнения (8) с точностью до аддитивной произвольной функции времени).

Отсюда легко видеть, что согласно (8) и (19)  $\omega$  и  $p$  будут определены следующим образом:

$$\omega = \omega_0 e^{\int (s_x dy + s_y dx + s_z dz + \lambda dt)}, \quad (20)$$

$$p = \int \frac{G_x dx + G_y dy + G_z dz}{\omega} + p_0(t),$$

где  $\omega_0$  и  $p_0(t)$  означают произвольную константу и произвольную функцию времени;  $A_x, A_y, A_z$  — компоненты вектора  $\vec{A}$  по осям координат.

5. **Пример горизонтального движения ветра.** Приведем пример для того, чтобы выяснить практическое применение изложенных методов. Предположим, что движение жидкости задано следующими кинематическими уравнениями:

$$\mu = 0, \quad v = v(t, z), \quad \omega = 0.$$

Эти уравнения соответствуют встречающемуся в метеорологической практике случаю горизонтального ветра, который не изменяет с высотой свое направление и только испытывает незначительное изменение направления с изменением географических координат.

Составляя для данного движения требуемые векторы, получим

$$G_x = 0, \quad G_y = -\frac{\partial v}{\partial t}, \quad G_z = -g, \quad H_x = -\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z}, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0,$$

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} : \frac{\partial v}{\partial t}, \quad b_x = 0, \quad b_y = -\frac{1}{v}, \quad b_z = -\frac{g}{v \frac{\partial v}{\partial t}},$$

$$\mu = -v \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \mu^2 c_x = v \left( \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^3 v}{\partial^2 t \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} \right), \quad \mu^2 c_y = 0, \quad \mu^2 c_z = 0,$$

$$\mu^2 d_x = g \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2, \quad \mu^2 d_y = 0, \quad \mu^2 d_z = 0,$$

где ось  $z$  направлена вертикально вверх и  $g$  — величина ускорения силы тяжести.

Из вышеприведенных уравнений видно, что условие незакручиваемости и тепловое условие выполняются сами собой. Объемные условия приводят к следующим уравнениям третьего порядка, которым должна удовлетворять функция  $v(t, z)$ :

$$g \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2\beta} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} \right) = \frac{\partial v}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2, \quad (21)$$

где  $\beta$  означает произвольную константу.

Стереоскаларь и стереовектор будут определены из формул

$$s_x = 0, \quad s_y = \frac{2c}{g}, \quad s_z = \frac{2\beta + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z}}{\frac{\partial v}{\partial t}},$$

$$\lambda = -\frac{2\beta}{g} v. \quad (22)$$

Из этого следует, что если  $v$  удовлетворяет уравнению (21), то давление и удельный объем легко можно определить квадратурами из уравнений (22) и (20).

Уравнение (21) позволяет найти ряд частных решений, одно из них соответствует, например, случаю, когда ветер определенной силы на известной высоте постепенно падает. В этом случае  $v$  является функцией  $z + nt$  ( $n = \text{const}$ ) и задача решается с помощью цилиндрических функций с дробными индексами. Можно было бы выразить  $v$  формулой

$$v = \frac{\partial}{2\beta} F(t + z).$$

Тогда функция  $F(x)$  на основании уравнения (21) определяется следующим образом

$$F(x) = -\frac{2\beta^3}{g} \frac{1}{\beta_1 + \frac{2\beta^2}{g}x} - 2 \sqrt{\beta_1^2 + \frac{2\beta^2}{g}} \frac{Z'_{1/3} \left( \frac{g}{3\beta^2} \left( \beta_1 + \frac{2\beta^2}{g}x \right)^{3/2} \right)}{Z_{1/3} \left( \frac{g}{3\beta^2} \left( \beta_1 + \frac{2\beta^2}{g}x \right)^{3/2} \right)} - \alpha,$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$  — известные константы,  $Z_n$  — общее решение уравнения Бесселя с индексом  $n$ .

С помощью функции  $F$  согласно уравнениям (20) давление и удельный объем определяются следующим образом:

$$\omega = \omega_0 e^{\frac{2c}{g}y + \int_0^{t+z} F(\tau) d\tau + \alpha z},$$

$$p = -\frac{g^2}{4\beta^3} \frac{F'(t+z)}{\omega} + p_0(t),$$

где  $\omega_0$  и  $\alpha$  — постоянные;  $p_0(t)$ , напротив, — произвольная функция времени \*\*.

Недостаток места не позволяет нам изложить еще несколько случаев движения сжимаемой жидкости, которые могут быть изучены с помощью изложенного выше метода.

Ноябрь 1922 г. Петроград

\* J a h n k e E. und E m d e F. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig, Berlin, 1909, S. 167.

\*\* О таком движении см. мою заметку в Compt. rend. Paris, 1916, 163, p. 219; стр. 9 настоящей книги.



## О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРЕРЫВНОСТИ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ<sup>4</sup>

При решении многих вопросов приходится иметь дело с явлением образования разрыва непрерывности на некоторой поверхности тех или иных элементов (или их производных), характеризующих движение жидкости. Поверхность, на которой имеет место образование упомянутого разрыва непрерывности, не остается, вообще говоря, неподвижной, а определенным образом перемещается в жидкости; равным образом уравнения гидромеханики налагают на указанные разрывы особые ограничения, а именно: связывают между собой разрывы скоростей и разрывы давления и удельного объема (или, что сводится к тому же самому, — температуры).

Задача изучения поверхностей разрыва непрерывности, образующихся в жидкости, была, сколько нам известно, рассмотрена А д а м а р о м (Hadamard)\* для случая несжимаемой идеальной жидкости, а также для случая идеальной сжимаемой жидкости частного типа, в которой давление есть функция удельного объема. Целью настоящей заметки является рассмотрение вопроса об образовании поверхностей разрыва непрерывностей в идеальной или в вязкой сжимаемой жидкости общего типа, когда, следовательно, давление не будет функцией только удельного объема.

Так как число функций, подлежащих определению в рассматриваемых нами случаях, увеличивается до пяти (три составляющие скорости, давление и удельный объем), то четырех уравнений классической гидродинамики становится недостаточно и приходится обращаться к пятому уравнению — к уравнению притока тепла. При этом необходимо сделать определенные предположения о характере притока тепла. Мы ограничимся в дальнейшем следующими случаями: 1) приток тепла задан наперед как функция координат и времени (например, адиабатическое движение); 2) приток тепла происходит за счет теплопроводности; 3) он состоит из превращенной в тепло работы диссипативных сил внутреннего трения и из притока тепла, являющегося наперед заданной функцией координат и времени, и, наконец, 4) приток тепла образуется из двух частей: а) из превращенной в тепло работы диссипативных сил внутреннего трения и б) из тепла, притекающего в силу процесса теплопроводности. Для идеальной (невязкой) сжимаемой жидкости третий случай, очевидно, совпадает с первым или со вторым; для вязкой жидкости мы будем в третьем случае иметь дело с псевдоадиабатическим движением, коль скоро наперед заданная часть притока тепла равна нулю.

\* H a d a m a r d J. Leçons sur la propagation des ondes. Paris, 1903. В некоторых случаях указанная задача была рассмотрена Дюзмом (D u h e m. Recherches sur l'hydrodynamique. Paris, 1903).

Прежде чем перейти к решению поставленной выше задачи, мы считаем необходимым указать вкратце на методы решения ее и на обозначения и термины, которые будут нами в дальнейшем употребляться.

## § 1

1. Пусть  $x, y, z$  — прямоугольные, прямолинейные координаты какой-либо точки, а  $t$  — время. Рассматривая многообразие четырех измерений  $M_4$  с координатами  $x, y, z$  и  $t$ , назовем гиперповерхностью  $\Sigma$  в  $M_4$  совокупность значений переменных, удовлетворяющих условию

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Область значений переменных, находящихся в непосредственной близости к значениям, образующим гиперповерхность  $\Sigma$ , распадается на две части: в одной части  $f > 0$ , мы назовем ее положительной областью относительно гиперповерхности  $\Sigma$ , в другой части  $f < 0$ , эту часть мы назовем отрицательной областью относительно гиперповерхности  $\Sigma$ .

Рассмотрим какую-либо функцию  $\Phi$  времени и координат; положим, что эта функция будет обладать непрерывными производными всех порядков в положительной области и непрерывными производными всех порядков в отрицательной области  $M_4$  относительно гиперповерхности  $\Sigma$ . Продолжим функцию  $\Phi$  в отрицательную область так, чтобы ее производные разных порядков по координатам и времени были непрерывны во всей области  $M_4$ , заключающей в себе гиперповерхность  $\Sigma$ . Образованную таким образом функцию обозначим через  $\Phi_+$ ; очевидно, что в положительной области  $\Phi_+$  будет со своими производными совпадать с  $\Phi$  и соответственными ее производными. Точно так же продолжим функцию  $\Phi$  в положительную область при условии, чтобы ее производные были непрерывны во всей области  $M_4$ , заключающей в себе гиперповерхность  $\Sigma$ . Обозначим полученную таким образом функцию через  $\Phi_-$ ; очевидно, что в отрицательной области  $\Phi_-$  совпадает с  $\Phi$ .

Если  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$  и все их производные не совпадают друг с другом на  $\Sigma$ , то мы говорим, что  $\Phi$  имеет разрыв непрерывности на гиперповерхности  $\Sigma$ ; если производные  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$  до  $m$  порядка включительно совпадают на  $\Sigma$ , а все или некоторые производные  $(m+1)$  порядка этих функций не совпадают друг с другом, то говорят, что  $\Phi$  имеет разрыв непрерывности  $(m+1)$  порядка на гиперповерхности  $\Sigma$ . Гиперповерхность  $\Sigma$  называется волной или гиперповерхностью разрыва непрерывности. Сказанное только что о разрыве непрерывности скалярной функции  $\Phi$  может быть аналогичным образом распространено на разрыв непрерывности векторной функции  $\Phi_-$ , образующей, вообще говоря, нестационарное поле векторов.

2. Условимся обозначать символом  $[\Phi]$  разность

$$[\Phi] = \Phi_+ - \Phi_-$$

взятую в какой-либо точке гиперповерхности  $\Sigma$ ; эта разность называется величиной разрыва  $\Phi$  на гиперповерхности  $\Sigma$ . Таким образом, будем иметь равенство

$$\left[ \frac{\partial^{p+q+r+s}\Phi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} \right] = \frac{\partial^{p+q+r+s}\Phi_+}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} - \frac{\partial^{p+q+r+s}\Phi_-}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s},$$

причем значение производных взято в какой-либо точке гиперповерхности  $\Sigma$ ; указанная разность называется величиной разрыва производной  $\frac{\partial^{p+q+r+s}\Phi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s}$  на поверхности  $\Sigma$ . Адамаром

были установлены в общем виде условия, связывающие между собой величины разрыва различных производных на гиперповерхности  $\Sigma$ . Эти условия называются кинематическими условиями разрыва непрерывности. Мы ограничимся формулировкой их лишь для тех случаев, которые нам будут нужны в дальнейшем.

Если  $\Phi$  имеет разрыв  $(m+1)$  порядка на гиперповерхности  $\Sigma$ :  $f(x, y, z, t) = 0$ , то величина разрыва всех производных  $(m+1)$  порядка от  $\Phi$  определяется одним скалярным элементом  $\lambda$  согласно формуле

$$\left[ \frac{\partial^{m+1}\Phi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} \right] = \lambda f_x^p f_y^q f_z^r f_t^s, \quad p+q+r+s = m+1, \quad (1)$$

где  $f_x = \partial f / \partial x$  и т. д.

Величину  $\lambda$  будем называть скаляром разрыва.

Если вектор  $\Phi$  имеет разрыв  $(m+1)$  порядка на гиперповерхности  $\Sigma$ :  $f(x, y, z, t) = 0$ , то величина разрыва всех производных  $(m+1)$  порядка от  $\Phi$  определяется одним векторным элементом  $\Lambda$  согласно формуле

$$\left[ \frac{\partial^{m+1}\Phi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} \right] = \Lambda f_x^p f_y^q f_z^r f_t^s, \quad p+q+r+s = m+1. \quad (2)$$

Вектор  $\Lambda$  будем называть вектором разрыва функции  $\Phi$ . Непосредственное вычисление дает нам формулы

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$[\operatorname{div} \Phi] = (\Lambda, \operatorname{grad} f), \quad (3)$$

$$[\operatorname{rot} \Phi] = [\operatorname{grad} f, \Lambda],$$

где  $\Phi$  предполагается имеющим разрыв не ниже первого порядка, символ  $d/dt$  означает  $\partial/\partial t + u(\partial/\partial x) + v(\partial/\partial y) + w(\partial/\partial z)$ , причем  $u, v, w$  — составляющие скорости движения жидкости (предполагаемые непрерывными), а символы  $(a, b)$  и  $[a, b]$  означают скалярное и векторное произведение. Точно так же, если  $\Phi$  имеет разрыв не ниже второго порядка, будем иметь следующие формулы:

$$\begin{aligned} [\Delta \Phi] &= \Lambda \nabla f, & [\text{grad div } \Phi] &= (\Lambda, \text{grad } f) \text{grad } f, \\ [\text{rot rot } \Phi] &= [\text{grad } f, [\text{grad } f, \Lambda]], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Lambda$  есть сокращенное обозначение операции Лапласа:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а  $\nabla f$  определяется равенством

$$\nabla f = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2.$$

3. Помимо гиперповерхности разрыва непрерывности  $\Sigma$  или волны необходимо обратить внимание на особую, меняющуюся с течением времени поверхность  $S_t$  в трехмерном многообразии с координатами  $x, y, z$ , образуемую из  $\Sigma$ , когда времени  $t$  придается некоторое постоянное значение. Эта поверхность  $S_t$  является одной из поверхностей семейства

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

где время  $t$  играет роль параметра.

Поверхность  $S_t$  носит название ф р о н т а волны или поверхности разрыва непрерывности.

Так как положение и форма поверхности  $S_t$  с течением времени меняются, то поверхность  $S_t$ , или фронт волны, перемещается. Скоростью перемещения фронта волны в данной ее точке называется величина предела отношения отрезка нормали в данной точке к поверхности  $S_t$ , заключенного между  $S_t$  и  $S_{t+\delta t}$ , к протекшему промежутку времени  $\delta t$ , коль скоро этот последний стремится к нулю. Обозначая скорость перемещения через  $v$  и придавая ей некоторый знак, будем иметь

$$v = - \frac{df}{\sqrt{\nabla f}}. \quad (5)$$

Помимо скорости перемещения фронта волны при изменении  $S_t$  в жидкости рассматривают еще скорость распространения,

---

\* Если  $v > 0$ , то поверхность перемещается в направлении нормали, идущей из области, где  $f < 0$ , в область, где  $f > 0$ .

определяемую следующим образом. Совокупность жидких частиц, расположенная к моменту  $t$  на поверхности  $S_t$ , займет к моменту  $t + \delta t$  особую поверхность  $S'_{t+\delta t}$ , отличную от  $S_t$  и  $S_{t+\delta t}$ ; проведя в данной точке нормаль к поверхности  $S_t$ , мы получим определенный отрезок этой нормали, заключенной между  $S'_{t+\delta t}$  и  $S_{t+\delta t}$ . Деля этот отрезок на протекший промежуток времени  $\delta t$  и переходя в полученном отношении к пределу при  $\delta t \rightarrow 0$ , получим скорость распространения фронта волны. Обозначая эту скорость через  $c$  и придавая ей соответствующий знак, будем иметь

$$c = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{V \nabla f}. \quad (6)$$

Называя нормальной скоростью проекцию скорости жидкости на нормаль к  $S_t$ , идущую из области, где  $f < 0$ , в область, где  $f > 0$ , и обозначая нормальную скорость через  $V_n$ , будем иметь

$$V_n = - \frac{uf_x + vf_y + wf_z}{V \nabla f},$$

откуда

$$c = v - V_n. \quad (7)$$

Фронт волны мы назовем стационарным, если скорость распространения его равна нулю; в этом случае фронт волны состоит из одних и тех же частиц, а скорость его перемещения совпадает с нормальной скоростью. В дальнейшем мы увидим, что фронт волны большей частью при распространении разрывов в сжимаемой жидкости будет стационарным.

При рассмотрении распространения разрывов в жидкости мы, имея дело с разрывом какого-либо вектора  $\Phi$ , можем разделить волны на три типа: 1) продольные волны, когда вектор разрыва  $\Phi$  совпадает с направлением нормали к фронту волны; 2) поперечные волны, когда вектор разрыва  $\Phi$  перпендикулярен направлению нормали к фронту волны; 3) волны смешанного типа, когда имеют место другие случаи.

Очевидно, что условие продольности волны выразится равенством

$$[\text{grad } f, \Lambda] = 0, \quad (8)$$

а условие поперечности волн напишется в виде

$$(\text{grad } f, \Lambda) = 0, \quad (9)$$

где  $\Lambda$  — вектор разрыва.

Если мы имеем разрыв первого порядка, то для продольных волн найдем

$$[\operatorname{rot} \Phi] = 0, \quad (10)$$

а для поперечных будем иметь

$$[\operatorname{div} \Phi] = 0. \quad (11)$$

Точно так же для разрыва второго порядка найдем для продольных волн равенство

$$[\operatorname{rot} \operatorname{rot} \Phi] = 0 \quad (12)$$

и для поперечных

$$[\operatorname{grad} \operatorname{div} \Phi] = 0. \quad (13)$$

4. Пусть элементы, разрывы непрерывностей которых мы изучаем, удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям; положим, что эти дифференциальные уравнения будут для некоторых из изучаемых нами элементов второго порядка, а для других — первого порядка. Так как на гиперповерхности разрыва непрерывности  $\Sigma$  задача Коши по необходимости имеет не одно решение, то очевидно, что гиперповерхность  $\Sigma$  должна быть характеристической для только что указанной системы дифференциальных уравнений. Формулируем общеизвестное правило нахождения характеристик системы дифференциальных уравнений\*.

Обозначим искомые функции через  $u^{(\sigma)}$ ,  $\sigma = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n$ ; пусть относительно первых  $m$  функций система наших уравнений будет системой второго порядка, а относительно последующих  $n$  функций — системой первого порядка. Напишем наши дифференциальные уравнения следующим образом:

$$\sum_{\sigma=1}^m f_{xy} a_{xy}^{\alpha\sigma} u_{xy}^{(\sigma)} + \sum_{\sigma=m+1}^{m+n} f_x a_x^{\alpha\sigma} u_x^{(\sigma)} + F^{(\alpha)} = 0, \quad (14)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, m+n.$$

Знаки  $\sum_{xy}$  и  $\sum_x$  означают суммирование по всем комбинациям переменных  $t, x, y, z$  соответственно по две или по одной; величины  $a_{xy}^{\alpha\sigma}$ ,  $a_x^{\alpha\sigma}$  и  $F^{(\alpha)}$  могут зависеть, вообще говоря, от  $t, x, y, z$ , от всех  $u^{(\sigma)}$  и от первых производных  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}$ .

Система уравнений (14) дает возможность образовать уравнение характеристик следующим способом.

\* См. А д а м а р Ж., стр. 27, а также работы C o u l o n J. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques. Paris, 1902.

Составим  $(m + n)^2$  выражений,

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\alpha\sigma} &= \int_{x,y} a_{xy}^{\alpha\sigma} f_x f_y, \quad \sigma = 1, 2, \dots, m \\ \Omega_{\alpha\sigma} &= \int_x a_x^{\alpha\sigma} f_x, \quad \sigma = m + 1, \dots, m + n \end{aligned} \right\} \alpha = 1, 2, \dots, m + n. \quad (15)$$

Из этих  $(m + n)^2$  выражений образуем определитель

$$H(f) = \|\Omega_{\alpha\sigma}\|; \quad (16)$$

уравнение характеристик получим, приравнявая этот определитель нулю:

$$H(f) = 0. \quad (17)$$

Таким образом гиперповерхность  $\Sigma$  определяется с помощью дифференциального уравнения (17); при этом, конечно, предполагается, что разрывы функций  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}$  не ниже второго порядка, а функций  $u^{(m+1)}, u^{(m+2)}, \dots, u^{(m+n)}$  не ниже первого порядка. Уравнение (17) может служить как для определения функции  $f$ , так и для решения вопроса о скорости перемещения и распространения фронта волны; в самом деле, из уравнения (17) можно определить  $f_t$ , а тогда формулы (5) и (6) дадут нам  $v$  и  $c$ .

Уравнения (14) могут служить для изучения взаимной связи разрыва непрерывности различных элементов между собой; они дают так называемые динамические условия разрыва непрерывности.

Пользуясь символом [ ], из уравнений (14) без труда найдем

$$\sum_{\sigma=1}^m \int_{x,y} a_{xy}^{\alpha\sigma} [u_{xy}^{(\sigma)}] + \sum_{\sigma=m+1}^{m+n} \int_x a_x^{\alpha\sigma} [u_x^{(\sigma)}] = 0,$$

откуда, полагая, что функции  $u^{(\sigma)}$  отвечает скаляр разрыва  $\lambda_\sigma$ , будем иметь

$$\sum_{\sigma=1}^{m+n} \lambda_\sigma \Omega_{\alpha\sigma} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m + n. \quad (18)$$

Эта система  $m + n$  однородных линейных уравнений относительно  $\lambda_\sigma$  имеет определителем своим  $H(f)$ , т. е. определитель этой системы в силу уравнения (17) обращается в нуль; если по крайней мере один из миноров  $H(f)$  отличен от нуля, то уравнения (18) определяют все  $\lambda_\sigma$  через одну из этих величин. В противном случае число произвольных  $\lambda_\sigma$  увеличится; детальное изучение системы (18) для уравнений гидродинамики будет выполнено нами в дальнейшем.

## § 2

1. Переходя к изучению распространения разрывов непрерывности в сжимаемой жидкости, установим прежде всего уравнения гидродинамики. Обозначая через  $\mathbf{v}$  вектор скорости, через  $p$ ,  $\omega$ ,  $T$  — давление, удельный объем и абсолютную температуру и через  $\varepsilon$  количество тепла, притекающего к единице объема в единицу времени, получим для сжимаемой невязкой жидкости (идеального газа) следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\omega \operatorname{grad} p + \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{d \ln \omega}{dt}, \\ \varepsilon &= c_p T \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{c_v}{R} \omega \frac{dp}{dt}, \\ p\omega &= RT, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

причем  $\mathbf{F}$  — вектор действующих на единицу массы жидкости сил,  $c_p$  и  $c_v$  — теплоемкости при постоянном давлении и объеме и  $R$  — газовая постоянная.

Точно так же уравнения движения вязкой сжимаемости жидкости напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\omega \operatorname{grad} p + \omega \eta \left( \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{d \ln \omega}{dt}, \\ \varepsilon &= c_p T \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{c_v}{R} \omega \frac{dp}{dt}, \\ p\omega &= RT, \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости.

Будем предполагать, что  $\varepsilon$  может зависеть от времени, координат и скорости жидкости.

Сообразно тому, что нами сказано было в начале настоящей заметки, величина  $\varepsilon$  в уравнениях (A) и (B) может иметь одну из следующих форм:

$$\varepsilon = E(t, x, y, z), \quad (\text{C}_1)$$

$$\varepsilon = k \Delta T, \quad (\text{C}_2)$$

$$\varepsilon = E(t, x, y, z) - A\eta \left\{ (\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) + \frac{1}{3} (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}) \right\}, \quad (\text{C}_3)$$

$$\varepsilon = k \Delta T - A\eta \left\{ (\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) + \frac{1}{3} (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}) \right\}. \quad (\text{C}_4)$$



Здесь  $E$  — заданная функция своих аргументов,  $k$  — коэффициент внутренней теплопроводности,  $A$  — термический эквивалент работы. Равенство  $(C_1)$  отвечает тому случаю, когда приток тепла задан наперед; для адиабатических движений  $E = 0$ . Равенство  $(C_2)$  отвечает случаю, когда тепло притекает при помощи процесса теплопроводности; равенство  $(C_3)$  соответствует предположению о притоке тепла двумя способами: с одной стороны, обращением в тепло работы диссипативных сил внутреннего трения в жидкости и, с другой стороны, наперед заданным образом. В случае псевдоадиабатических движений  $E = 0$ ; наконец, равенство  $(C_4)$  отвечает случаю притока тепла, как с помощью теплопроводности, так и с помощью обращения в теплоту работы диссипативных сил трения.

Дальнейшая наша задача будет заключаться в построении уравнения характеристики для каждого из разбираемых здесь случаев, в установлении скорости перемещения и распространения фронта волны и в исследовании динамических условий разрыва непрерывности. Всего нам нужно будет разобрать шесть отдельных случаев; кроме того, для полноты и в целях лучшего выяснения метода мы вкратце разберем случай, рассмотренный еще Адамаром, когда давление есть функция удельного объема.

2. Уравнения (A) и (B) распадаются на два класса; к первому относятся все уравнения за исключением уравнения притока тепла; в уравнениях этого класса нет надобности делать какие-либо добавочные предположения о характере притока тепла, так как эти уравнения остаются теми же самыми при любом способе притока тепла. Единственное уравнение второго класса — уравнение притока тепла существенным образом меняется от того способа, которым тепло притекает к жидкости. Уравнение характеристики и определение скорости перемещения и распространения фронта волн требует, конечно, знания способа притока тепла к жидкости. Наоборот, динамические условия, налагаемые на разрывы скорости, давления, удельного объема и температуры, в значительной своей части могут быть получены, не привлекая к рассмотрению уравнение притока тепла.

В дальнейшем мы будем рассматривать разрывы непрерывности таких величин: вектора  $v$ , давления  $p$ , удельного объема  $\omega$  и температуры  $T$ . Рассмотрим следующие два класса разрывов:

1) вектор скорости  $v$  имеет разрыв первого порядка, давление и удельный объем имеют разрывы также первого порядка, а температура может иметь разрыв как первого, так и второго порядка. Этот класс разрывов назовем гидродинамическим разрывом первого ступени;

2) вектор скорости  $v$  имеет разрыв второго порядка, давление и удельный объем имеют разрыв первого порядка, а температура может иметь

разрыв как первого, так и второго порядка. Этот класс разрывов назовем гидродинамическим разрывом второй степени.

В случае идеальной (невязкой) жидкости мы будем большей частью рассматривать гидродинамический разрыв первой степени; в случае вязкой жидкости мы остановимся на гидродинамическом разрыве второй степени.

Вектор разрыва скорости  $v$  обозначим через  $\Lambda$  с составляющими  $\lambda, \mu, v$ ; скаляры разрыва первого порядка для давления, удельного объема и температуры обозначим через  $\pi, \sigma, \tau$ , скаляр разрыва второго порядка для температуры обозначим через  $\tau'$ .

Формула Клапейрона дает

$$\frac{\pi}{\rho} + \frac{\sigma}{\omega} = \frac{\tau}{T}. \quad (19)$$

Если температура имеет разрыв второго порядка, то из формулы (19) следует, что скаляры разрыва давления и удельного объема противоположны по знаку.

Обращаясь к случаю невязкой жидкости из уравнений (A) (за исключением уравнения притока тепла и уравнения Клапейрона), получим соотношения

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{df}{dt} &= -\omega \pi \operatorname{grad} f, \\ (\Lambda, \operatorname{grad} f) &= \frac{\sigma}{\omega} \frac{df}{dt}. \end{aligned} \quad (20)$$

Разберем два случая: а) нестационарный фронт волны не равен нулю, и б) стационарный фронт волны  $\partial f / \partial t = 0$ ,  $c = 0$ .

Для нестационарного фронта волны мы имеем продольную волну, ибо  $\Lambda$  параллелен  $\operatorname{grad} f$ , причем величина  $\Lambda$  вектора разрыва и скаляр  $\sigma$  определяются через  $\pi$  формулами

$$\Lambda = \omega |\pi c|, \quad \sigma = -\frac{\omega^2}{c^2} \pi. \quad (21)$$

Формулы (21) показывают, что разрыв скоростей тем интенсивнее, чем больше разрыв давления и чем быстрее распространяется фронт волны. Величина  $c$  может быть найдена нами с помощью рассмотрения уравнения притока тепла.

Формулы (20) и (21) при условии, что температура терпит разрыв второго порядка, дают соотношение

$$\pi \left( 1 - \frac{RT}{c^2} \right) = 0, \quad (22)$$

которое показывает, что или  $\pi = 0$ , т. е.  $\sigma = 0$ ,  $\Lambda = 0$  и разрыва вовсе

нет (для нестационарного фронта волны), или  $c^2 = RT$ ; ниже мы увидим приложение этого замечания.

Для стационарного фронта волны

$$c = 0, \quad \pi = 0, \quad (\Lambda, \text{grad } f) = 0, \quad (23)$$

т. е. мы будем иметь поперечную волну для скорости и отсутствие разрыва для давления.

Нетрудно видеть из равенств (10) и (11), что продольная волна скорости отвечает тому случаю, когда вихрь  $\Omega = \text{rot } v$  не имеет разрыва, а поперечная — тому случаю, когда дивергенция скорости не имеет разрыва. Иначе говоря, продольная волна есть волна сгущений и разрежений, а поперечная — волна разрывов молекулярных вращений жидкости.

Рассматривая случай вязкой жидкости, предположим, что имеем дело с гидродинамическим разрывом второй ступени. Первое из уравнений (A) дает нам равенство:

$$\Lambda \nabla f + \frac{1}{3} (\Lambda, \text{grad } f) \text{grad } f = \omega \pi \text{grad } f,$$

откуда с помощью второго уравнения (A) найдем такие соотношения:

$$\Lambda \nabla f = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\eta} \text{grad } f,$$

$$\sigma \frac{df}{dt} = 0,$$

$$\Lambda = \frac{3}{4} \frac{|\pi|}{\eta} \frac{1}{\sqrt{\nabla f}}.$$

Если фронт волны нестационарен, то  $\sigma = 0$ ; для случая, когда температура обладает разрывом второго порядка, нестационарность волны влечет за собой полное отсутствие разрыва второго порядка для скоростей и разрыва первого порядка для удельного объема и давления.

Если фронт волны стационарен, то  $\sigma$  произвольно. Во всех случаях мы имеем дело с продольной волной, причем величина разрыва тем больше, чем больше разрыв давления и чем меньше вязкость жидкости.

Из формулы (12) следует, что для продольных волн разрыв второго порядка скорости не только вихри, но и так называемые вихри второго порядка  $\Omega' = \text{rot}^2 v = \text{rot } \Omega$  не обладают разрывом непрерывности; разрыв непрерывности здесь сказывается на градиенте дивергенции.

3. Представляется весьма интересным рассмотреть, какие динамические условия могут быть наложены на разрывы в т о р о г о порядка скоростей при движении невязкой сжимаемой жидкости. Уравнения движения показывают в этом случае, что разрыв давления должен быть не

ниже второго порядка; разрыв плотности для стационарного фронта волн может быть каким угодно (не ниже первого порядка), для нестационарного фронта волны этот разрыв должен быть не ниже второго порядка. Если мы желаем получить более подробные указания на характер разрыва скоростей, то должны обратиться к так называемым условиям динамической возможности движения, т. е. к тем соотношениям между составляющими скоростей, которые получаются путем исключения давления и удельного объема из уравнений гидродинамики и представляют собой естественное обобщение уравнений Гельмгольца\*. Одно из таких условий может быть написано следующим образом:

$$(\mathbf{H}, \mathbf{G}) = 0,$$

где

$$\mathbf{H} = -\operatorname{rot} \mathbf{G}, \quad \text{а } \mathbf{G} = \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Для разрывов второго порядка относительно скоростей будем иметь следующие равенства:

$$[\mathbf{G}] = 0,$$

$$[\mathbf{H}] = \frac{df}{dt} [\operatorname{grad} f, \Lambda];$$

предыдущее равенство напишется таким образом:

$$\frac{df}{dt} ([\operatorname{grad} f, \Lambda], \operatorname{grad} p) = 0,$$

ибо  $\mathbf{G} = \omega \operatorname{grad} p$ . Таким образом, или мы имеем дело со стационарным фронтом волны, или, если фронт волны нестационарен, вектор разрыва лежит в плоскости, нормальной как к поверхности фронта волны, так и к изобарической поверхности. В этом последнем случае, как показывает формула (4), вихрь второго порядка скорости имеет разрыв, лежащий по касательной к линии пересечения изобарической поверхности и поверхности фронта волны.

### § 3

1. Переходя к установлению уравнений характеристик, рассмотрим сначала случай невязкой жидкости, в которой удельный объем  $\omega$  есть функция давления:

$$\omega = \omega(p).$$

---

\* Friedman A. Sur les tourbillons dans un liquide à température variable.—*compt. rend.*, 1916, 163, p. 219—222; см. стр. 9 настоящей книги.

Рассматривая первые два из уравнений (А) и полагая, что

$$\frac{df}{dt} = U,$$

будем иметь уравнение характеристик

$$H(f) = -U^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} U^2 + \omega \nabla f \right) = 0,$$

откуда, вводя плотность  $\rho = 1/\omega$ , будем иметь известные результаты:

$$1) a = V_n \text{ или } 2) v = V_n \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

и соответственно

$$1) c = 0 \text{ или } 2) c = \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Таким образом, мы имеем или стационарный фронт волны и поперечную волну, или нестационарный фронт волны и продольную волну; в этом втором случае фронт волны распространяется со скоростью звука.

Так как разбираемый случай подробно изучен Адамаром и другими авторами, то мы на нем не останавливаемся.

Переходя к случаю вязкой жидкости, в которой удельный объем есть функция давления и в которой мы имеем гидродинамический разрыв второй ступени, мы без труда составим  $H(f)$ :

$$H(f) = \begin{vmatrix} -\eta\omega\nabla f - \frac{\eta\omega}{3} f_x^2 & -\frac{\eta\omega}{3} f_x f_y & -\frac{\eta\omega}{3} f_x f_z & \omega f_x \\ -\frac{\eta\omega}{3} f_y f_x & -\eta\omega\nabla f - \frac{\eta\omega}{3} f_y^2 & -\frac{\eta\omega}{3} f_y f_z & \omega f_y \\ -\eta\frac{\omega}{3} f_z f_x & -\frac{\eta\omega}{3} f_z f_y & -\eta\omega\nabla f - \frac{\eta\omega}{3} f_z^2 & \omega f_z \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega'}{\omega} U \end{vmatrix}.$$

Вычисляя этот определитель, найдем

$$H(f) = -\frac{\omega'}{\omega} U H_0(f) = 0,$$

где

$$H_0(f) = -\frac{36}{27} \omega^3 \eta^3 (\nabla f)^3. \quad \S$$

Исключая случай несжимаемой жидкости, будем иметь  $U = 0$ , т. е. будем иметь стационарный фронт волны. Волна, как мы видим, будет продольной, а разрывы удельного объема и давления будут произвольны-

ми; скорость перемещения определяется равенством  $v = V_n$ , скорость распространения обращается в нуль.

2. Рассмотрим теперь движение сжимаемой невязкой жидкости с заданным притоком энергии (формула (C<sub>1</sub>)); рассматривая гидродинамический разрыв первой ступени, будем иметь следующее выражение для  $H(f)$ :

$$H(f) = -\frac{c_p T}{\omega} U^3 \left( \frac{U^2}{\kappa p} - \omega \nabla f \right) = 0, \quad \text{где } \kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

откуда или  $U = 0$ , или  $U = \pm \sqrt{\kappa RT} \sqrt{\nabla f}$ .

В первом случае мы имеем стационарный фронт волны и поперечную волну; в этом случае  $v = V_n$ ;  $c = 0$ .

Во втором случае мы имеем нестационарный фронт волны и, следовательно, продольную волну; скорость распространения  $c = \pm \sqrt{\kappa RT}$  ( $c_a = \sqrt{\kappa RT}$  называется адиабатической скоростью звука), скорость перемещения  $v = V_n \pm \sqrt{\kappa RT}$ .

Положим далее, что сжимаемая невязкая жидкость получает тепло с помощью процесса теплопроводности, тогда  $H(f)$  будет

$$H(f) = \omega k \nabla f U^3 \left( \frac{U^2}{p} - \omega \nabla f \right) = 0,$$

откуда или  $U = 0$ , или  $U = \pm \sqrt{RT} \sqrt{\nabla f}$ .

В первом случае фронт волны стационарен,  $v = V_n$ ,  $c = 0$  — волна поперечная; во втором случае фронт волны нестационарен,  $c = \pm \sqrt{RT}$  ( $c_T = \sqrt{RT}$  называется изотермической скоростью звука),  $v = v_n \pm RT$  — волна продольная.

Для стационарного фронта волны мы будем иметь отсутствие разрыва первого порядка в давлении и удельном объеме.

В случае, когда фронт волны нестационарен, мы можем, пользуясь уравнением притока тепла, связать скаляр  $\tau'$  разрыва непрерывности второго порядка для температуры со скаляром разрыва непрерывности давления. Простые вычисления дают нам

$$\tau' = \pm \frac{\sqrt{R\pi} \sqrt{\nabla f}}{k \sqrt{\nabla f}}.$$

Таким образом, разрыв температуры тем интенсивнее, чем больше разрыв давления, чем больше сама температура и чем меньше теплопроводность; последнее обстоятельство понятно и из непосредственных физических соображений. Таким образом, в разбираемом случае все элементы продольной волны могут быть выражены через скаляр разрыва давления (см. формулы (24)).

Таблица 1'

| Способ притока тепла                                                                  | Распространение фронта волны                                                                  | Характер разрыва                                                                                            | Динамические условия                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Невязкая жидкость</i>                                                              |                                                                                               |                                                                                                             |                                                                                                                                                                   |
| Давление — заданная функция плотности                                                 | Стационарный,<br>$c = 0, \quad v = V_n$                                                       | Гидродинамический разрыв первой ступени. Поперечная волна                                                   | $\pi = 0$ , разрыв давления выше первого порядка                                                                                                                  |
|                                                                                       | Нестационарный,<br>$c = \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$<br>$v = V_n \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ | Гидродинамический разрыв первой ступени. Продольная волна                                                   | $\Lambda = \omega  \pi c $<br>$\sigma = -\frac{\omega^2}{c^2} \pi$                                                                                                |
| Приток тепла—заданная функция времени и координат (например, адиабатическое движение) | Стационарный,<br>$c = 0, \quad v = V_n$                                                       | Гидродинамический разрыв первой ступени. Поперечная волна                                                   | $\pi = 0$ , разрыв давления выше первого порядка                                                                                                                  |
|                                                                                       | Нестационарный,<br>$c = \pm c_a$<br>$v = V_n \pm c_a$<br>$c_a = \sqrt{\kappa RT}$             | Гидродинамический разрыв первой ступени. Продольная волна                                                   | $\Lambda = \omega  \pi c $ ,<br>$c_p \frac{\sigma}{\omega} + c_v \frac{\pi}{p} = 0$                                                                               |
| Приток тепла при помощи процесса теплопроводности                                     | Стационарный,<br>$c = 0, \quad v = V_n$                                                       | Гидродинамический разрыв первой ступени. Температура имеет разрыв не ниже второго порядка. Поперечная волна | $\pi = 0$ , разрыв давления выше первого порядка<br>$\sigma = 0$ , разрыв плотности выше первого порядка<br>$\tau' = 0$ , разрыв температуры выше второго порядка |
|                                                                                       | Нестационарный,<br>$c = \pm c_p$<br>$v = V_n \pm c_p$<br>$c_p = \sqrt{RT}$                    | Гидродинамический разрыв первой ступени. Температура имеет разрыв не ниже второго порядка. Продольная волна | $\Lambda \omega =  \pi c $ ,<br>$\sigma = -\frac{\omega^2}{p} \pi$ ,<br>$\tau' = \pm \frac{A \pi \sqrt{RT}}{k \sqrt{\nabla j}}$                                   |

Таблица 1 (продолжение)

| Способ притока тепла                                                                                                                                                                                                    | Распространение фронта волны                                                         | Характер разрыва                                                                                            | Динамические условия                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Вязкая жидкость</i>                                                                                                                                                                                                  |                                                                                      |                                                                                                             |                                                                                                                                           |
| Давление — заданная функция плотности                                                                                                                                                                                   | Стационарный,<br>$c = 0, \quad a = V_n$                                              | Гидродинамический разрыв второй ступени. Продольная волна                                                   | $\Lambda = \frac{3}{4} \frac{ \pi }{\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nabla f}}$                                                                |
| Приток тепла — заданная функция времени и координат (например, адиабатическое движение)                                                                                                                                 | Стационарный,<br>$c = 0, \quad a = V_n$                                              | Гидродинамический разрыв второй ступени. Продольная волна                                                   | $\Lambda = \frac{3}{4} \frac{ \pi }{\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nabla f}}$                                                                |
| Приток тепла с помощью теплопроводности                                                                                                                                                                                 | Стационарный,<br>$c = 0, \quad a = V_n$                                              | Гидродинамический разрыв второй ступени. Температура имеет разрыв не ниже второго порядка. Продольная волна | $\Lambda = \frac{3}{4} \frac{ \pi }{\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nabla f}}$<br>$\tau' = 0$ , разрыв температуры выше второго порядка       |
| Приток тепла при помощи:<br>1) обращения в теплоту работы диссипативных сил внутреннего трения;<br>2) наперед заданной в виде функции времени и координат части притока тепла (например, псевдоадиабатическое движение) | Стационарный. Скорость перемещения отлична от нуля:<br>$c = 0, \quad a = V_n \neq 0$ | Гидродинамический разрыв второй ступени. Продольная волна                                                   | $\Lambda = 0$ , разрыв скорости выше второго порядка<br>$\pi = 0$ , разрыв давления выше второго порядка                                  |
|                                                                                                                                                                                                                         | Стационарный. Скорость перемещения равна нулю:<br>$c = 0, \quad a = V_n = 0$         | Гидродинамический разрыв второй ступени. Продольная волна                                                   | $\Lambda = \frac{3}{4} \frac{ \pi }{\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nabla f}}$                                                                |
|                                                                                                                                                                                                                         | Нестационарный,<br>$c = (\kappa - 1) V_n$ ,<br>$a = \kappa V_n$ ,<br>$V_n \neq 0$    | Гидродинамический разрыв второй ступени. Продольная волна                                                   | $\sigma = 0$ , разрыв удельного объема выше первого порядка<br>$\Lambda = \frac{3}{4} \frac{ \pi }{\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nabla f}}$ |



Таблица 1 (окончание)

| Способ притока тепла                                                                                                                       | Распространение фронта волны            | Характер разрыва                                                                                      | Динамические условия                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Приток тепла при помощи:<br>1) обращения в теплоту работы диссипативных сил внутреннего трения;<br>2) при помощи процесса теплопроводности | Стационарный,<br>$c = 0, \quad a = V_n$ | Гидродинамический разрыв второй ступени. Разрыв температуры не ниже второго порядка. Продольная волна | $\Lambda = \frac{3}{4} \frac{ \pi }{\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nabla f}},$ $\tau' = \frac{A\pi V_n}{k \sqrt{\nabla f}}$ |

3. Аналогичным приемом можно разобрать все остальные случаи распространения разрыва непрерывности в невязкой и в вязкой сжимаемой жидкостях. В целях удобства обозрения всех этих случаев мы сгруппировали их в табл. 1.

4. Из табл. 1 видно, что для вязкой жидкости распространение поперечных волн невозможно при тех дополнительных условиях, которые мы выше поставили. Большею частью продольные волны, возникающие в вязкой жидкости, стационарны, тогда как в невязкой жидкости продольные волны распространяются со скоростью звука, а поперечные опять-таки стационарны.

В вопросах движения атмосферы распространение разрывов непрерывности играет весьма большую роль\*.

Примером поверхности, в которой температура меняется весьма быстро и которая может, следовательно, быть принята за поверхность разрыва непрерывности, т. е. за фронт волны, является поверхность или граница инверсии температуры.

При тех скоростях, которые имеют место в атмосфере, скорость перемещения фронта волны или близка к скорости звука или совпадает с  $V_n$  (и в одном из разобранных случаев совпадает с  $kV_n = 1,4$ ). Но граница инверсии почти горизонтальна\*\*, поэтому  $V_n$  является вертикальной составляющей скорости ветра в свободной атмосфере. Таким образом, скорость перемещения инверсии совпадает с вертикальной составляющей скорости ветра. Наблюдая скорость перемещения инверсии, можно

\* B j e r k n e s V. On the dynamics of the circular vortex with application to the atmosphere and atmospheric vortex and wave motions.—Geofys. Publ., 1922, v. II, N 4.

\* S v e r d r u p. Ausgedehnte Inversionsschichten in der freien Atmosphäre.—Veröff. Geophys. Inst. Univ. Leipzig. H. 3, 1914.



определить среднюю на известном участке земли вертикальную составляющую скорости ветра. В табл. 2 приведены скорости перемещения инверсий, вычисленные по наблюдениям в Линденбергской обсерватории за 1911—1912 гг. Из этой таблицы видно, что эти скорости (в общем достаточно малые величины) изменяются по сезонам так, как и следует ожидать для вертикальной составляющей ветра: зимой скорости малы, летом они больше.

За недостатком места мы не останавливаемся на более подробном разборе динамических условий, налагаемых на разрывы согласно данным табл. 1.

*Петроград, 15 апреля 1922 г.*

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ <sup>5</sup>**

### **Постановка вопроса**

Как известно, Осборну Рейнольдсу удалось так преобразовать гидродинамические уравнения движения вязкой однородной несжимаемой жидкости, что в эти полученные им уравнения входят только некоторые осредненные значения компонент скорости и вместе с ними шесть величин, которые характеризуют состояние турбулентности в данном месте и в данное время. Эти величины, таким образом, представляют шесть новых неизвестных функций координат и времени, и полученной Рейнольдсом системы уравнений недостаточно для того, чтобы из них и из начальных значений определить неизвестные функции.

В настоящей работе мы ставим перед собой следующую задачу: для дальнейшего развития идей Рейнольдса по возможности усовершенствовать систему величин, характеризующую турбулентность, так, чтобы их значения для начального момента времени — вместе с относящимися к этому же моменту осредненными значениями кинематических и динамических элементов — были достаточны для получения соответствующих значений этих функций в каждый последующий момент времени. При этом мы исследуем преимущественно турбулентность в атмосфере, рассматриваемой как идеальная сжимаемая жидкость.

### Основные положения метода Рейнольдса

В основе метода Рейнольдса лежит сопоставление действительного движения жидкости и некоторого «среднего» движения. Для последнего все непродолжительные колебания компонент скорости сглажены. Под колебаниями здесь будут пониматься пульсации соответствующих величин как во времени, так и в пространстве, которые наблюдаются при непрерывном переходе от одной произвольной точки этого пространства к соседним точкам в любом направлении.

Упомянутое сглаживание произведем следующим способом: вместо произвольной флуктуационной функции  $\varphi(t, x, y, z)$  возьмем среднее значение ее за некоторый интервал времени  $(t - T/2, t + T/2)$ , определяемое формулой

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi dt, \quad (1)$$

или пространственно-временное среднее значение

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{TXYZ} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \int_{x-X/2}^{x+X/2} \int_{y-Y/2}^{y+Y/2} \int_{z-Z/2}^{z+Z/2} \varphi(t, x, y, z) dt dx dy dz. \quad (2)$$

Далее будут рассматриваться только средние значения, определенные формулой (2). Четырехмерную область значений переменных  $t, x, y, z$ , на которую распространяется интегрирование в (2), будем в дальнейшем кратко обозначать через  $G$ .

Для построения таких средних значений Рейнольдс устанавливает определенные простые правила подсчета. О предположениях, лежащих в основе этих подсчетов, Л. Ричардсон пишет: «Все эти предположения не являются строгими, но дают хорошее приближение, когда колебания достаточно многочисленны и распределены случайно. Они считались бы строгими, если бы только было возможно так выбрать осредняющий интервал, чтобы для сглаженного движения его можно было бы рассматривать как бесконечно малую величину, а по сравнению с периодами колебаний он был бы бесконечно большим»\*.

Отсюда следует прежде всего, что внутри интервалов или областей значений переменных, в которых осуществляется построение средних величин, эти осредненные величины с достаточной степенью

\* Richardson L. Weather Prediction by numerical process. Cambridge, 1922, p. 96.

приближения можно рассматривать как постоянные (постулат 1). Из этого постулата следуют обе главные теоремы алгоритма Рейнольдса:

$$\overline{\overline{\Phi}} = \overline{\Phi}, \quad (3)$$

$$\overline{\overline{\Phi\psi}} = \overline{\Phi}\overline{\psi}. \quad (4)$$

Кроме того, имеет место дистрибутивный закон

$$\overline{\Phi + \psi} = \overline{\Phi} + \overline{\psi} \quad (5)$$

и как специальный предельный случай его — дифференциальная формула

$$\left[ \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \overline{\Phi}, \right] \quad (6)$$

где  $s$  означает одну из четырех основных переменных  $t, x, y, z$ .

Такие функции, для которых при соответствующем выборе масштаба осреднения (т. е. величин  $T, X, Y, Z$  в формулах (1) и (2)) приведенный постулат с достаточной степенью приближения имеет место, мы назовем ограниченными флуктуационными функциями.

Предполагаем в дальнейшем, что основные в динамике атмосферы функции, именно компоненты скорости  $u, v, w$ , удельный объем  $\omega$  и давление  $p$ , обладают этими свойствами.

### Моменты корреляции

Пусть  $\Phi$  и  $\psi$  — какие-то две ограниченные флуктуационные функции. Назовем «моментом корреляции» функций  $\Phi$  и  $\psi$  среднее значение:

$$R(\Phi, \psi) = \overline{(\Phi - \overline{\Phi})(\psi - \overline{\psi})} = \overline{\Phi\psi} - \overline{\Phi}\overline{\psi}. \quad (7)$$

Эти моменты корреляции, составленные для различных пар элементов, как известно, играют важнейшую роль среди характеристических параметров статистического распределения различных систем значений рассматриваемых функций внутри области  $G$ . Так,  $R(\Phi, \psi)$  является квадратом «рассеивания»  $\Phi$ , в то время как частное  $R(\Phi, \psi)/\sqrt{R(\Phi, \Phi)R(\psi, \psi)}$  представляет «множитель корреляции» для  $\Phi$  и  $\psi$ .

Шесть введенных Рейнольдсом характеристик представляют моменты корреляции для трех компонент скорости:  $R(u, u)$  и т. д.

Для символа  $R(\Phi, \psi)$  действительны коммутативный и дистрибутивный законы:

$$R(\psi, \Phi) = R(\Phi, \psi), \quad (8)$$

$$R(\Phi, \psi_1 + \psi_2) = R(\Phi, \psi_1) + R(\Phi, \psi_2). \quad (9)$$

### Введение моментов связи

Мы теперь перейдем к существенному обобщению схемы Рейнольдса, если введем операции, которые относятся к статистическим связям между одновременными положениями двух соседних точек пространства или (еще более общо) между положениями двух различных «мировых точек».

Итак, пусть  $\varphi(t, x, y, z)$  и  $\psi(t, x, y, z)$  — две функции времени и координат. Положим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi(t - \tau, x - \xi, y - \eta, z - \zeta), \\ \psi_2 &= \psi(t + \tau, x + \xi, y + \eta, z + \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и образуем момент корреляции  $R(\varphi_1, \psi_2)$ . Здесь при построении средних значений изменяются только значения основных переменных  $t, x, y, z$ , а приращения  $\tau, \xi, \eta, \zeta$  рассматриваются как постоянные параметры.

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} t - \tau &= t_1, & x - \xi &= x_1, & y - \eta &= y_1, & z - \zeta &= z_1, \\ t + \tau &= t_2, & x + \xi &= x_2, & y + \eta &= y_2, & z + \zeta &= z_2. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Величину  $R(\varphi_1, \psi_2)$  можно, таким образом, рассматривать либо как функцию восьми аргументов:  $t, x, y, z; \tau, \xi, \eta, \zeta$ , либо как функцию аргументов  $t_1, x_1, y_1, z_1; t_2, x_2, y_2, z_2$ . В первом случае мы обозначаем ее через  $R_{\varphi, \psi}$ , во втором — через  $\bar{R}_{\varphi, \psi}$ . Итак, имеют место определения

$$R(\varphi_1, \psi_2) = R_{\varphi, \psi}(\tau, \xi, \eta, \zeta; t, x, y, z) = \bar{R}_{\varphi, \psi}(t_1, x_1, y_1, z_1; t_2, x_2, y_2, z_2). \quad (10)$$

Величины  $R_{\varphi, \psi}$  назовем моментами связи\*.

### Правила операций с моментами связи

Символ  $R_{\varphi, \psi}$  обладает следующими свойствами.

Во-первых,  $R_{\varphi, \psi}$  некоммукативно по отношению к  $\varphi$  и  $\psi$ , но имеют место соотношения

$$R_{\varphi, \varphi}(\tau, \xi, \eta, \zeta; t, x, y, z) = R_{\varphi, \psi}(-\tau, -\xi, -\eta, -\zeta; t, x, y, z). \quad (11)$$

Из закона дистрибутивности для  $R(\varphi, \psi)$  следует такое же свойство и для вновь введенного символа  $R_{\varphi, \psi}$ :

$$R_{f, \varphi + \psi} = R_{f, \varphi} + R_{f, \psi}. \quad (12)$$

\* А. А. Фридман вместо вошедшего в научную литературу термина «момент связи» употребляет термин «Erhaltungsmoment» — момент сохранения. Это наименование он обосновывает так: «Величины  $R_{\varphi, \psi}$  мы называем моментами сохранения, так как в них находит выражение «тенденция сохранения» отклонений от соответствующих средних значений, а именно «тенденция сохранения» по отношению как ко временным, так и к пространственным изменениям» (см. Библиографию работ А. А. Фридмана, № 38, стр. 397).

Если приращения  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  обращаются в нуль, то момент связи превращается в момент корреляции Рейнольдса

$$R_{\varphi, \psi}(0, 0, 0, 0; t, x, y, z) = R(\varphi, \psi). \quad (13)$$

Далее имеют место дифференциальные формулы

$$\left. \begin{aligned} R_{\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial s}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) R_{\varphi, \psi}, \\ R_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \psi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) R_{\varphi, \psi}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $s$ , как и раньше, означает одну из четырех переменных  $t, x, y, z$ , а  $\sigma$  — соответствующее приращение  $\tau, \xi, \eta, \zeta$ .

Доказательство. Из определения (10) следует сначала при помощи (а) и (б)

$$R_{\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}} = R\left(\varphi(t_1, x_1, y_1, z_1), \frac{\partial \psi(t_2, x_2, y_2, z_2)}{\partial t_2}\right) = R\left(\varphi_1, \frac{\partial \psi_2}{\partial t_2}\right). \quad (c)$$

На основании закона дистрибутивности, кроме того,

$$R\left(\varphi_1, \frac{\partial \psi_2}{\partial t_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t_2} R(\varphi_1, \psi_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} \bar{R}_{\varphi, \psi}. \quad (d)$$

Мы получаем дифференциальные формулы

$$\left. \begin{aligned} R_{\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial s}} &= \frac{\partial}{\partial s_2} \bar{R}_{\varphi, \psi} \\ R_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \psi} &= \frac{\partial}{\partial s_1} \bar{R}_{\varphi, \psi} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

и аналогично

Выражая из соотношений (10) и (b) производные  $\bar{R}_{\varphi, \psi}$  по  $s_1$  и  $s_2$  через производные  $R_{\varphi, \psi}$  по  $s$  и  $\sigma$ , мы получим в конце концов формулы (14).

Исходя из полученных соотношений, дадим здесь еще две формулы, которые выражают обычные средние значения через  $R_{\varphi, \psi}$ .

Напишем сначала формулу (13) в сокращенных обозначениях:

$$R(\varphi, \psi) = (R_{\varphi, \psi})_0.$$

Отсюда следует при помощи (7)

$$\overline{\varphi\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi} + (R_{\varphi, \psi})_0. \quad (15)$$

Далее из (15) вытекает при помощи дифференциальных формул (6) и (14)

$$\overline{\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial s}} = \overline{\Phi} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (R_{\Phi, \Phi})_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s} R_{\Phi, \Phi} \right)_0. \quad (16)$$

### Дополнительные предположения

Развиваемые до сих пор рассуждения требуют только предположений, которые лежат в основе теории Рейнольдса, и никаких других. Однако теперь мы должны ввести два существенных ограничения, без которых наш алгоритм недостаточен для исчерпывающего обсуждения гидродинамических уравнений. Сейчас, имея только правила, установленные для вычисления выражения вида  $R_{\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial s}}$ , мы не можем подойти к этим уравнениям.

Во-первых, мы должны предположить, что моменты связи  $R_{\Phi, \Phi}$  принимают заметно отличающиеся от нуля значения только в малой окрестности мировой точки  $(t, x, y, z)$ , или иначе в малой области  $\Gamma$  значений приращений  $\tau, \xi, \eta, \zeta$ , так что внутри области значений  $\Gamma$  все осредненные функции ( $\overline{\Phi}$  и т. д.) можно рассматривать как константы (как мы это предполагали в постулате I для области  $G$ ) (постулат II).

Во-вторых, предположим, что по сравнению с моментами второго порядка  $R_{\Phi, \Phi}$  и их производными можно пренебречь моментами высших порядков (постулат III).

Это имеет место, например, если предположить, что осредненные с помощью образования средних значений при принятом за основу «масштабе сглаживания» колебания  $(\Phi' = \Phi - \overline{\Phi})$  можно рассматривать как систему волн, имеющих не только малый период (что требуют постулаты I, II), но также и малую амплитуду.

На основании последнего постулата устанавливаются приближенные формулы для вычисления средних значений и моментов корреляции сложных выражений, которые зависят от многих флуктуационных функций.

Мы дадим вывод не общей формулы, а только совершенно специального выражения, которое нужно непосредственно для нашей задачи, а именно:

$$R(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \overline{\Phi_2} R(\Phi_1, \Phi_3) + \overline{\Phi_3} R(\Phi_1, \Phi_2). \quad (17)$$

Доказательство. Если мы введем моменты корреляции третьего порядка, положив

$$R(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \overline{(\Phi_1 - \overline{\Phi_1}) \cdot (\Phi_2 - \overline{\Phi_2}) \cdot (\Phi_3 - \overline{\Phi_3})},$$



то с помощью метода Рейнольдса легко проверить следующую точную формулу:

$$R(\varphi_1, \varphi_2 \varphi_3) = \bar{\varphi}_2 R(\varphi_1, \varphi_3) + \bar{\varphi}_3 R(\varphi_1, \varphi_2) + R(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Если на основании вышеупомянутого постулата здесь пренебречь третьим членом в правой части, то получится приближенная формула (17). Формула (17) дает искомое преобразование выражения  $R_{\varphi, f} \frac{\partial \psi}{\partial s}$  на основе определения момента связи по формуле (10) при помощи постулата II и дифференциальных формул (14):

$$\left. \begin{aligned} R_{\varphi, f} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial s} R_{\varphi, f} + \frac{1}{2} \bar{f} \left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) R_{\varphi, \psi}, \\ R_{f \frac{\partial \psi}{\partial s}, \varphi} &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial s} R_{f, \varphi} + \frac{1}{2} \bar{f} \left( \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) R_{\psi, \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Эти формулы представляют, очевидно, обобщение формул (14), которые получаются, если в (18) подставить  $f = 1$ .

### Вывод дифференциальных уравнений турбулентного движения

Применим теперь к гидродинамическим уравнениям операции, поясненные выше.

Ограничимся сначала случаем адиабатического движения идеальной тяжелой сжимаемой жидкости и напомним уравнения движения в форме уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\omega \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= -\omega \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \frac{dp}{dt} &= -\kappa p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Для удобства дальнейших рассуждений обозначим пять неизвестных функций  $u, v, w, \omega, p$  соответственно через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$  и запишем пять уравнений (19) сначала в форме

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = F_i \quad (20)$$

или еще короче, подставив  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - F_i = \Phi_i$ , в форме

$$\Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (20a)$$

Попробуем так преобразовать эти уравнения, чтобы в окончательную систему уравнений больше не входили бы флуктуационные функции  $\Phi_i$ , а встречались бы только средние значения  $\bar{\Phi}_i$  и характеристики турбулентности  $R_{\Phi_i, \Phi_k}$ .

Относительно этих последних мы докажем, что они удовлетворяют требованиям, налагаемым на полную систему характеристик.

Для упомянутого преобразования исходим из двух операций: 1) простое построение среднего значения и 2) построение моментов связи.

Если не нужно отмечать, какая именно функциональная зависимость существует между величинами  $R_{\Phi_i, \Phi_k}(\tau, \xi, \eta, \zeta; t, x, y, z)$  и их восемью аргументами, мы заменим это выражение простыми скобками  $(\Phi, \Psi)$ .

Образует теперь следующие уравнения:

$$\Phi_i = 0 \quad (5 \text{ уравнений}), \quad (21)$$

$$(\Phi_i, \Phi_k) = 0 \quad (25 \text{ уравнений}), \quad (22)$$

$$(\Phi_i, \Phi_k) = 0 \quad (25 \text{ уравнений}). \quad (23)$$

Посредством последовательного применения правил, поясненных выше, уравнения (21) — (23), очевидно, преобразуются желаемым способом.

Окончательные уравнения содержат только следующие величины:

1) пять средних значений  $\bar{\Phi}_i$  и их производные по времени и координатам;

2) 25 моментов связи  $(\Phi_i, \Phi_k)$  и их производные, во-первых, по времени и координатам, во-вторых, по приращениям  $\tau, \xi, \eta, \zeta$ ;

3) особые значения, которые принимают упомянутые в 2) функции и их производные при  $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$ .

Заданные в 1) и 2) функции должны еще удовлетворять следующим дополнительным условиям:

а) пять величин  $\bar{\Phi}_i$  зависят только от времени и координат и, напротив, не зависят от приращений, что и дает  $5 \cdot 4 = 20$  уравнений вида

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \sigma} = 0; \quad (24)$$

б)  $(\Phi_i, \Phi_k)$  подчиняются условиям (11), что доставляет 25 конечных соотношений между 50 функциями  $R_{\Phi_i, \Phi_k}(\tau, \xi, \eta, \zeta; t, x, y, z)$  и  $R_{\Phi_i, \Phi_k}(-\tau, -\xi, -\eta, -\zeta; t, x, y, z)$ . Запишем эти соотношения сокращенно следующим образом:

$$(\Phi_k, \Phi_i) = (\Phi_i, \Phi_k) \quad (25)$$

### Преобразование и обсуждение полученных уравнений

Чтобы выяснить связь между уравнениями (24)—(25), напомним сначала гидродинамические уравнения (19) в форме (20), после этого уравнения (21)—(23) примут вид

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t} = \bar{F}_i, \quad (26)$$

$$\left( \varphi_i, \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \right) = (\varphi_i, F_k), \quad (22a)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \varphi_k \right) = (F_i, \varphi_k). \quad (23a)$$

Обе скобки в левых частях могут быть развернуты при помощи дифференциальной формулы (14), и тогда сложением и вычитанием получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_i, \varphi_k) = (\varphi_i, F_k) + (F_i, \varphi_k), \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\varphi_i, \varphi_k) = (\varphi_i, F_k) - (F_i, \varphi_k). \quad (28)$$

Так как выражения  $F_i$  и другие не содержат никаких производных по  $t$ , то на основании обобщенных дифференциальных формул (18) следует, что выражения, стоящие в правых частях (27) и (28), не могут содержать производных по  $t$  и по  $\tau$ , а только по  $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ . Система (27) является, таким образом, результатом исключения всех производных по  $\tau$  из уравнений (22)—(23), система (28) получается исключением производных по  $t$ .

Из этого мы заключаем, что начальные значения моментов связи  $(\varphi_i, \varphi_k)$ , соответствующие моменту времени  $t = 0$ , ни в коем случае нельзя рассматривать как произвольные функции переменных  $x, y, z, \tau, \xi, \eta, \zeta$ , так как эти значения должны обязательно удовлетворять также уравнениям (28).

Система уравнений (26), (27), (28) эквивалентна системе (21)—(23). Итак, для определения искомых функций можно исходить из уравнений (26)—(28) и дополнительных условий (24)—(25).

В дальнейшем окажется, что достаточно ввести уравнения (24)—(25) как условия, наложенные только на начальные значения неизвестных функций.

Пусть теперь даны значения  $\bar{\varphi}_i$  в начальный момент  $t = 0$  (или, вообще говоря, в любой момент времени) как функции  $x, y, z$  и пусть даны  $(\varphi_i, \varphi_k)$  для того же самого момента времени, а именно для определенного значения  $\tau$  (например,  $\tau = 0$ ) как функции  $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ . Для этих началь-

ных значений выполнены условия (24). Кроме того, они должны также удовлетворять условиям (25).

При этих предположениях система 25 уравнений (28) представляет собой нормальную систему, для которой решается проблема Коши. Это значит, что с помощью этих уравнений можно найти 25 неизвестных функций  $(\varphi_i, \varphi_k)$  как функции семи аргументов  $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$  и  $t$ . Назовем такое определение функции операцией  $A$ .

С другой стороны (исходя из тех же самых начальных значений), с помощью 25 уравнений системы (27) и 5 уравнений (26) представим 30 неизвестных величин  $(\varphi_i, \varphi_k)$ ,  $\bar{\varphi}_i$  как функции семи аргументов  $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$  и  $t$ , что мы обозначим как операцией  $B^*$ .

На основании предыдущего рассуждения можно выдвинуть утверждение: если вообще существует система искомых 30 функций восьми аргументов  $t, x, y, z, \tau, \xi, \eta, \zeta$ , которая удовлетворяет уравнениям (24)–(28) и при  $t = 0, \tau = 0$  принимает заданные начальные значения, то она однозначно будет получаться последовательным применением операций  $A$  и  $B$  (в любой последовательности)\*\*.

Если мы далее не интересуемся определением характеристик турбулентности самих по себе и говорим о них в первую очередь только для того, чтобы найти величины  $(\bar{\varphi}_i)$ , то от операции  $A$  можно отказаться совсем. С этой точки зрения мы и ограничимся определением моментов связи для специального значения  $\tau = 0$  (при произвольно изменяющихся  $\xi, \eta, \zeta$ ). Мы получим полную систему характеристик, которые кроме ко-

\* От нормальной системы дифференциальных уравнений в обычном смысле слова система 30 уравнений (26) — (27) отличается тем, что в правые части входят значения неизвестных функций и их производных по  $\xi, \eta, \zeta$  как при общей системе значений  $\xi, \eta, \zeta$ , так и при специальной системе значений  $\xi = \eta = \zeta = 0$ . Это обстоятельство, однако, не имеет существенного значения при постановке и решении проблем, аналогичных задаче Коши.

\*\* Этим ни в коем случае не утверждается, что начальные значения 25 моментов связи действительно могут считаться произвольными независимыми друг от друга функциями. Противоположное утверждение может быть доказано следующим образом. Если существует система этих величин, являющихся функциями 8 аргументов  $s$  и  $\sigma$ , удовлетворяющих уравнениям (27) и (28), то должны иметь место следующие 25 уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(\varphi_i, F_k) + (F_i, \varphi_k)] = \frac{\partial}{\partial t} [(\varphi_i, F_k) - (F_i, \varphi_k)].$$

Если развернуть эти выражения и все встречающиеся производные по  $t$  и  $\tau$  заменить их выражениями из уравнений (26) — (28), то получим систему уравнений второго порядка, которые содержат только производные по 6 аргументам —  $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ . Каждое такое уравнение дает, очевидно, одно условие, наложенное на начальные значения (при  $t = 0, \tau = 0$ ).

Только, если действительно выполнены так поставленные условия, применение операций  $AB$  и  $BA$  дает один и тот же результат во всей области значений восьми аргументов.

ординат и времени зависят еще только от трех аргументов  $\xi, \eta, \zeta$ . Заметим еще, что, принимая во внимание соотношения (25), эта система сводится к 15 существенно различным функциям.

Мы должны еще доказать, что если для начальных значений ( $t = \tau = 0$ ) выполняются условия (24) и (25), то эти начальные условия остаются справедливыми для области, расширенной с помощью операции  $A$  или соответственно операции  $B$ .

Для уравнений (24) имеют место следующие соображения. С одной стороны, вспомним замечание, что  $\varphi_i$  при операции  $A$  вообще остаются неизменными. С другой стороны, выражения  $\bar{F}_i$ , которые стоят в правых частях уравнений (26), не зависят от аргументов  $\sigma$ . Отсюда следует справедливость нашего утверждения относительно операции  $B$ .

Докажем соответствующее утверждение для соотношений (25). Для этого достаточно показать, что поскольку эти соотношения выполняются одновременно с уравнениями (24) в области, ограниченной определенной парой значений ( $t, \tau$ ), то в этой области существуют уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(\varphi_i, \varphi_k) - (\varphi_k, \varphi_i)] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} [(\varphi_i, \varphi_k) - (\varphi_k, \varphi_i)] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

благодаря которым гарантируется распространение соотношений (25) на названную область.

К этим уравнениям мы придем следующим образом.

Прежде всего продифференцируем уравнения (25):

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial s} (\varphi, \psi) \right)_- &= \frac{\partial}{\partial s} (\varphi, \psi)_- = \frac{\partial}{\partial s} (\psi, \varphi), \\ \left( \frac{\partial}{\partial \sigma} (\varphi, \psi) \right)_- &= - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\varphi, \psi)_- = - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\psi, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Здесь  $s$  означает одну из трех переменных  $x, y, z$  и  $\sigma$  — одну из трех переменных  $\xi, \eta, \zeta$ .

С помощью этих уравнений из формул (18) следует

$$\left. \begin{aligned} \left( \varphi, f \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_- &= \left( f \frac{\partial \psi}{\partial s}, \varphi \right), \\ \left( f \frac{\partial \psi}{\partial s}, \varphi \right)_- &= \left( \varphi, f \frac{\partial \psi}{\partial s} \right). \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Вводя снова функции  $F_i$ , получаем далее

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_i, F_k)_- &= (F_k, \varphi_i), \\ (F_i, \varphi_k)_- &= (\varphi_k, F_i). \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

С помощью этих формул из уравнений (27) и (28) получаются приведенные соотношения (f).

### Упрощение изложенного метода

Вышеприведенные формулы, которые составляют полную систему уравнений для определения характеристик турбулентности, еще довольно сложны, с одной стороны, вследствие большого числа неизвестных функций, а с другой,— из-за двойного числа независимых переменных.

Некоторое упрощение в этих рассуждениях можно сделать благодаря введению момента связи для бесконечно близких точек четырехмерного мира:

$$R_s(\varphi, \psi) = \left( \frac{\partial R_{\varphi, \psi}}{\partial s} \right)_0. \quad (29)$$

Из полученных ранее формул следует

$$\begin{aligned} R_s(\psi, \varphi) &= -R_s(\varphi, \psi), \\ R_s(\varphi, \varphi) &= 0, \\ R_s(\varphi, \psi_1 + \psi_2) &= R_s(\varphi, \psi_1) + R_s(\varphi, \psi_2), \\ \overline{\varphi \frac{\partial \psi}{\partial s}} &= \overline{\varphi} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial R(\varphi, \psi)}{\partial s} + \frac{1}{2} R_s(\varphi, \psi), \\ R\left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial s}\right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial R(\varphi, \psi)}{\partial s} + \frac{1}{2} R_s(\varphi, \psi), \\ R\left(\varphi, f \frac{\partial \psi}{\partial s}\right) &= \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} R(\varphi, f) + \frac{1}{2} \overline{f} \frac{\partial R(\varphi, \psi)}{\partial s} + \frac{1}{2} \overline{f} R_s(\varphi, \psi). \end{aligned} \quad (30)$$

Если рассматривать ради простоты линейное адиабатическое движение идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил, то имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\omega \frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \omega \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\kappa p \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (31)$$

Применим теперь к этим трем уравнениям операции построения среднего значения и образования моментов корреляции.

В окончательных уравнениях появляются, вообще говоря, характеристики  $R_t$  и  $R_x$ .

Если известно начальное состояние турбулентного движения, то можно непосредственно определить  $R_x$ , но не  $R_t$ . Поэтому желательно так преобразовать уравнения (31), чтобы величины  $R_t$  не встречались в них. Имея в виду это замечание, мы получим из системы (31) с помощью

формул (30) систему девяти уравнений для производных  $\frac{\delta \bar{u}}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta \bar{\omega}}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta p}{\delta t}$ ,  
 $\frac{\delta R(u, u)}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta R(\omega, u)}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta R(p, u)}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta R(\omega, \omega)}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta R(\omega, p)}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta R(p, p)}{\delta t}$  (32)

(где для сокращения  $\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}$ ). Эти уравнения, кроме величин  $\bar{u}$ ,  $\bar{\omega}$ , ...  $R(p, p)$ , содержат еще три переменные  $R_x(\omega, u)$ ,  $R_x(p, u)$ ,  $R_x(\omega, p)$ .

Итак, имеем 9 уравнений для 12 неизвестных, и поэтому таким способом не получаем полной системы. Однако по сравнению с результатами простого метода построения среднего значения (т. е. метода Рейнольдса) число функций, остающихся неопределенными, значительно понижено.

Из названной системы уравнений (32) можно получить полную нормальную систему, если произвольно распорядиться тремя функциями:  $R_x(\omega, u)$ ,  $R_x(p, u)$ ,  $R_x(\omega, p)$ . Тогда интегрированием найдем как частное решение следующий случай турбулентного движения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= b, \quad \bar{p} = \frac{b^2}{2} + \frac{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}{2} + c, \quad \bar{\omega} = 1; \\ R(u, u) &= \alpha t^2 + \beta t + \gamma, \quad R(\omega, \omega) = \psi(x - bt); \\ R(p, p) &= \alpha x^2 - (2\alpha\beta t + 2a - b\beta)x + \alpha b^2 t^2 + (2ab - b^2\beta)t + C; \\ R(p, u) &= -\left(\alpha t + \frac{\beta}{2}\right)x + \alpha b t^2 + at; \quad R_x(p, u) = \alpha t + \frac{\beta}{2}; \\ R(\omega, p) &= R(\omega, u) = R_x(\omega, p) = R_x(\omega, u) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где  $C$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — произвольные константы;  $\psi$  — произвольная функция своего аргумента.

В осредненном движении жидкость в данном случае ведет себя как несжимаемая, с плотностью, равной единице. Среднее движение представляется при этом как равномерный перенос жидкости, или как перемещение твердого тела.

Как отмечено, полученные уравнения не образуют для характеристик  $R_x$  полной системы. Недостающие соотношения между характеристиками турбулентности должны определяться экспериментально.

## О ДВИЖЕНИИ АБСОЛЮТНО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ <sup>6</sup>

### § 1

1. Уравнения движения жидкости в форме Лагранжа (вообще говоря, более сложные, чем в форме Эйлера) при решении частных задач в некоторых случаях оказываются более удобными. Их преимущества обнаруживаются, в частности, при изучении движения жидкости, частицы которой обладают некоторыми особыми свойствами, например, когда частицы движутся без ускорения (случай, часто исследуемый в динамической метеорологии) или когда не изменяется энтропия каждой частицы, или плотность частиц (случай, который встречается в исследованиях Ляпунова о фигурах равновесия вращающейся жидкости) и т. д.

С помощью переменных Лагранжа легко записать уравнения Гельмгольца, которые вместе с уравнениями несжимаемости составляют условия динамической возможности движения абсолютно несжимаемой жидкости.

Условия динамической возможности движения абсолютно сжимаемой жидкости в форме Эйлера, полученные А. Фридманом, оказались очень полезными при решении различных задач гидродинамики абсолютно сжимаемой жидкости. Поэтому в настоящей работе мы устанавливаем эти условия и в форме Лагранжа; в то же время мы показываем, как можно приложить эти условия к решению частных задач гидродинамики абсолютно сжимаемой жидкости, задач, для которых форма Лагранжа представляет особые преимущества.

2. Пусть  $a, b, c$  и  $x, y, z$  — три координаты частицы соответственно в начальный момент времени и в момент  $t$ ;  $x, y, z$  представляют собой, очевидно, функции  $a, b, c$  и  $t$ , которые мы и хотим отыскать. Обозначим частные производные функции  $f(a, b, c, t)$  по переменной  $a$  символом  $f_a$ , а именно:  $\partial f / \partial a = f_a$ , производную  $f$  по  $t$  обозначим через  $f_t = \partial f / \partial t$  и условимся, кроме того, обозначать величину  $\partial^2 f / \partial t^2$  через  $f_{tt}$ .

При этих обозначениях уравнения гидродинамики (три уравнения гидромеханики и уравнение неразрывности) выражаются в переменных Лагранжа следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_t x_a + \dot{y}_t y_a + \dot{z}_t z_a &= -\omega p_a + F_x x_a + F_y y_a + F_z z_a, \\ \dot{x}_t x_b + \dot{y}_t y_b + \dot{z}_t z_b &= -\omega p_b + F_x x_b + F_y y_b + F_z z_b, \\ \dot{x}_t x_c + \dot{y}_t y_c + \dot{z}_t z_c &= -\omega p_c + F_x x_c + F_y y_c + F_z z_c, \\ \omega &= \omega_0 D, \end{aligned} \tag{1}$$



где  $\omega$  и  $p$  обозначают удельный объем и давление в момент  $t$ ;  $F_x, F_y, F_z$  — проекции силы  $\mathbf{F}$  на оси координат;  $\omega_0$  (зависящее только от  $a, b, c$ ) — удельный объем в начальный момент и

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}$$

представляет якобиан функций  $x, y, z$  по переменным  $a, b, c$ .

Задача гидродинамики состоит в том, чтобы из уравнений (1) найти  $x, y, z, p$  и  $\omega$  как функции переменных  $a, b, c$  и времени  $t$ ; при этом  $F_x, F_y, F_z$  рассматриваются как заданные функции переменных  $x, y, z$  и их производных по времени и по переменным  $a, b, c$ .

Система уравнений (1), очевидно, будет эквивалентна следующей системе уравнений, содержащих неизвестные функции  $x, y, z, p$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \text{grad } p &= e^{-\varphi} \Gamma, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где составляющие  $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$  вектора  $\Gamma$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} D\Gamma_a &= (F_x - \dot{x}_t) x_a + (F_y - \dot{y}_t) y_a + (F_z - \dot{z}_t) z_a, \\ D\Gamma_b &= (F_x - \dot{x}_t) x_b + (F_y - \dot{y}_t) y_b + (F_z - \dot{z}_t) z_b, \\ D\Gamma_c &= (F_x - \dot{x}_t) x_c + (F_y - \dot{y}_t) y_c + (F_z - \dot{z}_t) z_c, \end{aligned} \quad (3)$$

а  $\text{grad } p$  означает вектор с компонентами  $p_a, p_b, p_c$ .

Что касается удельного объема  $\omega$ , то он определяется соотношением

$$\omega = De^{\varphi}. \quad (4)$$

Определим условия, которым должны удовлетворять функции  $x, y, z$ , для того чтобы можно было найти функции  $p$  и  $\varphi$ , удовлетворяющие уравнениям (2). Эти условия полностью аналогичны условиям динамической возможности движения абсолютно сжимаемой жидкости; они будут представлять собой соответствующее обобщение уравнений Гельмгольца.

3. Применяя к обеим частям первого уравнения (2) операцию  $\text{rot}$ , получим следующий вывод: для того чтобы определить  $p$  и  $\varphi$ , удовлетворяющие системе (2), необходимо, чтобы выполнялись уравнения

$$[\Gamma, \text{grad } \varphi] = \mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

В этих уравнениях  $\mathbf{H} = \text{rot } \Gamma$ , так что

$$\text{rot}_x \Gamma = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial b} - \frac{\partial \Gamma_b}{\partial c}$$

и т. д.

Если  $\varphi$  удовлетворяет требованиям (5), то  $p$  получается из соотношения

$$p = p_0(t) + \int e^{-\varphi} \{ \Gamma_a da + \Gamma_b db + \Gamma_c dc \}, \quad (6)$$

где  $p_0(t)$  — произвольная функция своего аргумента. Таким образом, мы удовлетворим системе уравнений (2), иначе говоря, системе уравнений гидродинамики.

Система (5) возможна, если выполняется условие

$$(\Gamma, \mathbf{H}) = 0. \quad (a)$$

Для того чтобы установить другие условия динамической возможности движения жидкости, нужно рассмотреть три случая

$$1) \left[ \Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] \neq 0, \quad 2) \left[ \tilde{\Gamma}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] = 0, \quad \Gamma \neq 0, \quad 3) \Gamma = 0.$$

В первом случае разрешим первое уравнение (5) относительно  $\text{grad } \varphi$ ; обозначая через  $n$  не определенную пока что функцию переменных  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $t$ , запишем систему уравнений (5) следующим образом:

$$\text{grad } \varphi = \frac{[\mathbf{H}, \Gamma]}{(\Gamma, \Gamma)} + n\Gamma, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение (7) по  $t$  и принимая во внимание второе уравнение (7), получим новое соотношение, умножая которое векторно на  $\Gamma$  найдем равенство

$$\mathbf{k} + n [\Gamma, \partial \Gamma / \partial t] = 0, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{(\mathbf{H}, \partial \Gamma / \partial t)}{(\Gamma, \Gamma)} \Gamma - \frac{(\Gamma, \partial \Gamma / \partial t)}{(\Gamma, \Gamma)} \mathbf{H}. \quad (9)$$

Равенство (8), которое определяет  $n$ , показывает, что векторы  $\mathbf{k}$  и  $[\Gamma, \partial \Gamma / \partial t]$  параллельны, т. е.

$$\left[ \mathbf{k}, \left[ \Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] \right] = 0. \quad (a)$$

После незначительных упрощений, принимая во внимание (а), приходим к соотношению, которое представляет одно из условий динамической возможности движения:

$$\left( \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = 0. \quad (\text{b})$$

Если имеют место равенства (а) и (b), то можно определить скалярную величину  $\lambda$  такую, что  $n = \lambda$  удовлетворяет (8), а первое уравнение (7) позволяет определить  $\varphi$  при условии, что выполняется равенство

$$\text{rot} \left( \frac{[\mathbf{H}, \Gamma]}{(\Gamma, \Gamma)} + \lambda \Gamma \right) = 0, \quad (\text{c})$$

которое и будет третьим условием динамической возможности движения.

Обозначая через  $\mathbf{L}$  вектор

$$\mathbf{L} = \frac{[\mathbf{H}, \Gamma]}{(\Gamma, \Gamma)} + \lambda \Gamma,$$

будем иметь следующие равенства для определения  $\varphi$  и  $\omega$ :

$$\varphi = \ln C + \int (L_a da + L_b db + L_c dc), \quad (\text{10})$$

$$\omega = C e^{\int (L_a da + L_b db + L_c dc)},$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Таким образом, в рассматриваемом случае условия (а), (b), (c) будут условиями динамической возможности движения жидкости, и когда они выполняются, давление и удельный объем определяются с помощью формул (6) и (10).

4. Исследуем теперь второй случай, когда

$$\left[ \Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] = 0, \quad (\text{d})$$

а  $\Gamma$  отлично от нуля. В этом случае также будут иметь место и условие (а) и равенство (8). Так как  $\Gamma$  и  $\partial \Gamma / \partial t$  параллельны и  $\Gamma$  отлично от нуля, то существует величина  $s$ , удовлетворяющая равенству

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = s \Gamma. \quad (\text{11})$$

Принимая во внимание (11), видим, что равенство (8) в рассматриваемом случае превратится в

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = s \mathbf{H}. \quad (\text{e})$$

Так как  $\Gamma$  отлично от нуля, то по крайней мере одна компонента вектора  $\Gamma$  — не нуль; не умаляя общности рассуждений, можно положить, что  $\Gamma_c \neq 0$ , и тогда система уравнений (5) (из которой определяется  $\varphi$ ) может быть записана так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\Gamma_a}{\Gamma_c} \frac{\partial \varphi}{\partial c} - \frac{H_b}{\Gamma_c} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{\Gamma_b}{\Gamma_c} \frac{\partial \varphi}{\partial c} + \frac{H_a}{\Gamma_c} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Легко проверить, что при выполнении условий (а), (d) и (е) система (12) будет системой нормальных уравнений первого порядка в частных производных. Таким образом, во втором случае условиями динамической возможности движения будут соотношения (а), (d) и (е). Удельный объем будет определяться равенством

$$\omega = De^\varphi, \quad (13)$$

где  $\varphi$  будет получено интегрированием нормальной системы (12); как и раньше, давление определяется формулой (6).

Переходим, наконец, к последнему случаю, когда

$$\Gamma = 0. \quad (f)$$

В рассматриваемом случае это равенство является единственным условием динамической возможности движения. Удельный объем и давление в этом случае будут определяться формулами

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0(a, b, c)D, \\ p &= p_0(t), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\omega_0$  и  $p_0$  — произвольные функции своих аргументов.

## § 2

1. В качестве примера применения общих методов, изложенных в предыдущем параграфе, изучим движение, при котором ускорение каждой частицы жидкости равно нулю (инерциальное движение). В динамической метеорологии очень часто рассматривается такое движение, тем не менее еще не установлено, возможно ли такое движение, и если оно возможно, то какие ограничения оно налагает на распределение давления и плотности в атмосфере. Как мы увидим в дальнейшем, частный случай такого движения действительно возможен, но при очень жестких ограничениях, состоящих в том, что изобарами должны быть прямые.

Поместим начало координат на поверхности Земли и направим ось  $OZ$  вертикально вверх, ось  $OX$  вдоль параллелей на восток и ось  $OY$  вдоль

меридианов на север. Предположим, что на частицу воздуха действуют две силы: сила тяжести и сила отклонения, возникающая вследствие вращения Земли (сила Кориолиса). Сила тяжести имеет направление, обратное положительному направлению оси  $Z$ ; обозначим через  $g$  ускорение силы тяжести. Для того чтобы определить силу Кориолиса, заметим, что в рассматриваемой системе координат  $\lambda$ -вектор вращения Земли будет направлен по оси вращения Земли с юга на север. Проекции  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  этого вектора на оси координат будут

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda \cos \varphi, \quad \lambda_3 = \lambda \sin \varphi,$$

где  $\lambda = 0,73 \cdot 10^{-4}$  — угловая скорость вращения Земли.

Инерциальное движение в общем случае, очевидно, определяется уравнениями

$$x = a + f_1(a, b, c)t, \quad y = b + f_2(a, b, c)t, \quad z = c + f_3(a, b, c)t,$$

где  $f_1, f_2, f_3$  — функции, которые нужно определить (так же как и давление и удельный объем) с помощью условий динамической возможности движения, которые мы только что установили.

Однако в настоящей работе мы не будем изучать общий вид инерциального движения, а ограничимся случаем, когда частицы движутся в горизонтальных плоскостях и скорость этого движения не зависит от высоты. Имеем для определения движения в этом частном случае формулы

$$x = a + f_1(a, b)t, \quad y = b + f_2(a, b)t, \quad z = c. \quad (15)$$

Составляя выражение  $D$ , а также записывая компоненты вектора  $\Gamma$  (с помощью формул (3)) и  $H = \text{rot } \Gamma$ , найдем

$$D = At^2 + Bt + 1,$$

$$\Gamma_a = 2\lambda_3 \frac{k_1 t + l_1}{D}, \quad \Gamma_b = 2\lambda_3 \frac{k_2 t + l_2}{D}, \quad \Gamma_c = \frac{l_3}{D},$$

$$H_a = \frac{p_1 t^2 + q_1 t + r_1}{D^2}, \quad H_b = \frac{p_2 t^2 + q_2 t + r_2}{D^2}, \quad H_c = 2\lambda_3 \frac{Pt^3 + P_3 t^2 + q_3 t + r_3}{D^2}, \quad (16)$$

где для сокращения положено

$$A = \frac{\partial f_1}{\partial a} \frac{\partial f_2}{\partial b} - \frac{\partial f_1}{\partial b} \frac{\partial f_2}{\partial a} = \frac{D(f_1, f_2)}{D(a, b)}, \quad B = \frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial b},$$

$$k_1 = f_2 \frac{\partial f_1}{\partial a} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial a}, \quad k_2 = f_2 \frac{\partial f_1}{\partial b} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial b},$$

$$l_1 = f_2, \quad l_2 = -f_1, \quad l_3 = -g + 2\lambda_2 f_1,$$

(17)

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial A}{\partial b} l_3 - A \frac{\partial l_3}{\partial b}, & q_1 &= \frac{\partial B}{\partial b} l_3 - B \frac{\partial l_3}{\partial b}, & r_1 &= -\frac{\partial l_3}{\partial b}, \\
p_2 &= A \frac{\partial l_3}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial a} l_3, & q_2 &= B \frac{\partial l_3}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a} l_3, & r_2 &= \frac{\partial l_3}{\partial a}, \\
q_3 &= \frac{\partial k_1}{\partial b} - \frac{\partial k_2}{\partial a} + \left( \frac{\partial l_1}{\partial b} B - \frac{\partial B}{\partial b} l_1 \right) - \left( \frac{\partial l_2}{\partial a} B - \frac{\partial B}{\partial a} l_2 \right), \\
p_3 &= \left( \frac{\partial l_1}{\partial b} A - \frac{\partial A}{\partial b} l_1 \right) + B \left( \frac{\partial k_1}{\partial b} - \frac{\partial k_2}{\partial a} \right) + k_2 \frac{\partial B}{\partial a} - k_1 \frac{\partial B}{\partial b} + \left( \frac{\partial l_2}{\partial a} A - \frac{\partial A}{\partial a} l_2 \right), \\
r_3 &= \frac{\partial l_1}{\partial b} - \frac{\partial l_2}{\partial a}, \\
P &= \left( \frac{\partial k_1}{\partial b} A - k_1 \frac{\partial A}{\partial b} \right) - \left( \frac{\partial k_2}{\partial a} A - k_2 \frac{\partial A}{\partial a} \right).
\end{aligned}$$

2. Используя первое условие динамической возможности движения, т. е. равенство (а), мы должны будем приравнять нулю коэффициенты при различных степенях  $t$  в левой части равенства. Приравнявая нулю коэффициент при  $t^3$ , придем к равенству

$$A^2 (\lambda_2 f_1 - g) = 0. \quad (18)$$

Будем различать два случая в зависимости от того, постоянная или нет  $f_1$ .

В первом случае, когда  $f_1$  — постоянная, можно положить без ограничения общности  $f_1 = 0$  для рассматриваемого движения в подходящим образом выбранной системе координат, движущейся прямолинейно и равномерно. Условие (а) показывает, что в этом случае  $f_2$  не зависит от  $b$ :

$$f_1 = 0, \quad f_2 = \psi(a). \quad (19)$$

В этом случае  $A$  и  $B$  равны нулю, это значит, что  $D$  равно единице и плотность частицы не изменяется со временем (движение несжимаемой жидкости). Вектор  $\Gamma$  не зависит от времени  $t$ , производная  $\partial \Gamma / \partial t$  равна нулю, а сам вектор  $\Gamma$  отличен от нуля; иначе говоря, мы имеем здесь второй из исследованных выше случаев.

В рассматриваемом случае  $H$  равно нулю и выполняются условия (а), (д) и (е) § 1. Определяя удельный объем и давление, мы приходим к следующему возможному инерциальному движению:

$$x = a, \quad y = b + \psi(a)t, \quad z = c,$$

$$\omega = \Phi \left( c - \frac{2\lambda_3}{g} \int \psi da \right),$$

$$\begin{aligned}
p &= p_0(t) - g \int_{\sigma_0}^{2\lambda_2/g} \psi da \\
&\quad \int \frac{d\sigma}{\Phi(\sigma)}, \quad (20)
\end{aligned}$$

где  $\Phi$  и  $p_0$  — произвольные функции своих аргументов, а  $\sigma_0$  — постоянная.

Обозначая через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  компоненты скорости, запишем формулы (20) в форме Эйлера следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= \psi(x), & w &= 0, \\ \omega &= \Phi\left(z - \frac{2\lambda_2}{g} \int \psi dx\right), \\ p &= p_0(t) - g \int_{\sigma_0}^{z - \frac{2\lambda_2}{g} \int \psi dx} \psi dx \frac{d\sigma}{\Phi(\sigma)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\sigma_0$  — постоянная.

Отсюда следует, что линии тока и изобары (сечения в данный момент изобарических поверхностей горизонтальной плоскостью) в рассматриваемом случае будут прямыми, параллельными меридианам. Что касается плотности, то она изменяется с высотой, и, выбирая подходящим образом функцию  $\Phi$ , можно сделать это изменение равным тому, которое имеет место в атмосфере. Итак, рассматриваемый случай соответствует действительным условиям атмосферы, но встречается сравнительно редко. Легко видеть, что движение в рассматриваемом случае будет баротропным.

3. Переходим теперь к исследованию второго случая, когда  $f_1$  — непостоянна, когда, следовательно,  $\lambda_2 f_1 - g$  не равно нулю и когда уравнение (18) приводит к  $A = 0$ . В этом случае

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(a, b)}$$

не равно нулю и, следовательно,

$$|f_2 = \Phi(f_1). \quad (22)$$

Равенства (a) и (b) предыдущего параграфа переписутся следующим образом:

$$2\lambda_2 \left( f_2 \frac{\partial f_1}{\partial b} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial b} \right) + g \left( \frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial b} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial a} \frac{\partial B}{\partial b} - \frac{\partial f_1}{\partial b} \frac{\partial B}{\partial a} \right) (\Phi - f_1 \Phi') = 0. \quad (24)$$

Выражение для  $B$  превратится в

$$B = \frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial b} = \frac{\partial f_1}{\partial a} + \Phi' \frac{\partial f_1}{\partial b}. \quad (25)$$

Покажем, что равенства (23), (24) и (25) следуют из соотношения

$$\Phi - f_1 \Phi' = 0. \quad (26)$$

Предположим, что это отношение не имеет места; тогда равенство (24) приводит к

$$B = \vartheta(f_1),$$

где  $\vartheta$  — некоторая функция своего аргумента.

Разрешая уравнения (23) и (25) относительно  $\partial f_1 / \partial a$  и  $\partial f_1 / \partial b$ , получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = \vartheta(f_1) \mu(f_1), \quad \frac{\partial f_1}{\partial b} = \vartheta(f_1) \nu(f_1), \quad (27)$$

где

$$\mu(f_1) = 1 + \frac{g\Phi'}{2\lambda_2(\Phi - f_1\Phi')}, \quad \nu(f_1) = -\frac{g}{2\lambda_2(\Phi - f_1\Phi')}.$$

Так как  $f_1$  — переменная, то из уравнения (27) получаем, что  $\vartheta(f_1)$  не равна нулю и равенства (27) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = \mu(f_1), \quad \frac{\partial \theta}{\partial b} = \nu(f_1),$$

где

$$\theta = \int \frac{df_1}{\vartheta(f_1)}.$$

Дифференцируя первое из полученных выражений по  $b$ , а второе по  $a$  и вычитая один результат дифференцирования из другого, получим

$$\mu(f_1) = N\nu(f_1),$$

где  $N$  — постоянная. Подставляя в полученное соотношение значения  $\mu$  и  $\nu$ , находим

$$\left(\frac{g}{2\lambda_2} - f_1\right)\Phi' + \Phi + \frac{g}{2\lambda_2}N = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим следующее выражение для  $\Phi$ :

$$\Phi = \alpha + \beta f_1,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные. Выбирая соответствующим образом систему координат, движущуюся равномерно и прямолинейно, можно без ограничения общности положить  $\alpha = 0$ . Итак, будем иметь  $\Phi = \beta f_1$ ;  $\Phi - f_1\Phi' = 0$ , что противоречит предположению. Следовательно, такое предположение недопустимо и условие (26) всегда имеет место.

4. С помощью (26) будем иметь

$$\Phi = hf_1, \quad (28)$$



где  $h$  — произвольная постоянная; равенство (23) переписывается в этом случае следующим образом:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} + h \frac{\partial f_1}{\partial b} = 0. \quad (29)$$

Предположим, что  $h$  отлично от нуля.

Интегрируя уравнение (29), получим

$$f_1 = \psi \left( a - \frac{b}{h} \right), \quad f_2 = h f_1 = h \psi \left( a - \frac{b}{h} \right),$$

где  $\psi$  — произвольная функция своего аргумента.

Образуя вектор  $\Gamma$ , мы найдем, что он отличен от нуля и не зависит от  $t$ , т. е.  $\partial \Gamma / \partial t = 0$ . Это равенство приводит к выводу, что  $\partial \mathbf{H} / \partial t = 0$ . Все условия (а), (d) и (е) второго случая § 1 выполняются, и, следовательно, рассматриваемое движение возможно. Легко видеть, что для этого движения  $D = 1$ , и, следовательно, — это случай движения несжимаемой жидкости.

Определяя для рассматриваемого движения удельный объем и давление, получим формулы

$$\begin{aligned} x &= a + \psi \left( a - \frac{b}{h} \right) t, & y &= b + h \psi \left( a - \frac{b}{h} \right) t, & z &= c, \\ \omega &= (2\lambda_2 \psi - g) \Omega(\sigma), \end{aligned} \quad (30)$$

$$p = p_0(t) + \Pi(\sigma),$$

$$\Pi(\sigma) = \int \frac{d\sigma}{\Omega(\sigma)}, \quad \sigma = c - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{2\lambda_3 h \psi}{g - 2\lambda_2 \psi} d\alpha, \quad \alpha = a - \frac{b}{h},$$

где  $\psi$ ,  $p_0$  и  $\Omega$  — произвольные функции своих аргументов;  $h$  — произвольная постоянная, отличная от нуля;  $\alpha_0$  — постоянная.

Переходя к эйлеровой форме уравнений для этого движения, получим формулы

$$\begin{aligned} u &= \psi \left( x - \frac{y}{h} \right), & v &= h \psi \left( x - \frac{y}{h} \right), & w &= 0, \\ \omega &= (2\lambda_2 \psi - g) \Omega(\sigma), \end{aligned} \quad (31)$$

$$p = p_0(t) + \Pi(\sigma),$$

$$\Pi(\sigma) = \int \frac{d\sigma}{\Omega(\sigma)}, \quad \sigma = z - \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{2\lambda_3 h \psi}{g - 2\lambda_2 \psi} d\beta, \quad \beta = x - \frac{y}{h}.$$

Это движение характеризуется следующими особенностями: линии тока в нем представляют семейство параллельных прямых

$$x - \frac{y}{h} = c,$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Здесь плотность изменяется с высотой и изобары, как само собой разумеется, параллельны линиям тока.

В случае, когда  $h$  обращается в нуль, движение будет определяться равенствами

$$\begin{aligned} x &= a + \psi(b)t, & y &= b, & z &= c, \\ \omega &= (2\lambda_2\psi - g)\Omega(\sigma), & p &= p_0(t) + \Pi(\sigma), \\ \sigma &= c - \int \frac{2\lambda_2\psi}{2\lambda_2\psi - g_2} db, & \Pi(\sigma) &= \int \frac{d\sigma}{\Omega(\sigma)}, \end{aligned}$$

где  $\psi$ ,  $p_0$  и  $\Omega$  — произвольные функции своих аргументов. Эти равенства, преобразованные к форме Эйлера, определяют следующее движение:

$$\begin{aligned} u &= \psi(y), & v &= 0, & w &= 0, \\ w &= (2\lambda_2\psi - g)\Omega(\sigma), & p &= p_0(t) + \Pi(\sigma), \end{aligned}$$

где

$$\sigma = z - \int \frac{2\lambda_2\psi}{2\lambda_2\psi - g} dy,$$

а другие обозначения имеют прежние значения.

Январь 1924 г.

## О ПРИБЛИЖЕННЫХ УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ<sup>7</sup>

1. Механика изучает связи между силами и вызываемыми этими силами движениями и делится на математическую и опытную механику. В математической механике устанавливаются понятия о массе  $m$  материальной точки (если ограничиться для простоты рассмотрением материальной точки), скорости точки  $V$ , ее ускорении  $W = dV/dt$ , ее количестве движения  $B = mV$  и, наконец, о приложенной к точке силе  $F$ , которая задается как вектор, приложенный к рассматриваемой точке и зависящий от времени, положения точки и ее скорости. Принимают, что на точку действуют несколько сил:  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , которые перечисляются и называются данными; равнодействующая этих сил  $F = F_1 + F_2 + \dots$

... +  $F_n$  будет по определению заданной силой, действующей на материальную точку. Основная связь между заданной силой и вызываемым ею ускорением есть закон Ньютона:

$$\frac{dB}{dt} = F$$

или

$$mW = F.$$

В опытной механике все понятия математической механики интерпретируются при помощи физических объектов, причем удовлетворительность данной интерпретации определяется проверкой закона Ньютона. Мы остановимся на обычной интерпретации при помощи понятий движения, массы, силы. Тогда, чтобы применять уравнения механики, мы должны учитывать все силы, действующие на данную точку, чего мы фактически сделать не можем. Поэтому мы делим силы на две категории:  $F = F_I + F_{II}$ , относя к категории  $F_{II}$  малоизвестные нам силы, которые мы считаем в совокупности своей незначительными, и в уравнениях движения отбрасываем член  $F_{II}$ , считая, что решение приближенного уравнения

$$mW = F_I$$

будет мало отличаться от решения точного уравнения

$$mW = F_I + F_{II}.$$

Поэтому при применении уравнений механики к решению практических задач не всегда следует стремиться к абсолютной точности в тех случаях, когда в этих уравнениях заведомо отброшены некоторые малые члены.

С таким именно случаем мы имеем дело в уравнениях гидромеханики, особенно когда речь идет о применении их к изучению атмосферных движений.

Одной из важных задач гидродинамики сжимаемой жидкости является установление условий динамической возможности движения, т. е. уравнений, которым должны удовлетворять составляющие  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вектора скорости  $V$ , для того чтобы можно было найти движение, удовлетворяющее всем уравнениям гидродинамики\*.

Указанные выше соображения о неполной точности уравнений гидромеханики приводят к мысли строить приближенные условия динамической возможности движения, которые обеспечивают возможность удовлетворения уравнений гидромеханики с достаточно большой степенью точности.

2. Пользование приближенными дифференциальными уравнениями вместо точных оправдывается тем обстоятельством, что решения прибли-

\* Фридман А. А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, ч. II. Пг., 1922, стр. 40 (литогр.); то же Л.—М. ОНТИ, 1934.

женных дифференциальных уравнений, вообще говоря, отличаются от решений точных уравнений на величины того же порядка малости, как отброшенные нами члены уравнений. Докажем это для одного простого случая.

Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x), \quad (1)$$

где функция  $f(y, x)$  удовлетворяет условию Коши — Липшица:

$$|f(\bar{y}, x) - f(y, x)| < M |\bar{y} - y| \quad (2)$$

( $M$  — некоторое постоянное число), так что решение уравнения (1) может быть найдено методом последовательных приближений. Заменим уравнение (1) приближенным уравнением

$$\frac{dY}{dx} = f(Y, x) + A(Y, x), \quad (3)$$

где функция  $A(Y, x)$  также удовлетворяет условию Коши — Липшица. Пусть, кроме того, при всех рассматриваемых  $x$  и  $Y$  будет  $|A(Y, x)| < \delta$ , где  $\delta$  — некоторое постоянное число. Тогда решения уравнений (1) и (3), определяющиеся одними и теми же начальными заданиями, при  $x = x_0$  должно быть  $y = y_0$ , а  $Y = Y_0 = y_0$  различаются во всяком конечном интервале для  $x$  на величину порядка  $\delta^*$ .

В силу сделанных предположений рассматриваемое решение уравнения (1) есть  $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ , где  $y_n(x)$  определяются последовательно из уравнений

$$y_n(x) = \int_{x_0}^x f(y_{n-1}, x) dx + y_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Точно так же решение уравнения (3) есть  $Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x)$ , где

$$Y_n(x) = \int_{x_0}^x f(Y_{n-1}, x) dx + \int_{x_0}^x A(Y_{n-1}, x) dx + y_0. \quad (5)$$

Последовательно оцениваем разности  $Y_n(x) - y_n(x)$ ; прежде всего в силу

$$Y_1(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^x A(y_0, x) dx$$

\* См., например, B i e b e r b a c h L. Differentialgleichungen. J. Springer., 1922.

и условия относительно  $A(Y_1, x)$  получим

$$|Y_1(x) - y_1(x)| < \delta |x - x_0|.$$

Далее

$$Y_2(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^x [f(Y_1, x) - f(y_1, x)] dx + \int_{x_0}^x A(Y_1, x) dx,$$

но

$$|f(Y_1, x) - f(y_1, x)| < M |Y_1 - y_1| < M\delta |x - x_0|,$$

следовательно,

$$|Y_2(x) - y_2(x)| < M\delta \frac{|x - x_0|^2}{2} + \delta |x - x_0|.$$

Идя таким образом дальше, докажем общее неравенство

$$|Y_n(x) - y_n(x)| < M^{n-1}\delta \frac{|x - x_0|^n}{n!} + M^{n-2}\delta \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \\ \dots + M\delta \frac{|x - x_0|^2}{2} + \delta |x - x_0|$$

или *a fortiori*,

$$|Y_n(x) - y_n(x)| < \delta |x - x_0| e^{M|x-x_0|}. \quad (6)$$

Перейдем теперь к оценке разности  $Y(x) - y(x)$  решений уравнений (3) и (1):

$$|Y(x) - y(x)| = |Y(x) - Y_n(x) + Y_n(x) - y_n(x) + y_n(x) - y(x)| \leq \\ \leq |Y(x) - Y_n(x)| + |Y_n(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y(x)|,$$

и так как разности  $Y(x) - Y_n(x)$ ,  $y_n(x) - y(x)$  стремятся к нулю при неограниченном возрастании  $n$ , то, принимая во внимание еще (6), окончательно найдем

$$|Y(x) - y(x)| \leq \delta |x - x_0| e^{M|x-x_0|}, \quad (7)$$

что и доказывает высказанную теорему.

Для системы уравнений в частных производных, при некоторых ограничениях, теорема остается справедливой: решение некоторой приближенной системы уравнений тем ближе к решению точной системы, чем меньше ошибка в самих уравнениях.

3. Рассмотрим теперь систему трех уравнений\*:

$$\text{grad} P(x, y, z) = \mathfrak{R}(x, y, z) \quad (8)$$

---

\* Относительно обозначений смотри упомянутую выше работу А. А. Фридмана.

с неизвестной функцией  $P(x, y, z)$ , где вектор  $\mathfrak{N}(x, y, z)$  имеет составляющие по осям координат  $\mathfrak{N}_x(x, y, z)$ ,  $\mathfrak{N}_y(x, y, z)$ ,  $\mathfrak{N}_z(x, y, z)$ . Условие разрешимости системы (8) состоит в выполнении векторного равенства

$$\operatorname{rot} \mathfrak{N} = 0. \quad (9)$$

Если уравнение (9) не выполнено, уравнению (8) точно удовлетворить нельзя. Положим, что мы построим функцию  $P(x, y, z)$  такую, что

$$\operatorname{grad} P = \mathfrak{N} + \varepsilon, \quad (10)$$

где  $\varepsilon(x, y, z)$  есть достаточно малый вектор с составляющими  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ . Тогда мы можем считать функцию  $P(x, y, z)$  приближенным решением системы (8). Функцию  $P$  — приближенное решение системы (8) — можно искать (в том случае, конечно, когда такие приближенные решения вообще существуют) различными способами, в зависимости от того, как оценивать получающуюся ошибку в уравнении (8). Мы остановимся на довольно грубом, но простом способе вычисления функции  $P(x, y, z)$ . А именно, определим последнюю равенством

$$P(x, y, z) = \int_a^x \mathfrak{N}_x(x, y, z) dx + \int_b^y \mathfrak{N}_y(a, y, z) dy + \int_c^z \mathfrak{N}_z(a, b, z) dz, \quad (11)$$

где  $a, b, c$  — координаты некоторой средней точки рассматриваемого объема. В случае выполнения равенства (9) функция (11) дает точное решение системы (8). Если уравнение (9) выполнено только приближенно, так что

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{N} = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B}_x &= \frac{\partial \mathfrak{N}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{N}_y}{\partial z}, \quad \mathfrak{B}_y = \frac{\partial \mathfrak{N}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}_z}{\partial x}, \\ \mathfrak{B}_z &= \frac{\partial \mathfrak{N}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{N}_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\mathfrak{B}$  — малый вектор, то функция (11), как мы сейчас покажем, будет приближенным решением системы (8). В самом деле, составим вектор  $\varepsilon$ , дающий делаемую нами ошибку. Так как

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mathfrak{N}_x(x, y, z),$$

то

$$\varepsilon_x = \frac{\partial P}{\partial x} - \mathfrak{N}_x(x, y, z) = 0,$$

так что первое уравнение системы (8) удовлетворено точно.

Вычисляем далее:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \int_a^x \frac{\partial \mathfrak{N}_x(x, y, z)}{\partial y} dx + \mathfrak{N}_y(a, y, z) = \int_a^x \left[ \frac{\partial \mathfrak{N}_y(x, y, z)}{\partial x} - \mathfrak{B}_z(x, y, z) \right] dx + \\ &+ \mathfrak{N}_y(a, y, z) = \mathfrak{N}_y(x, y, z) - \mathfrak{N}_y(a, y, z) - \int_a^x \mathfrak{B}_z(x, y, z) dx + \mathfrak{N}_y(a, y, z) = \\ &= \mathfrak{N}_y(x, y, z) - \int_a^x \mathfrak{B}_z(x, y, z) dx,\end{aligned}$$

так что

$$\varepsilon_y = \frac{\partial P}{\partial y} - \mathfrak{N}_y(x, y, z) = - \int_a^x \mathfrak{B}_z(x, y, z) dx.$$

Наконец,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial z} &= \int_a^x \frac{\partial \mathfrak{N}_x(x, y, z)}{\partial z} dx + \int_b^y \frac{\partial \mathfrak{N}_y(a, y, z)}{\partial z} dy + \mathfrak{N}_z(a, b, z) = \\ &= \int_a^x \left[ \frac{\partial \mathfrak{N}_z(x, y, z)}{\partial x} + \mathfrak{B}_y(x, y, z) \right] dx + \int_b^y \left[ \frac{\partial \mathfrak{N}_z(a, y, z)}{\partial y} - \mathfrak{B}_x(a, y, z) \right] dy + \\ &+ \mathfrak{N}_z(a, b, z) = \mathfrak{N}_z(x, y, z) - \mathfrak{N}_z(a, y, z) + \int_a^x \mathfrak{B}_y(x, y, z) dx + \mathfrak{N}_z(a, y, z) - \\ &- \mathfrak{N}_z(a, b, z) - \int_b^y \mathfrak{B}_x(a, y, z) dy + \mathfrak{N}_z(a, b, z) = \mathfrak{N}_z(x, y, z) + \\ &+ \int_a^x \mathfrak{B}_y(x, y, z) dx - \int_b^y \mathfrak{B}_x(a, y, z) dy.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\varepsilon_z = \frac{\partial P}{\partial z} - \mathfrak{N}_z(x, y, z) = \int_a^x \mathfrak{B}_y(x, y, z) dx - \int_b^y \mathfrak{B}_x(a, y, z) dy.$$

Из найденных выражений  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  мы заключаем, что действительно, чем меньше вектор  $\mathfrak{B}$ , тем меньше делаемая нами ошибка  $\varepsilon$ .

Способ определения функции  $P$  равенством вида (11) допускает некоторую неопределенность в выборе последовательности координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , так что можно составить шесть функций вида (11), например,

$$P(x, y, z) = \int_b^y \mathfrak{N}_y(x, y, z) dy + \int_a^x \mathfrak{N}_x(x, b, z) dx + \int_c^z \mathfrak{N}_z(a, b, z) dz; \quad (11a)$$

можно затем эти шесть функций комбинировать различным образом между собой, например, взять полусумму функций (11) и (11а) и т. д. Выбор той или другой функции зависит от вида разбираемой задачи.

Так, например, при применении уравнений гидродинамики к изучению атмосферных движений важно получить горизонтальный градиент давления по возможности точным, потому что горизонтальный градиент гораздо меньше вертикального, а значит одна и та же абсолютная ошибка даст в горизонтальном градиенте несравненно большую относительную ошибку, чем в вертикальном. В этом случае рационально взять за  $P$  функцию (11) или (11а). Если в  $\mathfrak{R}$  есть некоторая произвольность, то ею надо воспользоваться для установления равенства  $\mathfrak{Z}_z(x, y, z) = 0$  (или  $\mathfrak{Z}_z = \eta$ , где  $\eta$  — малая величина), чтобы  $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ , т. е. чтобы в обоих горизонтальных составляющих градиента не было ошибки (или эта ошибка была бы по возможности мала).

3. Напишем уравнения гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\omega \operatorname{grad} p + \mathbf{F}, \\ \frac{d \ln \omega}{dt} &= \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (13)$$

(уравнение притока тепла мы принимать во внимание не будем).

В этих уравнениях  $p$  обозначает давление,  $\omega$  — удельный объем,  $\mathbf{F}$  — вектор приложенной силы, отнесенный на единицу массы, а

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (14)$$

перепишем уравнения (13) в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} p &= \frac{1}{\omega} \cdot \mathbf{G}, \\ \frac{d \ln \omega}{dt} &= \operatorname{div} \mathbf{v}.\end{aligned}\quad (15)$$

Точные условия динамической возможности движения получаются путем исключения  $p$  и  $\omega$  из системы (15). Очевидно, что, рассматривая условия динамической возможности как приближенные равенства, мы и получим приближенные условия динамической возможности. Но мы зададимся целью путем надлежащей оценки порядка различных величин получить более простые условия, позволяющие находить приближенные решения системы (15).



Первое уравнение системы (15) имеет как раз вид рассмотренного нами уравнения (8), в котором  $\mathfrak{N} = \frac{1}{\omega} G$ . Построим вектор  $\mathfrak{B}$ :

$$\mathfrak{B} = \text{rot} \left( \frac{1}{\omega} G \right).$$

Но по известной формуле векторного исчисления

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\omega} G \right) = \frac{1}{\omega} \text{rot } G + \left[ \text{grad } \frac{1}{\omega}, G \right] = \frac{1}{\omega} \text{rot } G - \left[ \frac{1}{\omega^2} \text{grad } \omega, G \right];$$

введем обозначения  $H = -\text{rot } G$ ,  $\ln \omega = \varphi$ , тогда, так как  $\text{grad } \varphi = \text{grad } \ln \omega = \frac{1}{\omega} \text{grad } \omega$ , мы найдем

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{\omega} \{H - [G, \text{grad } \varphi]\},$$

или, обозначая

$$H - [G, \text{grad } \varphi] = C,$$

более просто

$$\mathfrak{B} = -\frac{C}{\omega}.$$

Условие точной разрешимости первого уравнения системы (15) требует выполнения равенства  $C = 0$ , так что мы должны рассматривать систему

$$H - [G, \text{grad } \varphi] = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{div } v. \quad (16)$$

Мы покажем сейчас, что при изучении атмосферных движений первое уравнение можно очень часто заменять его вертикальной (по оси  $z$ ) составляющей, так что дело сводится к интегрированию (хотя бы приближенному) следующей системы двух уравнений:

$$\begin{cases} H_z - G_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + G_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \quad (17)$$

В самом деле, определяя функцию  $p(x, y, z, t)$  по формуле (11), т. е. в виде

$$p(x, y, z, t) = \int_a^x \frac{G_x(x, y, z, t)}{\omega(x, y, z, t)} dx + \int_b^y \frac{G_y(a, y, z, t)}{\omega(a, y, z, t)} dy + \int_c^z \frac{G_z(a, b, z, t)}{\omega(a, b, z, t)} dz + p_0(t),$$

мы удовлетворим в силу условия  $\mathfrak{B}_z = 0$  двум уравнениям

$$\omega \frac{\partial p}{\partial x} = G_x, \quad \omega \frac{\partial p}{\partial y} = G_y.$$

Рассмотрим теперь, с какой точностью будет выполнено третье уравнение. Сделанная ошибка

$$\varepsilon_z = - \int_a^x \frac{C_y(x, y, z, t)}{\omega(x, y, z, t)} dx + \int_b^y \frac{C_x(a, y, z, t)}{\omega(a, y, z, t)} dy.$$

Оценим порядок величины  $\varepsilon_z$ . Мы будем предполагать при этом, что в рассматриваемом нами движении все элементы, т. е. скорость, давление, плотность, температура и различные их производные по времени и координатам имеют тот же порядок величин, что и в атмосферной действительности. Для оценки порядка этих величин можно пользоваться данными, приведенными в работе Фридмана (Friedman) и Хессельберга (Hesselberg)\*.

Порядок величин  $C_x$  и  $C_y$  определяется совершенно одинаковым образом. Рассмотрим поэтому только  $C_y(x, y, z, t)$ .

$$\begin{aligned} C_y(x, y, z, t) &= H_y - [G, \text{grad } \varphi]_y = H_y - G_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + G_x \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial G_z}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial z} - G_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + G_x \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

В указанной выше работе порядок  $\partial \varphi / \partial x$  дан в виде ( $10^{-8} - 10^{-7}$ ), порядок  $\partial \varphi / \partial z$  есть  $10^{-4}$ . Оценим порядок  $G_x$  и  $\partial G_x / \partial z$ . Мы имеем

$$G_x = F_x - \frac{du}{dt},$$

порядок  $du/dt$  есть ( $10^{-4} - 10^{-5}$ ), следовательно, порядок  $G_x$  можно считать таким же. Это согласуется с тем, что

$$G_x = \omega \frac{\partial p}{\partial x},$$

но  $\omega$  порядка 1000,  $\partial p / \partial x$  порядка ( $10^{-7} - 10^{-6}$ ), следовательно, действительно  $G_x$  порядка ( $10^{-4} - 10^{-3}$ ). Чтобы оценить порядок  $\partial G_x / \partial z$ , мы вычислим

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

---

\* Hesselberg Th. und Friedman A. Die Größenordnung der meteorologischen Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen.— Veröff. Geophys. Inst. Univ. Leipzig, 1914, serie 9, H. 6.

и оценим порядок каждого члена; в результате получится, что порядок  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{du}{dt}$ , а следовательно,  $\partial G_x / \partial z$  можно принять не выше  $10^{-6}$ .

Точно так же найдем, что порядок  $G_z$  есть  $10^1$ , порядок  $\partial G_z / \partial x$  не выше  $10^{-8}$ . Сопоставляя все эти результаты, получим, что  $C_y$  есть величина порядка не выше  $10^{-6}$ .

Принимая во внимание еще, что  $\omega$  имеет порядок  $10^3$ , получим, что делаемая нами ошибка  $\varepsilon_z$  не превосходит величины порядка  $10^{-9} d$ , где  $d$  — расстояние рассматриваемой точки до выбранной точки  $(a, b, c)$ . А так как  $\partial p / \partial z$  есть величина порядка  $10^{-2}$ , то делаемая относительная ошибка будет не более  $10^{-7} d$ , так что даже при расстоянии в 1000 км она не превзойдет 10%. Таким образом, нам нужно, чтобы получить приближенно динамически возможное движение, проинтегрировать систему (17), из которой мы можем, например, задаваясь по произволу распределением  $u$  и  $v$ , получить  $w$  и  $\Phi$ .

Если же условие  $\mathfrak{E}_z = 0$  выполняется (точно или приближенно) само собой, то остается проинтегрировать только последнее уравнение системы (17), которое при заданных  $u$ ,  $v$ ,  $\Phi$  решается относительно  $w$ :

$$w = -\omega \int_0^z \frac{Q}{\omega} dz + \Psi(x, y, t),$$

где

$$Q = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right).$$

Здесь  $\Psi(x, y, t)$  — произвольная функция своих аргументов, которую обычно надо полагать равной нулю, чтобы удовлетворить граничному условию — равенству нулю вертикальной составляющей скорости на поверхности земли.

Разберем в качестве примера случай плоского коллинеарного движения, в котором горизонтальные проекции скорости являются линейными функциями горизонтальных координат  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} u &= a_0(z, t) + a_1(z, t)x + a_2(z, t)y, \\ v &= b_0(z, t) + b_1(z, t)x + b_2(z, t)y, \\ w &= 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что действует только сила тяжести и пренебрежем отклоняющей силой вращения земли. Тогда легко составить вектор  $G$ :

$$\begin{aligned} G_x &= -\frac{du}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = A_0(z, t) + A_1(z, t)x + A_2(z, t)y, \\ G_y &= -\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} = B_0(z, t) + B_1(z, t)x + B_2(z, t)y, \\ G_z &= -g. \end{aligned}$$

Здесь функции  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$  выражаются простыми формулами через  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  и через их производные по  $t$ .

Составив далее

$$H_z = \frac{\partial G_x}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial x} = A_2(z, t) - B_1(z, t),$$

мы легко удовлетворим первому уравнению системы (17), выбирая  $\varphi$  как функцию от  $z$  и  $t$  и связывая функции  $a$  и  $b$  соотношением

$$A_2(z, t) - B_1(z, t) = 0.$$

Остается удовлетворить последнему уравнению, которое требует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a_1 + b_2.$$

Теперь можем определить давление  $\bar{p}$ :

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \int_0^x \frac{G_x(x, y, z, t)}{\omega} dx + \int_0^y \frac{G_y(0, y, z, t)}{\omega} dy + \int_0^z \frac{G_z}{\omega} dz + p_0(t) = \\ &= \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{1}{2} A_1 x^2 + A_2 xy + \frac{1}{2} B_2 y^2 + A_0 x + B_0 y \right\} - \int_0^z \frac{g}{\omega(z, t)} dz + p_0(t), \end{aligned}$$

так что изобарами в любой горизонтальной плоскости являются подобные кривые второго порядка с общим центром. Как частный случай мы можем получить прямолинейные, или круговые, или эллиптические изобары.

1924 г.

ДИНАМИЧЕСКАЯ  
МЕТЕОРОЛОГИЯ  
И ФИЗИКА  
АТМОСФЕРЫ





---

---

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА С ВЫСОТОЙ<sup>8</sup>

Вопрос о распределении температуры с высотой может быть разрешен при некоторых предположениях относительно солнечного и земного излучения и поглощающей способности атмосферы. Возможны две существенно различные гипотезы: с одной стороны, можно предположить, что атмосфера находится в покое и рассматривать так называемое лучистое равновесие атмосферы, с другой, можно допустить наличие атмосферного движения и рассматривать наряду с уравнениями гидродинамики уравнение приведенной энергии.

К первому направлению относятся исследования Гэмффри (Humphreys)\*, Голда (Gold)\*\*, Шварцшильда (Schwarzschild)\*\*\* и совсем недавние Эмдена (Emden)\*\*\*\*.

Во втором направлении в нашей науке ничего не было сделано.

Цель настоящей работы изучить распределение температуры воздуха с высотой под влиянием солнечного и земного излучения при предположении, что в атмосфере имеют место специфические движения — так называемые стационарные вертикальные токи.

Задача приводится к достаточно сложному дифференциальному уравнению, устанавливающему зависимость между температурой и высотой. Нахождение интегралов этого уравнения, выраженных в конечном виде, представляет, вероятно, значительную трудность. Но в данном случае можно легко получить первые приближения, разложив интеграл этого уравнения в ряд по степеням некоторого параметра. Эти первые приближения в одном случае очень просто найти, используя легко интегрируемое с

.....  
\* Humphreys W. J. Vertical temperature-gradients of the atmosphere.— *Astrophys. J.*, 1909, 29, p. 14.

\*\* Gold E. The isothermal layer of the atmosphere.— *Proc. Roy. Soc. London*, 1909, 82.

\*\*\* Schwarzschild K. Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. *Göttinger Nach.— Math.-phys. Klasse*, 1906; Emden R. *Gaskugeln*. Leipzig — Berlin, 1911.

\*\*\*\* Emden R. Ueber Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. *Sitzber. Math.-phys. Klasse Akad. Wissenschaft München*, 1913.

помощью простых рядов дифференциальное уравнение типа Фукса, а в другом — с помощью очень простых формул, содержащих экспоненты.

Итак, в задаче получаются ряды, расположенные по степеням некоторого параметра. Хотя коэффициенты в разложении без труда можно определить, вопрос о сходимости этих рядов остается открытым (см. § 4).

В конце настоящей работы приведено сравнение результатов аэрологических наблюдений с полученной теоретически формулой.

## § 1

Для того чтобы разрешить данную задачу, необходимо вывести уравнение термодинамики в предположении, что в единицу времени единица объема газа получает некоторое определенное количество энергии ( $Q$ ). Это количество энергии можно определить, рассматривая атмосферное излучение и поглощение.

Повторим кратко вывод уравнений гидродинамики при изложенных выше предположениях\*.

Выберем оси координат таким образом, чтобы ось  $z$  была вертикальной.

Введем следующие обозначения:  $x, y, z, t$  — координаты точки ( $z$  — высота) и время;  $u, v, w$  — составляющие скорости частицы в точке ( $x, y, z$ ) в момент  $t$ ;  $p, \rho, T$  — давление, плотность, температура;  $c_p, c_v$  — удельная теплоемкость воздуха при постоянных давлении и объеме;  $X, Y, Z$  — составляющие сил, действующих на единицу объема;  $X_n, Y_n, Z_n$  — составляющие сил, действующих на единицу поверхности ( $n$  — внутренняя нормаль этой поверхности).

Мы условимся выражать количество энергии в механических единицах.

Уравнения гидродинамики вместе с уравнением неразрывности и уравнением состояния воздуха можно записать так:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$p = H \rho T. \quad (5)$$

\* См., например, Kirchhoff G. Vorlesungen über Mathematische Physik. Theorie der Wärme. Leipzig, 1894, 4, S. 116.



Рассмотрим малый объем ( $\tau$ ) с элементом поверхности ( $o$ ) и внутренней нормалью ( $n$ ).

Пусть  $Q$  — количество энергии, поступающее в единицу объема в единицу времени, тогда соотношение между количеством подведенной энергии и работой внешних сил в объеме ( $\tau$ ) можно выразить формулой

$$A = dt \int_{(\tau)} (Q) \rho d\tau + dt \int_{(\tau)} \rho (Xu + Yv + Zw) d\tau + dt \int_{(o)} (X_n u + Y_n v + Z_n w) do. \quad (a)$$

Количество энергии, необходимое для того чтобы повысить температуру единицы массы на  $dT$ , а плотность ее на  $d\rho$  будет, следующим \*:

$$(Q') = -M d\rho + c_v dT,$$

где

$$M = (c_p - c_v) \frac{\partial p}{\partial \rho} : \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Работа давления на единичную массу равна

$$-p d \frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Применяя принцип сохранения энергии к объему газа ( $\tau$ ), найдем следующую формулу:

$$A = \int_{(\tau)} (Q') \rho d\tau + \int_{(\tau)} \frac{p}{\rho^2} d\rho d\tau + dt \int_{(\tau)} \rho d\tau \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}, \quad (a')$$

где последний член дает приращение кинетической энергии объема  $\tau$ .  
Примем во внимание, что

$$M = (c_p - c_v) \frac{T}{\rho}$$

и

$$\frac{p}{\rho^2} - M = - \frac{T}{\rho} (c_p - c_v - H) = 0,$$

так как

$$H = c_p - c_v^{**}.$$

\* Kirchhoff G. См. выше.

\*\*  $H$  — энергия, выраженная в механических единицах.

Из уравнения (а') легко вывести следующую фундаментальную формулу:

$$\int_{(\tau)} (Q) \rho d\tau + \int_{(\tau)} \rho (Xu + Yv + Zw) d\tau + \int_{(o)} (X_n u + Y_n v + Z_n w) do = \\ = \int_{(\tau)} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) d\tau + \int_{(\tau)} \rho c_v \frac{dT}{dt} d\tau. \quad (b)$$

Можно преобразовать уравнение (b) с помощью интеграла живой силы, который получается из уравнений (1)–(4).

Умножая уравнения (1), (2), (3) соответственно на  $u d\tau$ ,  $v d\tau$ ,  $w d\tau$ , складывая их и интегрируя полученное равенство по всему объему  $(\tau)$ , имеем

$$\int_{(\tau)} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) d\tau - \int_{(\tau)} \rho (Xu + Yv + Zw) d\tau = \\ = - \int_{(\tau)} \left( \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w \right) d\tau.$$

Преобразование Грина дает

$$\int_{(\tau)} \left( \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w \right) d\tau = - \int_{(o)} (X_n u + Y_n v + Z_n w) do - \\ - \int_{(\tau)} p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau.$$

Благодаря этим равенствам формула (b) принимает вид

$$\int_{(\tau)} \rho (Q) d\tau = \int_{(\tau)} \rho c_v \frac{dT}{dt} d\tau + \int_{(\tau)} p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau. \quad (b')$$

Откуда, рассматривая объем  $(\tau)$  как бесконечно малый, получаем

$$\rho (Q) = \rho c_v \frac{dT}{dt} + p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (6)$$

## § 2

1. Для того чтобы определить, как подведенное тепло зависит от солнечного и земного излучения, важно сформулировать ряд принципов, относящихся к поглощающей способности атмосферы.

Допустим, что энергия  $S_{\lambda\vartheta} d\vartheta d\lambda$  лучей с длиной волны  $\lambda$ , проходящих через тонкий слой толщиной  $l$  под углом падения  $\vartheta$ , уменьшается вследствие поглощения на величину  $\Delta S_{\lambda\vartheta} d\vartheta d\lambda$ , равную

$$\Delta S_{\lambda\vartheta} d\vartheta d\lambda = k_{\lambda} \rho \frac{1}{\cos \vartheta} S_{\lambda\vartheta} d\vartheta d\lambda.$$

Величина  $k_\lambda$  называется коэффициентом поглощения\*. Вообще говоря, эта величина зависит от  $\lambda$  и от высоты  $z$  поглощающего слоя.

Пусть  $a_\lambda$  — степень поглощения для определенной длины волны  $\lambda$  любого тела (например, слоя газа):

$$a_\lambda = \frac{\Delta S_\lambda}{S_\lambda}.$$

Пусть, кроме того,  $\alpha_\lambda$  — степень поглощения тонкого слоя воздуха толщиной  $l$  для пучка параллельных лучей с длиной волны  $\lambda$ , перпендикулярно падающих на слой:

$$\alpha_\lambda = k_\lambda \rho l.$$

Вследствие рассеянного излучения атмосферы степень поглощения тонкого слоя атмосферы на высоте  $z$  не равна величине  $a_\lambda$ , как этого можно было бы ожидать. Отношение  $a_\lambda / \alpha_\lambda$  — весьма сложная функция  $z$  или, вернее, массы воздуха  $\int_z^\infty \rho dz$ , пересекаемой излучением.

Эмден подсчитал это отношение при ряде предположений относительно природы атмосферного излучения и вида зависимости испускательной способности для длины волны  $\lambda$  слоя атмосферы от высоты  $z$ .

Не останавливаясь в нашей статье на обсуждении формул, выражающих  $a_\lambda / \alpha_\lambda$ , ограничимся замечанием, что в дальнейшем мы вместе с Эмденом \*\* будем считать это отношение постоянным для данной задачи и, изменив слегка значение  $k_\lambda$ , положим

$$a_\lambda = k_\lambda \rho l.$$

Величина  $a_\lambda$ , так же как и  $k_\lambda$ , зависит и от  $\lambda$ , и от высоты поглощающего слоя  $z$ . В случае, когда  $a_\lambda$  и  $k_\lambda$  не зависят от  $\lambda$ , удобно называть излучение с е р ы м.

Получив в цитированной работе уравнение для равновесия не с е р о г о излучения, Эмден использует только два различных значения  $k_\lambda$  (для коротких и длинных волн).

Кроме того, у Эмдена  $k_\lambda$  зависит и от высоты  $z$ . Эта зависимость обусловлена главным образом изменением количества пара с высотой.

В настоящей статье мы не будем усложнять задачу; мы рассмотрим здесь только случай серого излучения и предположим  $k_\lambda = k$  не зависящим от  $z$ .

\* E m d e n R. См. стр. 68.

\*\* E m d e n R. См. стр. 72.

2. Атмосфера пронизана двумя потоками энергии: один поток — солнечное излучение сверху вниз, другой — земное излучение снизу вверх.

Величина этих потоков описывается двумя дифференциальными уравнениями, которые выведены еще Шварцшильдом.

Их можно установить с помощью очень простых соображений. Пусть  $A$  и  $B$  — потоки энергии, пронизывающие слой на высоте  $z$  соответственно снизу вверх и сверху вниз.

Обозначим через  $\Delta e$  интегральную испускательную способность слоя толщиной  $dz$ , расположенного на высоте  $z$ .

Изменение потока  $A$  при прохождении через  $dz$  зависит от поглощения в слое ( $A$  убывает) и от излучения этого слоя ( $A$  возрастает):

$$dA = -k\rho dz A + \Delta e;$$

аналогично

$$dB = k\rho dz B - \Delta e.$$

Так как величина  $a = a_\lambda$  не зависит от  $\lambda$ , то в нашем случае серого излучения можно применить закон Кирхгофа не только к излучению определенной длины волны  $\lambda$ , но и к интегральному излучению

$$\Delta l = aEe;$$

здесь  $E$  — полная испускательная способность абсолютно черного тела, имеющего ту же температуру, что и рассматриваемый слой.

Поскольку  $a = k\rho dz$ , то легко найти два уравнения Шварцшильда:

$$\frac{dA}{dz} = k\rho (E - A), \quad (7)$$

$$\frac{dB}{dz} = -k\rho (E - B). \quad (8)$$

Аналогичные соображения дадут нам уравнение между  $(Q)$  и  $A$ ,  $B$  и  $E$ .

Слой воздуха с площадью основания  $f$  и толщиной  $dz$  поглощает в единицу времени некоторую часть  $A$ , равную  $k\rho dz f A$ , и часть  $B$ , равную  $k\rho dz f B$ , и излучает в обоих направлениях количество энергии  $Ok\rho f dz E$ , так что

$$(Q)\rho dz f = k\rho dz f (A + B - 2E).$$

Полагаем

$$F = A + B - 2E.$$

Тогда

$$(Q) = kF. \quad (9)$$

3. Величина  $F$  удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое легко выводится из уравнений (7) и (8).

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{d(A+B-2E)}{dz} &= -k\rho(A-B) - 2\frac{dE}{dz}, \\ \frac{d(A-B)}{dz} &= -k\rho F,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dz}\right) = k^2\rho F - \frac{d}{dz}\left(\frac{2}{\rho}\frac{dE}{dz}\right). \quad (10)$$

Величина  $E$  связана с температурой  $T$  излучающего черного тела законом Стефана — Больцмана.

$$E = cT^4. \quad (11)$$

### § 3

1. Для того чтобы найти уравнения подведенной энергии, приложим найденные выше соотношения к задаче распределения температуры воздуха с высотой при наличии слабых стационарных вертикальных токов.

Сделаем в наших уравнениях следующие подстановки:  $u = v = 0$  и  $w$ ,  $T$ ,  $\rho$  зависит только от  $z$ ;

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Уравнения (1) — (6) и (9) — (11) принимают тогда вид

$$\begin{aligned}w\frac{dw}{dz} &= -g - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}, \\ \frac{d\rho w}{dz} &= 0, \\ p &= H\rho T, \\ kF &= c_v\frac{dT}{dz} + \frac{p}{\rho}\frac{dw}{dz}, \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dF}{dz}\right) &= k^2\rho F - \frac{d}{dz}\left(\frac{2}{\rho}\frac{dE}{dz}\right), \\ E &= cT^4.\end{aligned}$$

Но  $w = \frac{dz}{dt}$ , следовательно,

$$\rho w = \mu, \quad (12)$$

$$p = H\rho T, \quad (13)$$

$$kF = c_v w \frac{dT}{dz} + HT \frac{dw}{dz}, \quad (14)$$

$$E = cT^4, \quad (15)$$

$$w \frac{dw}{dz} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dz} \right) = k^2 \rho F - \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{\rho} \frac{dE}{dz} \right). \quad (17)$$

Для слабых вертикальных токов величина  $\mu$  постоянна и очень мала.

2. Легко можно найти интегралы уравнений (12)–(16) в случае, когда  $w = 0$  (что означает  $\mu = 0$ ), — случай, уже отмеченный Шварцшильдом.

Если  $w = 0$  ( $\mu = 0$ ), уравнения (12) — (17) запишутся так:

$$w = 0,$$

$$p = H\rho T,$$

$$F = 0,$$

$$E = cT^4,$$

$$g + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{2}{\rho} \frac{dE}{dz} \right) = 0$$

или

$$\frac{2}{\rho} \frac{dE}{dz} = 2n, \quad \text{где } n \text{ — постоянная}$$

Будем различать два случая: 1)  $n = 0$ , 2)  $n \neq 0$ .

В случае  $n = 0$

$$\frac{dT}{dz} = 0, \quad T = \tau = \text{const}$$

имеем изотермическую атмосферу.

Известно, что тогда

$$T = \tau,$$

$$w = 0, \quad (18)$$

$$\rho = \gamma e^{-\alpha z}, \quad \alpha = \frac{g}{H\tau}$$

$$p = H\tau\gamma e^{-\alpha z}, \quad \gamma \text{ и } \tau = \text{const.}$$

Во втором случае ( $n \neq 0$ ) последнее из уравнений, разрешающих задачу, даст

$$\frac{dE}{dz} = n\rho$$

или на основании предпоследнего уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dz} &= -\frac{n}{g} \frac{dp}{dz}, \\ c(T^4 - \beta^4) &= -\frac{n}{g} p, \\ d \ln p &= \frac{4T^3}{T^4 - \beta^4} dT, \quad \beta = \text{const.}\end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned}p &= H\rho T, \quad d \ln p = d \ln \rho + \frac{dT}{T}, \\ d \ln \rho &= \frac{3T^4 + \beta^4}{T(T^4 - \beta^4)} dT;\end{aligned}$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned}dz &= \frac{1}{g\rho} dp = -\frac{HT}{g} d \ln p, \\ dz &= -\frac{4H}{g} \frac{T^4}{T^4 - \beta^4} dT.\end{aligned}$$

Представим эти формулы в следующей, более удобной для приложений форме:

$$\begin{aligned}T &= x, \\ \frac{d \ln p}{dx} &= \frac{4x^3}{x^4 - \beta^4}, \\ \frac{d \ln \rho}{dx} &= \frac{3x^4 + \beta^4}{x(x^4 - \beta^4)}, \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{4H}{g} \frac{x^4}{x^4 - \beta^4}.\end{aligned}\tag{19}$$

Последнее уравнение, показывающее, как именно  $z$  зависит от  $x$ , легко интегрируется в квадратурах

$$\frac{gz}{H} = \beta \left( 4 \frac{x}{\beta} + \ln \frac{x - \beta}{x + \beta} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\beta} \right) + \tau, \quad x > \beta, \tag{20}$$

где  $\tau = \text{const.}$

3. Если предположить, что имеет место лучистое равновесие и считать все процессы стационарными, то легко убедиться, что на поверхности атмосферы  $A = B$  и, следовательно,  $n = 0$ ; поэтому для изучения распределения температуры воздуха с высотой применяются именно формулы (18). Они дают  $T = \tau = \text{const.}$ ; этот факт формально противоречит резуль-

татам аэрологических наблюдений (с помощью шаров-зондов). Голд \* и Эмден \*\* уже отметили это противоречие.

Для того чтобы избежать его, Эмден предполагает, что  $k$  зависит от длины волны. Ниже (в § 4) мы увидим, что это противоречие можно также устранить, предположив существование слабых вертикальных токов в атмосфере.

#### § 4

1. Случай, когда  $w$  отлично от нуля, является более трудным, чем случай отсутствия вертикальных течений в воздухе. При слабых вертикальных токах можно считать величину  $\mu$  малой и весьма естественно разложить функции, определяемые уравнениями (12) — (17) по степеням  $\mu$ . В этом параграфе мы определим коэффициенты при степенях  $\mu^0$  и  $\mu$ , которые дадут первое приближение для решения дифференциальных уравнений (12) — (17).

Предположим, что разложения  $w$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $F$  и  $E$  по степеням  $\mu$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} w &= w_1\mu + w_2\mu^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} w_i\mu^i, \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1\mu + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i\mu^i, \\ T &= T_0 + T_1\mu + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} T_i\mu^i, \\ E &= E_0 + E_1\mu + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} E_i\mu^i, \\ F &= F_1\mu + F_2\mu^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} F_i\mu^i. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Уравнение (14), очевидно, дает  $F_0 = 0$ .

Сравнивая коэффициенты при  $\mu^0$  в уравнениях (12) — (17), имеем

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= H\rho_0 T_0, \\ E_0 &= cT_0^4, \\ -g - \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} &= 0, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{\rho_0} \frac{dE_0}{dz} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

\* Gold E. См. выше.

\*\* Emden R. См. выше.



Эти уравнения, очевидно, тождественны уравнениям § 3, которые дают решение статической задачи. Как и в § 3, различаем два случая:  $n = 0$ ,  $n \neq 0$ ; во втором случае уравнения (19) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= x, & E_0 &= cx^4, \\ \frac{d \ln p_0}{dx} &= \frac{4x^3}{x^4 - \beta^4}, & \frac{d \ln p_0}{dx} &= \frac{3x^4 + \beta^4}{x(x^4 - \beta^4)}, \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{4H}{g} \frac{x^4}{x^4 - \beta^4}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Очевидно, что  $T_0 = x$  связано с  $z$  конечным соотношением (20).

2. Переходим к соотношениям, которые получаются при сравнении коэффициентов  $\mu$  в уравнениях (12) — (17). Эти соотношения запишутся в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\rho_0}, \\ p_1 &= H(\rho_0 T_1 + \rho_1 T_0), \\ kF_1 &= c_v w_1 \frac{dT_0}{dz} + HT_0 \frac{dw_1}{dz}, \\ E_1 &= 4cT_0^3 T_1, \\ \rho_0 \frac{d\rho_1}{dz} - \rho_1 \frac{d\rho_0}{dz} &= 0, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{dF_1}{dz} \right) &= k^2 \rho_0 F_1 - \frac{d}{dz} \left[ \frac{2}{\rho_0} \left( \frac{dE_1}{dz} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{dE_0}{dz} \right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Можно значительно упростить эти уравнения, введя вместо  $z$  новую переменную  $x$ , определенную уравнением (23). Упрощение состоит главным образом в том, что при такой замене

$$T_0 = x.$$

Из уравнений (24) легко видеть, что  $w$ ,  $F$ ,  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ , а также их комбинации — известные функции  $z$ , а следовательно, и  $x$ . Третье уравнение (24) дает

$$k^2 \rho_0 F_1 = k \left( c_v - Hx \frac{d \ln \rho_0}{dx} \right) \frac{dx}{dz}.$$

Полагая

$$N + \int k \left( c_v - Hx \frac{d \ln \rho_0}{dx} \right) dx - \frac{1}{\rho_0} \frac{dF_1}{dx} \frac{dx}{dz} = 2\xi(x),$$

$$N = \text{const},$$

легко получить из последнего уравнения (24)

$$\rho_0 \frac{dE_1}{dx} - \rho_1 \frac{dF_0}{dx} = \rho_0^2 \xi(x) \frac{dz}{dx}.$$

Подстановки  $E_1 = 4cx^3T_1$  и  $E_0 = cx^4$  дают соотношение

$$\rho_0 4cx^3 \frac{dT_1}{dx} + \rho_0 12cx^2T_1 - 4\rho_1 cx^3 = \rho_0^2 \xi(x) \frac{dz}{dx}.$$

Разделив обе части на  $\rho_0 4cx^3$  и полагая

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \Phi(x) = \frac{\rho_0}{4} \frac{\xi(x)}{cx^3} \frac{dz}{dx},$$

приходим, наконец, к уравнению

$$\frac{dT_1}{dx} + \frac{3}{x} T_1 - \omega = \Phi(x). \quad (25)$$

Уравнение (25) связывает  $\omega$  и  $T$  или, что то же самое,  $\rho_1$  и  $T_1$ ; для решения задачи остается установить еще одно соотношение между этими величинами, которое получается, если скомбинировать второе и пятое уравнения (24), а именно:

$$p_1 = H(\rho_0 T_1 + \rho_1 x), \quad p_0 = H\rho_0 x, \\ \rho_0 \frac{dp_1}{dx} - \rho_1 \frac{dp_0}{dx} = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение значения  $p_1$  и  $p_0$  из первых двух и принимая во внимание соотношение  $\rho_1/\rho_0 = \omega$ , получаем

$$\frac{dT_1}{dx} + \frac{d \ln \rho_0}{dx} T_1 + x \frac{d\omega}{dx} = 0. \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) образуют систему с двумя неизвестными функциями. Исключим одну из них, сложив почленно уравнение (25), продифференцированное по  $x$ , и уравнение (26), умноженное на  $1/x$ . Получаем таким образом дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \frac{4}{x} \frac{dT_1}{dx} + \left( \frac{1}{x} \frac{d \ln \rho_0}{dx} - \frac{3}{x^2} \right) T_1 = \Phi'(x),$$

которое в силу (23) можно записать в виде

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \frac{4}{x} \frac{dT_1}{dx} + \frac{4\beta^4}{x^2(x^4 - \beta^4)} T_1 = \Phi'(x). \quad (27)$$

Интегрируя (27), находим из (25)  $\omega$ , а затем  $\rho_1$ , и задача полностью решена.

В изучаемом случае можно написать, ограничиваясь первой степенью  $\mu$ ,

$$T = x + T_1\mu; \quad (28)$$

здесь  $T_1$  определяется уравнением (27), а  $x$  связано с  $z$  последним уравнением (23). Формула (28) дает поэтому приближенное решение задачи распределения температуры воздуха с высотой при сделанных предположениях об атмосферных токах и об оптических свойствах атмосферы (в самом широком смысле этого слова).

Уравнение (27) относится к хорошо известному классу уравнений Фукса. В следующем параграфе мы исследуем его подробнее. Перейдем теперь к исследованию второго случая, случая  $n = 0$ ; тогда для нахождения  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  можно использовать формулы (18).

3. Эти формулы (18) дают

$$\begin{aligned} T_0 &= \tau, \\ E_0 &= c\tau^4, \quad \tau, \gamma = \text{const}, \\ \rho_0 &= \gamma e^{-\alpha z}, \quad \alpha = \frac{g}{H\tau}, \\ p_0 &= H\tau\gamma e^{-\alpha z}. \end{aligned} \quad (29)$$

С другой стороны, из уравнений (24), принимая во внимание (29), получим следующую систему:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\gamma} e^{\alpha z}, \\ F_1 &= \frac{g}{k\gamma} e^{\alpha z}, \\ E_1 &= 4c\tau^3 T_1, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{\rho_0} \frac{dE_1}{dz} \right) &= kg \left( z - 2 \frac{\alpha^2}{k^2\gamma^2} e^{2\alpha z} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Последнее из этих уравнений дает по интегрировании

$$\frac{dT_1}{dz} = a'(z + b') e^{-\alpha z} - \frac{\alpha}{k^2\gamma^2} a' e^{\alpha z}; \quad (31)$$

$a'$  и  $b'$  — постоянные.

Из соотношения (31) легко найти величину  $T_1$ , а затем  $T = \tau + \mu T_1$ . Уравнение (31) позволяет изучить температурный градиент, как это можно увидеть из § 6. Мы совсем не приводим формул, выражающих  $\rho_1$  и  $p_1$ , формул, которые легко получить из уравнений (29) и (24).

4. Заметим в заключение этого параграфа, что тот же метод, которым получены уравнения, определяющие  $T_1$  и  $\rho_1$ , может служить для нахождения уравнений, определяющих  $T_n$  и  $\rho_n$ . Произведя необходимые вычисле-

ния, придем к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dT_n}{dx} + \frac{d \ln \rho_0}{dx} T_n + x \frac{d\omega_n}{dx} &= \varphi_n(x), \\ \frac{dT_n}{dx} + \frac{3}{x} T_n - \omega_n &= \psi_n(x), \end{aligned}$$

где  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_n(x)$  — две известные функции  $x$ , а  $\omega_n$  означает отношение  $\rho_n/\rho_0$ .

Это общий случай; частный случай, где  $T_0 = 0$ , еще проще.

Уравнения, определяющие  $T_n$  и  $\omega_n$ , сводятся к двум уравнениям, совершенно аналогичным уравнениям (27), а следовательно, они тоже типа Фукса. Таким образом решается задача интегрирования системы уравнений (12)—(17) с помощью рядов (21) по степеням  $\mu$  (по крайней мере теоретически); коэффициенты при различных степенях  $\mu$  легко определить. Однако такое решение нельзя считать полным, так как не дано доказательство сходимости полученных бесконечных рядов. Приходится сожалеть, что это доказательство не может быть основано на известной теореме Пуанкаре \*. Наши уравнения можно свести к системе уравнений первого порядка, одно из которых будет иметь вид

$$\mu \frac{dX}{dz} = f(\mu, X \dots),$$

где  $f$  — голоморфная функция относительно  $\mu$ ,  $X \dots$  в окрестности точки  $\mu = 0$ ,  $X = 0, \dots$

К этой системе уравнений невозможно непосредственно приложить рассуждения Пуанкаре. Я не смог дать в этой статье доказательства сходимости полученных рядов.

## § 5

Уравнение (27) — неоднородное линейное уравнение. Имея интегралы однородного уравнения, легко найти интеграл уравнения (27), используя общий метод. Итак, рассмотрим уравнение (27), положив  $\Phi'(x) = 0$ . Запишем его следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{4\beta^4}{x^2(x^4 - \beta^4)} y = 0. \quad (32)$$

Это дифференциальное уравнение типа Фукса с пятью особыми точками  $x = 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ;  $\beta_i$  — корни уравнений  $\xi^4 = \beta^4$ .

Согласно известному методу интегрирования \*\* для определения вида

\* Poincaré Н. *Mécanique Céleste*, t. I. Paris, 1892.

\*\* См. например, J o r d a n С. *Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique*, t. III. Paris, 1913.

рядов, выражающих интегралы дифференциального уравнения, нужно составить уравнение, называемое детерминантным.

Произведя необходимые вычисления, находим, что для особой точки  $x = 0$  детерминантное уравнение будет

$$(r-1)(r+4) = 0.$$

В этом случае два линейно независимых интеграла дифференциального уравнения (32) будут определяться в окрестности точки  $x = 0$  рядами

$$y_1 = x\psi_{01}(x),$$

$$y_2 = \frac{1}{x^4} (\psi_{02}(x) + \ln x\psi_{12}(x)),$$

$\psi_{ij}(x)$  — ряды, расположенные по целым положительным степеням  $x$  и сходящиеся в окрестности точки  $x = 0$ .

Анализируя детерминантное уравнение для особой точки  $x = \beta_i$ , находим

$$r(r-1) = 0;$$

оно дает в окрестности  $x = \beta_i$  следующие два интеграла:

$$y_1 = (x - \beta_i) \psi_{01}(x - \beta_i),$$

$$y_2 = \psi_{02}(x - \beta_i) + \ln(x - \beta_i) \psi_{12}(x - \beta_i),$$

$\psi_{ij}(\xi)$  — ряды, расположенные по целым положительным степеням  $\xi$  и сходящиеся в окрестности точки  $\xi = 0$ .

Коэффициенты рядов легко определить, подставив эти последние в уравнения (32). Не останавливаясь на этом, переходим к анализу уравнения (34). § 4.

## § 6

В этом параграфе мы сравним теоретическую формулу (31) с результатами аэрологических наблюдений.

Проведем это сравнение, исследуя изменения температурного градиента с высотой, согласно нашей формуле и сравнивая это изменение с ходом экспериментальной кривой, полученной при аэрологических наблюдениях.

Заметим, что мы исследуем только ход изменения градиента, потому что, с одной стороны, данные, доставляемые аэрологическими экспериментальными исследованиями, не являются ни достаточно многочисленными, ни достаточно точными и, с другой стороны, до последнего времени величины, входящие в нашу формулу (например, коэффициент поглощения  $k$  и особенно величина  $\mu$ , которая характеризует вертикальные токи воздуха) были определены только с точностью, далекой от удовлетворитель-

ной. Исследуем сначала общий ход изменения температурного градиента, полученного при аэрологических наблюдениях.

Известно, что температурным градиентом по высоте называют выражение  $\partial T/\partial z$ . Обозначим его через  $\text{grad } T$ .

Метеорологические запуски воздушных змеев, а главным образом шаровозондов дают возможность определить  $\text{grad } T$  до высоты 16 км. В табл. 1

Таблица 1

Температурный градиент по Вегенеру

| Высота,<br>км | Grad T,<br>°C | Высота,<br>км | Grad T,<br>°C | Высота,<br>км | Grad T,<br>°C | Высота,<br>км | Grad T,<br>°C |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0,5           | 0,56          | 4,5           | 0,62          | 8,5           | 0,64          | 12,5          | 0,03          |
| 1,5           | 0,48          | 5,5           | 0,68          | 9,5           | 0,52          | 13,5          | 0,00          |
| 2,5           | 0,50          | 6,5           | 0,70          | 10,5          | 0,32          | 14,5          | -0,01         |
| 3,5           | 0,57          | 7,5           | 0,73          | 11,5          | 0,14          | 15,5          | -0,02         |

приведены значения градиента по Вегенеру. Рис. 1, где по оси абсцисс откладываются высота [в км], а по оси ординат — градиенты [в °C], дает представление о ходе кривой градиента. Она имеет три замечательные

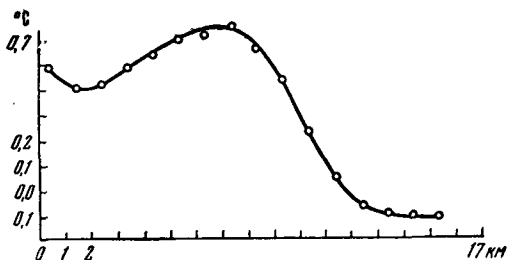


Рис. 1

точки. Одна из них, соответствующая высоте  $z_2$  (между 1 и 2 км), — первый минимум, вторая (высота  $z_0$ , между 6 и 8 км) — точка второго максимума и, наконец, третья (высота  $z_1$ , между 13 и 14 км) — точка, начиная с которой градиент близок к нулю; ее можно назвать точкой стратосферы. Итак, кривая  $\text{grad } T$  идет следующим образом: начиная с земной поверхности, градиент убывает и достигает своего первого минимума на высоте  $z_2$ , после чего он возрастает до максимального значения на высоте  $z_0$  с тем, чтобы упасть до нуля на

высоте  $z_1$  (точка стратосферы). Надо отметить, что число случаев определения  $\text{grad } T$  на больших высотах очень мало, и поэтому до сих пор представляется невозможным установить незначительные изменения градиента в стратосфере.

Можно объяснить существование первого минимума, или, как говорят, возрастания градиента у земной поверхности, явлениями конденсации на некоторой определенной высоте, которые замедляют падение температуры \*, или механическим влиянием земной поверхности \*\*, трением и т. д. Не входя в обсуждение этого вопроса, заметим, что этот минимум не может быть объяснен общими явлениями излучения, он заключается скорее в изменении коэффициента поглощения с высотой, или, говоря иначе, в изменении количества паров воды с высотой \*\*\*. Естественно ожидать, что наши формулы не могут дать точку первого минимума; ниже мы увидим, что они и не дают ее. Напротив, точку максимума и точку стратосферы можно объяснить общими процессами излучения, и действительно наши формулы дают возможность предвидеть возникновение точки максимума и точки стратосферы.

Хотя достоверных результатов определения градиента в стратосфере мало, тем не менее они указывают на медленный рост температуры в стратосфере, т. е. на отрицательные значения градиента в стратосфере.

Результаты, полученные Эмденом при двух различных значениях  $k$  для излучения с большой и малой длиной волны, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Температурный градиент по Эмдену

| Высота,<br>км | Grad $T$ ,<br>°C | Высота,<br>км | Grad $T$ ,<br>°C | Высота,<br>км | Grad $T$ ,<br>°C | Высота,<br>км | Grad $T$ ,<br>°C |
|---------------|------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|
| 0,4           | 2,21             | 2,0           | 1,52             | 3,8           | 0,76             | 10,0          | 0,02             |
| 0,9           | 2,02             | 2,7           | 1,18             | 5,8           | 0,25             | 10,5          | 0,01             |
| 1,4           | 1,78             | 3,1           | 0,98             | 9,5           | 0,03             | 11,5          | 0,01             |

Из данных, приведенных в этой таблице, видно, что распределение температуры воздуха в случае лучистого равновесия приводит к неустойчивости конвективного равновесия в нижних слоях воздуха, в силу чего возникают вертикальные токи. Табл. 3, в которой приведены градиенты,

\* Assman, Berson. Wissenschaftliche Luftfahrten, v. III. 1901.

\*\* Wegener A. Thermodynamik der Atmosphäre. Leipzig, 1912, S. 135.

\*\*\* Emden R. См. выше.

полученные по формуле (31), показывает, что они более близки к действительно наблюдаемым, чем градиенты табл. 2.

Поэтому кажется, что существование вертикальных токов удовлетворительно объясняет изменение температурного градиента с высотой.

Таблица 3

Температурный градиент по формуле (31)

| Высота,<br>км | Grad T, °C | Grad T,<br>по Вегенеру | Высота, км | Grad T, °C | Grad T,<br>по Вегенеру |
|---------------|------------|------------------------|------------|------------|------------------------|
| 0,5           | 0,45       | 0,56                   | 8,5        | 0,70       | 0,64                   |
| 1,5           | 0,57       | 0,48                   | 9,5        | 0,61       | 0,52                   |
| 2,5           | 0,63       | 0,50                   | 10,5       | 0,52       | 0,32                   |
| 3,5           | 0,71       | 0,57                   | 11,5       | 0,42       | 0,14                   |
| 4,5           | 0,75       | 0,62                   | 12,5       | 0,30       | 0,03                   |
| 5,5           | 0,77       | 0,68                   | 13,5       | 0,19       | 0,00                   |
| 6,5           | 0,76       | 0,70                   | 14,5       | 0,02       | -0,01                  |
| 7,5           | 0,74       | 0,73                   | 15,5       | -0,12      | -0,02                  |

В случае стационарных процессов, лучистого равновесия и отсутствия вертикальных токов имеем  $T = \text{const}$ ; исследуем теперь формулу (31), в которой положено  $T_0 = \text{const}$  и которая применима поэтому к данному случаю. Так как  $T = T_0 + \mu T_1$ , имеем

$$\text{grad } T = a [(z + b_1)e^{-\alpha z} - c_1 e^{\alpha z}] = f(z), \quad (32)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$ ,  $\alpha$  — постоянные, зависящие от  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\chi$ ,  $b'$ , т. е. в некотором смысле произвольные.

Если имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \alpha &> 0, \\ b_1 &> c_1, \\ b_1 &< \frac{1}{\alpha} - c_1, \end{aligned} \quad (33)$$

$f(z)$  становится положительной и будет возрастать до своего максимального значения в точке  $z = z_0$ ; затем  $f(z)$  начнет уменьшаться и обратится в нуль при  $z = z_1$ . Для дальнейшего удобно выразить  $b_1$  и  $c_1$  через  $z_0$  и  $z_1$ ; сделаем это с помощью уравнений

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= 0, \\ f(z_1) &= 0. \end{aligned}$$



Произведя вычисления, получим

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\frac{1}{\alpha} + z_1 - z_0}{e^{2\alpha z_0} + e^{2\alpha z_1}}, \\ b_1 &= c_1 e^{2\alpha z_1} - z_1; \end{aligned} \quad (34)$$

$z_1$  и  $z_0$  не могут быть произвольными. В самом деле, их нужно выбрать таким образом, чтобы выполнялись неравенства (33).

Второе неравенство даст

$$(\alpha z_0 - 1)(1 - e^{2\alpha z_1}) - \alpha z_1(1 + e^{2\alpha z_0}) > 0,$$

что проверено для  $z_0$  и  $z_1 > 0$ .

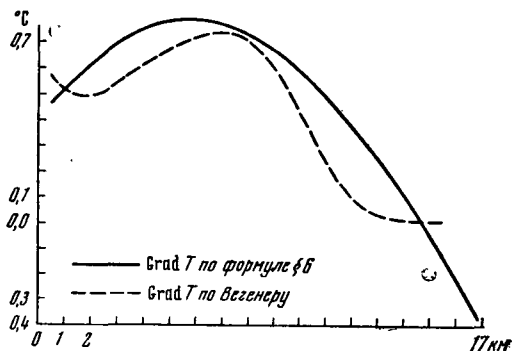


Рис. 2

Неравенство  $b_1 - c_1 > 0$  записывается еще в виде

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{\alpha} + (z_1 - z_0) \right] \frac{e^{2\alpha z_1 - 1}}{e^{2\alpha z_0} + e^{2\alpha z_1}} - z_1 > 0, \\ &\left( \frac{1}{\alpha} - z_0 \right) e^{2\alpha z_1 - 1} - z_1 e^{2\alpha z_0 + 1} > 0. \end{aligned}$$

Обсуждение этого сложного неравенства нельзя провести с желательной простотой и общностью, но если предположить

$$\frac{1}{\alpha} = z_0 + z_1,$$

то оно дает

$$e^{2\alpha z_0} > 2 + \frac{e^{2\alpha z_1}}{z_1},$$

где

$$\xi = e^{\frac{z_1 - z_0}{z_1 + z_0}},$$

откуда

$$\frac{z_1 - z_0}{z_1 + z_0} \geq 0,37.$$

В следующих вычислениях мы примем  $\alpha = 0,048$ ,  $b_1 = 6,24$ ,  $c_1 = 5,11$ ,  $a = 0,322$ .

Используя эти значения, мы получили табл. 3 и построили кривую  $\text{grad } T$  (рис. 2). Сравнение ее с кривой рис. 1 дает удовлетворительные результаты. Если с помощью  $\alpha$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a$  попытаться вычислить значения  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$ , то придем к заключению, что достаточно незначительных вертикальных скоростей, чтобы дать величинам  $\alpha$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a$  значения, приведенные выше.

Частичное объяснение распределения температуры воздуха с высотой, данное здесь, конечно, еще далеко от истины; для того чтобы приблизиться к этой цели, нужен, с одной стороны, более многочисленный экспериментальный материал, а с другой, необходимо учесть зависимость коэффициента поглощения как от длины волны, так и от высоты поглощающего слоя.

*Николаевская аэрологическая обсерватория  
Павловск. Декабрь 1913 г.*

## К ТЕОРИИ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР<sup>9</sup>

Эмден в своей выдающейся работе «О лучистом равновесии и атмосферном излучении» (Münch. Akad. Berlin, 1913, стр. 55) приводит закон вертикального распределения температур в земной атмосфере. Его основной мыслью является предположение о лучистом равновесии земной атмосферы, его основная гипотеза — разложение излучения на две части: коротковолновое и длинноволновое; таким образом по Эмдену коэффициент поглощения зависит от длины волны  $\lambda$ .

Температурные градиенты, которые получаются по теории Эмдена, для нижних слоев больше чем  $1^\circ$  на 100 м; это значит, что конвекционное равновесие слоев, лежащих глубже, неустойчиво. Как справедливо отметил Шмаусс (Meteorol. Z., 1912, N 9), из этого факта следуют конвекционные течения, которые и делают распределение температуры устойчивым.

Небезынтересно рассмотреть вопрос о вертикальном распределении температур в атмосфере, предположив наличие слабых вертикальных токов и явлений, связанных с излучением.

Дифференциальные уравнения, при помощи которых решается эта задача, таковы: три основных уравнения гидродинамики, уравнение неразрывности, уравнение состояния и уравнение подведенной энергии.

Будем употреблять обычные обозначения, т. е. обозначать через  $x, y, z, t$  — координаты ( $z$  — высота) и время, через  $u, v, w$  — компоненты скорости, через  $X, Y, Z$  — компоненты силы, действующей на единицу массы, через  $T, \rho, p$  — температуру, плотность и давление и через  $\varepsilon$  — энергию, подведенную к единице массы. Тогда можно написать следующие шесть уравнений\*:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \\ p &= H\rho T, \\ \rho\varepsilon &= \rho c_v \frac{dT}{dt} + p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(см., например, Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. IV, стр. 116).

Согласно Шварцшильду\*\* и Эмдену\*\*\* можно написать

$$\varepsilon = \kappa(A + B - 2E),$$

где  $\kappa$  — коэффициент поглощения атмосферы; величина  $E$  определяется по закону Стефана — Больцмана:

$$E = cT^4,$$

$A, B$  — потоки энергии, пронизывающие атмосферу сверху вниз и снизу вверх. Эти величины удовлетворяют двум дифференциальным уравнениям.

\* Мы пренебрегаем внутренним трением.

\*\* Schwarzschild K. Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre — Göttinger Nach., 1906.

\*\*\* E m d e n R. Münch. Akad. Berlin, 1913.

Комбинируя эти уравнения, получим следующее уравнение для  $\varepsilon$ :

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\varepsilon}{dz} \right) = \kappa^2 \rho \varepsilon - 2\kappa \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dz} \right) \quad (2)$$

(при условии, что  $\kappa$  не зависит от  $z$ ).

Можно теперь сделать следующие предположения:

$$u = v = 0,$$

$w$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  зависят только от  $z$ ,

$\kappa$  не зависит от  $\lambda$  и  $z$ .

Следовательно, движение стационарное, имеют место только вертикальные токи и мы имеем серое излучение. Система приведенных выше уравнений приводит к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \rho w &= \mu, \\ p &= H \rho T, \\ E &= c T^4, \\ \varepsilon - c_0 w \frac{dT}{dz} + HT \frac{dw}{dz}, \\ w \frac{dw}{dz} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\varepsilon}{dz} \right) &= \kappa^2 \rho \varepsilon - 2\kappa \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dz} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Интегрировать эти уравнения очень трудно. Однако они значительно упростятся, если вместо высоты  $z$  ввести массу  $m = \int_z^a \rho dz$ , хотя результаты будут гораздо яснее, если оставить прежние переменные.

Величины, которые входят в уравнения (3), можно разложить в ряды по степеням  $\mu$ . Следовательно, для того чтобы уже с первыми членами этого разложения иметь хорошее приближение,  $\mu$  должно быть достаточно малым. Для этого и вводится предположение о слабых вертикальных токах. Вводя обозначения

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \mu + \rho_2 \mu^2 + \dots$$

$$T = T_0 + T_1 \mu + T_2 \mu^2 + \dots,$$

$$\omega_n = \frac{\rho_n}{\rho_0},$$

получим после простых вычислений уравнения (4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_n}{dv} + \frac{d \ln \rho_0}{dv} T_n + v \frac{d\omega_n}{dv} &= \Phi_n(v), \\ \frac{dT_n}{dv} + \frac{3}{v} T_n - \omega &= \psi_n(v), \quad \beta = \text{const}, \\ \frac{d^2 T_n}{dv^2} + \frac{4}{v} \frac{dT_n}{dv} + \frac{2\beta^4}{v^2(v^4 - \beta^4)} T_n &= \Phi_n(v), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\Phi_n(v)$ ,  $\psi_n(v)$ ,  $\Phi_n(v)$  — известные функции переменной  $v$  и  $T_0, \dots, T_{n-1}$ ,  $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$ ;  $z$  и  $v$  связаны вспомогательным уравнением

$$\frac{dz}{dv} = - \frac{4H}{g} \frac{x^4}{x^4 - \beta^4}. \quad (5)$$

Последнее из уравнений (4) — уравнение Фукса, оно может быть легко проинтегрировано с помощью простого ряда. Второе уравнение (4) определяет  $\omega_n$ , и последовательно можно определить  $\rho_i$  и  $T_i$ . Подробнее этот вопрос можно здесь не обсуждать.

В особом простейшем случае, когда  $T$  — постоянная для  $\mu = 0$ , т. е. когда атмосфера в положении равновесия изотермична, можно написать следующее выражение

$$\text{grad } T = - \frac{dT}{dz} = a [(z + b_1) e^{-\alpha z} - c_1 e^{\alpha z}], \quad (6)$$

где  $a$ ,  $\alpha$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  — постоянные.

При помощи этих формул легко можно вычислить температурные градиенты.

Для  $\alpha = 0,048$ ,  $a = 0,322$ ,  $b_1 = 6,24$ ,  $c_1 = 5,11$  получается следующая таблица:

| Высота $z$ , км | Grad $T$ , по уравнению (6) | Grad $T$ , по Вегенеру | Высота $z$ , км | Grad $T$ , по уравнению (6) | Grad $T$ , по Вегенеру |
|-----------------|-----------------------------|------------------------|-----------------|-----------------------------|------------------------|
| 0,5             | 0,45                        | 0,56                   | 8,5             | 0,70                        | 0,64                   |
| 1,5             | 0,57                        | 0,48                   | 9,5             | 0,61                        | 0,52                   |
| 2,5             | 0,63                        | 0,50                   | 10,5            | 0,52                        | 0,32                   |
| 3,5             | 0,71                        | 0,57                   | 11,5            | 0,42                        | 0,14                   |
| 4,5             | 0,75                        | 0,62                   | 12,5            | 0,30                        | 0,03                   |
| 5,5             | 0,77                        | 0,68                   | 13,5            | 0,19                        | 0,00                   |
| 6,5             | 0,76                        | 0,70                   | 14,5            | 0,02                        | —0,01                  |
| 7,5             | 0,74                        | 0,73                   | 15,5            | —0,12                       | —0,02                  |

Можно видеть, что градиенты этой таблицы не очень отличаются от средних температурных градиентов по Вегенеру (Wegener. *Thermodynamik der Atmosphäre*. S. 129), которые помещены в таблице рядом с первыми.

Замечательно, что первый относительный минимум для средних температурных градиентов (который, вероятно, зависит от содержания пара в атмосфере) не имеет места для нашего так называемого «теоретического температурного градиента». Это понятно, так как мы высказали предположение, что коэффициент поглощения  $\kappa$  не зависит от  $z$ , т. е. пренебрегли изменением содержания паров воды с высотой.

Мне, к сожалению, не удалось доказать сходимость ряда, расположенного по степеням  $\mu$ . К этому случаю нельзя применить известную теорему Пуанкаре \*. Возможно, эти уравнения удобнее интегрировать по методу Рунге.

Эта маленькая заметка имеет целью привлечь внимание к новым методам теоретического обоснования вертикального распределения температур.

*Павловск, 16 декабря 1913 г.*

## О ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В АТМОСФЕРЕ<sup>10</sup>

### § 1

1. Вопрос об устойчивости равновесия атмосферы в вертикальном направлении находится в тесной связи с величиной и знаком так называемого вертикального температурного градиента, т. е. частной производной температуры по высоте, взятой со знаком минус. При этом обычно рассматривают случай адиабатических движений в атмосфере, т. е. случай отсутствия притока энергии, и изучают, что произойдет с частицей воздуха, получившей известный начальный импульс. Для упрощения дела эту частицу рассматривают как тело, плавающее в окружающей массе воздуха. Подобное схематическое представление атмосферных вертикальных течений приводит к установлению известного критерия (являющегося не вполне правильным), дающего возможность судить, когда атмосфера находится в устойчивом равновесии по вертикальному направлению, когда равновесие это неустойчиво и когда равновесия вовсе не существует.

2. Направим ось  $z$  вертикально вверх и начало координат поместим в данном месте на земной поверхности; обозначим через  $T$  температуру в

---

\* Poincaré H. *Mécanique Céleste*, t. I. Paris, 1912.

данной точке атмосферы, вертикальным температурным градиентом  $\gamma$  мы называем величину

$$\gamma = -\frac{dT}{dz}.$$

Исследования, произведенные в направлении и по методу, указанному в предыдущем пункте, привели к следующему заключению.

Существуют два значения градиента — так называемый адиабатический градиент  $\gamma_a$  и предельный градиент  $\gamma_L$ , обладающие следующими свойствами:

1) если  $\gamma < \gamma_a$ , то частица воздуха, получив начальный импульс (вертикальную скорость), будет стремиться уменьшить величину своей скорости («устойчивое» равновесие);

2) если  $\gamma = \gamma_a$ , то частица воздуха, получив начальный импульс, будет стремиться сохранять свою вертикальную скорость неизменной («безразличное» равновесие);

3) если  $\gamma_L \geq \gamma > \gamma_a$ , то частица воздуха, получив начальный импульс, будет стремиться увеличить свою вертикальную скорость; не получая, однако, начального импульса, частица останется в покое («неустойчивое» равновесие);

4) если  $\gamma > \gamma_L$ , то частица воздуха, даже не получив начального импульса, будет стремиться падать вертикально вниз (отсутствие равновесия).

Для сухого воздуха или для воздуха, содержащего водяные пары, далекие от насыщения (так что при понижении температуры не происходит конденсации паров воды), мы имеем

$$\gamma_a = 0,98 \cdot 10^{-2},$$

$$\gamma_L = 3,4 \cdot 10^{-2} *.$$

Если принять во внимание случай не сухого, а влажного воздуха и ввести в вычисление скрытую теплоту парообразования, то оказывается, что величина  $\gamma_a$  значительно уменьшается и в обычных условиях близка к  $0,5 \cdot 10^{-2} **$ .

3. Наблюдения над вертикальным температурным градиентом<sup>-</sup> показывают, что обычно он значительно ниже  $\gamma_a$  для сухого воздуха; лишь в совершенно исключительных случаях он достигает величины  $\gamma_L$ , при этом такие случаи почти всегда внушают опасения относительно недостаточной точности наблюдений. Если, однако, принять во внимание, что в

\* Здесь, как и в дальнейшем, мы все величины будем измерять в так называемой геофизической системе единиц, принимающей за единицу длины метр, за единицу массы тонну, за единицу времени секунду и измеряющей температуру в абсолютной шкале.

\*\* См. H a n n J. Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig, 1906, S. 593.

воздухе всегда имеют место процессы конденсации паров, т. е.  $\gamma_a = \gamma'_a = 0,5 \cdot 10^{-2}$ , то оказывается, что случаи, когда вертикальный температурный градиент превышает адиабатический, довольно часты. Именно в таких случаях и развиваются вертикальные течения, играющие столь обширную роль в механизме земной атмосферы\*.

Косвенные указания на близкую связь величины температурного градиента и вертикальных течений в атмосфере дают наблюдения над взаимоотношением порывистости ветра и вертикального температурного градиента. Согласно исследованию Barkow'a, порывистость ветра возрастает с возрастанием температурного градиента. Другое общеизвестное указание на связь вертикальных течений и температурного градиента имеется в условиях образования *simulus'*ов в околополуденные часы дня, наличии значительных порывов ветра в эти часы дня (подмечено во время многочисленных полетов на аэропланах) и возрастания вертикального температурного градиента в эти часы.

## § 2

1. Постановка и решение вопроса об устойчивости атмосферы в вертикальном направлении, изложенные в предыдущем параграфе, не могут считаться достаточно строгими с точки зрения аналитической механики. Самое понятие об устойчивости равновесия атмосферы имеет в указанной выше метеорологической постановке вопроса совершенно иной характер по сравнению с общепринятым представлением устойчивости равновесия\*\*. Кроме того, метод вывода критерия адиабатического устойчивого равновесия с точки зрения гидродинамики не может считаться безукоризненным. Вследствие этого представилось бы весьма желательным строго рассмотреть вопрос об устойчивости атмосферы в вертикальном направлении. Я, однако, в настоящей работе, оставляя указанный вопрос в стороне, разберу влияние другого обстоятельства, сопровождающего движение в атмосфере и не принимаемого обычно во внимание.

Безусловно, случаи отсутствия притока энергии представляют собой случаи совершенно исключительные; нормальными являются случаи, когда потоки энергии непрерывно пронизывают земную атмосферу. Мы увидим ниже, что предположение вертикальных течений в атмосфере без притока энергии (адиабатических вертикальных течений) требует, чтобы вертикальный температурный градиент превышал бы адиабатический на ничтожно

\* К величайшему моему сожалению, из-за нынешней мировой катастрофы я лишен возможности воспользоваться результатами интересной статистической работы над градиентами, превосходящими адиабатический ( $\gamma_a$ ), которая производилась в геофизическом институте в Лейпциге одним из учеников профессора Бьеркнеса.

\*\* Ляпунов в А. М. Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892.



малую величину, или чтобы эти течения были бы чудовищны по своим скоростям.

Вследствие изложенного представляется чрезвычайно важным изучение вертикальных течений в атмосфере, происходящих под влиянием притока энергии; изучение адиабатического равновесия влажного воздуха есть уже определенный шаг в указанном направлении. Отсутствие изучения влияния притока энергии на вертикальные течения атмосферы представляет наиболее неудовлетворительный пункт изучения этих атмосферных явлений. Настоящая работа будет посвящена попытке, при возможно более общих предположениях, осветить и решить вопрос о связи вертикальных течений в атмосфере с притоком энергии.

2. Для изучения вопроса, поставленного в конце предыдущего пункта, в целях упрощения задачи мы предположим, что горизонтальные течения вовсе отсутствуют и что все величины, определяющие течение воздуха, зависят только от высоты  $z$  и не зависят от времени  $t$ , иначе говоря, предположим, что движение стационарное.

Что касается граничных условий, то здесь предположение о равенстве нулю вертикальных течений на поверхности земли (предполагая поверхность земли идеальной горизонтальной плоскостью) привело бы к полному отсутствию вертикальных течений в атмосфере. Вот почему мы предположим, что вертикальные течения на границе не равны нулю; указанное предположение, конечно, более соответствует действительности и отвечает тому представлению, что атмосфера делится на два слоя. Нижний слой, прилегающий к земле, обладает горизонтальными течениями, и к нему, таким образом, не применимо указанное выше ограничение нашей задачи.

В другом слое, находящимся над ним, уже нет горизонтальных течений, и в этом слое вследствие течений из нижнего слоя атмосферы имеет место граничная вертикальная скорость. Я рассматриваю именно этот второй атмосферный слой, считая нижнюю его границу за поверхность, где имеют место граничные условия; должно заметить, что нижний слой в атмосфере, вероятно, измеряется несколькими метрами\*. С точки зрения гидродинамики указанные соображения относительно граничных условий можно устранить, рассматривая явление в безграничной жидкости.

3. Решение и исследование гидродинамической задачи, сформулированной в предыдущем пункте, приводит к следующим результатам при условии, что мы ограничиваемся изучением вертикальных скоростей, не превышающих 10—15 м/сек, что с излишком достаточно для исследования

---

\* Образование *simulus'*ов над слоем облаков иллюстрирует наше представление об указанных течениях в атмосфере. (См. Wegener A. *Thermodynamik der Atmosphäre*. Leipzig, 1911, S. 204).

нашего вопроса, так как такие экстраординарные скорости могут иметь место разве в исключительных по своей силе смерчах\*:

1) вертикальные скорости в атмосфере можно разделить на два класса: внешние, обращающиеся в нуль, коль скоро приток энергии отсутствует, и внутренние, не обращающиеся в нуль при отсутствии притока энергии;

2) существует особое положительное значение вертикального температурного градиента  $\gamma_m$ , названное нами критическим вертикальным градиентом, обладающее таким свойством, что при вертикальных температурных градиентах, меньших критического, существует одно значение вертикальной скорости, отвечающее условиям задачи, причем скорость эта будет внешней; наоборот, при вертикальных температурных градиентах, больших критического, могут существовать три значения вертикальной скорости, отвечающих условиям задачи, причем два из этих значений будут внутренними и одно внешним;

3) при вертикальном температурном градиенте, большем критического, внешние вертикальные скорости чрезвычайно быстро возрастают с увеличением градиента, достигая при градиентах, сколько-нибудь превышающих  $\gamma_m$ , величины, большей 10—15 м/сек;

4) критический вертикальный температурный градиент больше адиабатического, причем разность между ними стремится к нулю, коль скоро приток энергии стремится к нулю;

5) каждому определенному положительному (отрицательному) притоку энергии соответствует особая положительная (отрицательная) вертикальная скорость, названная нами инверсионной; эта скорость такая, что при вертикальных скоростях, лежащих между нулем и инверсионной, температурный градиент отрицательный, т. е. имеет место инверсия в атмосфере.

Следует отметить, что указанное выше положение неприменимо, если нет вертикальных течений. В этом случае имеет место равновесие, причем при вертикальных температурных градиентах, меньших предельного, плотность воздуха убывает, а для градиентов, больших предельного, возрастает с высотой. Подобное, как увидим в § 8, совершенно строгое рассуждение находится в известном противоречии с общепринятым представлением об отсутствии равновесия в атмосфере, в которой плотность воздуха возрастает с высотой. Приходится, однако, признать, как это более подробно выяснено в § 8, что общепринятое представление неправильно и что равновесие атмосферы по вертикальному направлению возможно (как при наличии, так и при отсутствии притока энергии) даже и при градиен-

\* Впрочем, развитые нами формулы применимы к любым скоростям; указанное ограничение мы делаем в целях более ясной и отчетливой формулировки наших положений.

тах, больших предельного, хотя, по-видимому, в этом случае равновесие будет неустойчивым в том смысле, в каком этот термин применяется в классической механике.

### § 3

1. В настоящем параграфе мы займемся выводом уравнения, связывающего приток энергии с изменением величин, характеризующих состояние данной частицы атмосферы.

Условимся измерять количество тепловой энергии, принимая за единицу этой энергии то количество теплоты, которое выражается  $E$  единицами энергии в геофизической системе единиц, где  $E = 419 \cdot 10^5$  (механический эквивалент работы). Для краткости условимся называть эту единицу теплоты геофизической калорией; геофизическая калория весьма близка к количеству теплоты, необходимому для нагревания  $10^4$  г воды на  $1^\circ \text{К}$  \*. Геофизическая единица энергии будет равна  $A$  геофизических калорий, где  $A = 1/E = 239 \cdot 10^{-10}$ . Величины  $A$  и  $E$  — величины, не имеющие размерности.

Рассматривая определенную совокупность частиц жидкости, занимающих объем  $\tau$ , условимся количество тепловой энергии, получаемой этим объемом в единицу времени, обозначать через  $\varepsilon$ . Эту величину  $\varepsilon$  можно назвать для краткости тепловой мощностью; она, очевидно, будет зависеть от времени  $t$ ; наша совокупность жидких частиц за время от момента  $t_0$  до момента  $t$  получит количество тепловой энергии, равное

$$\int_{t_0}^t \varepsilon dt.$$

Величину  $\varepsilon_0 = \varepsilon/\tau$ , где  $\tau$  есть величина объема, занимаемого нашей совокупностью жидких частиц, будем называть средней плотностью тепловой мощности, а предел  $\varepsilon_0$ , когда  $\tau$  стремится к нулю, будем называть плотностью тепловой мощности в данной частице жидкости и обозначать через  $\varepsilon_0$ . Из только что высказанных определений ясно, что

$$\varepsilon = \int_{(\tau)} \varepsilon_0 d\tau^{**}.$$

\* Нетрудно видеть, что геофизическая единица энергии есть 1000 дж, а геофизическая калория равна  $10^7$  ккал.

\*\* Обозначая размерности длины, массы, температуры и времени через  $L$ ,  $M$ ,  $T$  и  $\theta$ , найдем, что размерность  $\varepsilon_0$  будет

$$[\varepsilon_0] = [ML^{-1}T^{-3}].$$

2. Прежде чем перейти к установлению основного уравнения, связывающего  $\epsilon_0$  с величинами, характеризующими состояние нашей атмосферы, уравнения, непосредственно вытекающего из первого закона термодинамики, постараемся выяснить какого порядка величина  $\epsilon_0$  для процессов, играющих роль в нашей атмосфере. Выяснение этого обстоятельства является чрезвычайно существенным в вопросах применения наших выводов к атмосферным явлениям \*.

Возможны три сорта процессов, дающих известный приток энергии. Теплота может получаться: 1) излучением от солнца, 2) теплопроводностью и 3) внутренними процессами, происходящими в атмосфере, из коих самый важный и обширный источник получения тепла — это конденсация паров воды. Оценим, какое влияние на  $\epsilon_0$  могут иметь эти три источника притока тепла.

Примем для грубого подсчета, что 1 м<sup>3</sup> поглощает в секунду 0,028 кал. Подобные числа получаются из наблюдений обсерватории на Monte Rosa \*\*. В выбранных нами геофизических единицах будем иметь

$$\epsilon_0 = 2,8 \cdot 10^{-12}.$$

Переходя ко второму способу получения тепла, обозначим абсолютную температуру воздуха через  $T$ , предполагая, что  $T$  зависит только от высоты  $z$ , и обозначая через  $k$  коэффициент внутренней теплопроводности воздуха, найдем согласно основным уравнениям аналитической теории тепла

$$\epsilon_0 = k \frac{d^2 T}{dz^2} ***$$

По лабораторным исследованиям,  $k = 5 \cdot 10^{-5}$  (принимая CGS систему и за единицу тепловой энергии беря малую калорию, для геофизической системы единиц получим  $k = 5 \cdot 10^{-13}$ , за единицу теплоты принимаем геофизическую калорию). Данные наблюдений показывают, что обычно  $d^2 T/dz^2$  есть величина порядка  $10^{-6}$ ; таким образом для  $\epsilon_0$  полу-

\* Попытка установить порядок различных величин, встречающихся в метеорологии, предпринята в статье Фридмана и Хессельберга «Grossenordnungen der meteorologischen Elementen», напечатанной во время войны в Германии. К сожалению, этой статьи у меня под рукой не имеется, а рукопись моя пропала во время гражданской войны в России в 1918 г., вследствие чего я лишен возможности пользоваться числовыми данными указанной работы.

\*\* Подобное грубое приближение достаточно для целей оценки порядка величины  $\epsilon_0$ . (H a n n J. Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig, 1906, S. 24; Л ю б о с л а в с к и й Г. А. Основания учения о погоде. СПб., 1915, стр. 45).

\*\*\* Легко видеть, что размерность коэффициента внутренней теплопроводности  $k$  будет

$$[k] = [MLT^{-3} \theta^{-1}].$$

чаем величину

$$\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^{-19}.$$

Следует, однако, отметить, что необходимо с величайшей осторожностью прилагать величины физических постоянных, определенные для воздуха в лабораторных условиях, к явлениям, происходящим в обстановке атмосферной действительности. Как показали исследования Хессельберга, коэффициент внутреннего трения воздуха  $\eta$ , определенный путем изучения атмосферных движений ( $\eta_{\text{атм}}$ ), в  $5 \cdot 10^5$  раз больше того же коэффициента, определенного путем лабораторных исследований ( $\eta_{\text{лаб}}$ ):

$$\eta_{\text{атм}} = 5 \cdot 10^5 \eta_{\text{лаб}}.$$

По-видимому, то же соотношение имеет место и для коэффициента внутренней теплопроводности. В самом деле, согласно исследованиям Максвелла, Клаузиуса, Больцмана и др. \*, с помощью кинетической теории газов оказалось возможным связать между собой  $k$  и  $\eta$  соотношением

$$k = \varepsilon \eta c_v,$$

где  $\varepsilon$  — постоянная,  $c_v$  — теплоемкость газа при постоянном объеме.

Из этой формулы следует, что

$$k_{\text{атм}} = 5 \cdot 10^5 k_{\text{лаб}} = 25 \cdot 10^{-8},$$

откуда, принимая во внимание этот коэффициент внутренней теплопроводности, найдем величину плотности тепловой мощности

$$\varepsilon_0 = 25 \cdot 10^{-13},$$

эта величина близка по своему порядку к притоку тепла, получаемому от излучения Солнца.

Элементарный подсчет, которого мы здесь не приводим, показывает, что  $\varepsilon_0$ , получаемая путем конденсации паров, имеющих в атмосфере, будет также порядка  $10^{-13}$ . Таким образом, все разобранные нами случаи притока энергии дают для  $\varepsilon_0$  величину порядка  $10^{-12}$  —  $10^{-13}$ ; это будет иметь место при некоторых средних условиях в атмосфере. Возможны, однако, случаи, когда  $\varepsilon_0$  будет значительно выше  $10^{-13}$ ; мы будем в дальнейшем предполагать, что  $\varepsilon_0$  лежит между  $10^{-9}$  и  $10^{-13}$ , хотя наши формулы будут конечно применимы для значительно более широкого интервала для  $\varepsilon_0$ .

3. Обозначим полные производные по времени знаком  $d/dt$ , частные производные по времени через  $\partial/\partial t$  и по координате  $z$  через  $\partial/\partial z$ . Пусть  $T$ ,

\* Х в о л ь с о н О. Д. Курс физики, т. III. СПб., 1912, стр. 338.

$p$ ,  $\Omega$  и  $\rho$  будут температура, давление, удельный объем и плотность воздуха; обозначая через  $c_p$ ,  $c_v$  теплоемкость при постоянном давлении и объеме, будем иметь на основании первого закона термодинамики

$$\int_{t_0}^t dt \int_{(\tau)} \varepsilon_0 d\tau = \int_{t_0}^t dt \int_{(\tau)} \left( c_v \frac{dT}{dt} + A p \frac{d\Omega}{dt} \right) \rho d\tau,$$

откуда обычным приемом перехода к пределу найдем

$$\Omega \varepsilon_0 = c_v \frac{dT}{dt} + A p \frac{d\Omega}{dt} \quad *). \quad (1)$$

Замечая, что

$$p\Omega = RT,$$

где  $R$  — газовая постоянная, равная в геофизической системе единиц 293, и что согласно известной формуле термодинамики

$$c_p - c_v = AR,$$

найдем

$$\Omega \varepsilon_0 = c_v \frac{dT}{dt} - A \Omega \frac{dp}{dt}. \quad (2)$$

Отметим, что в этих формулах

$$c_p = 24 \cdot 10^{-6} \text{ и } c_v = 17 \cdot 10^{-6} \quad **.$$

Посмотрим, к какой величине для  $\varepsilon_0$  приведет формула (2), если мы предположим, что происходят нормальные, хотя и быстрые изменения давления и температуры. Положим, что воздух находится в покое, тогда

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}; \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t};$$

из формулы (2) получим

$$\varepsilon_0 = \frac{c_p}{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} - A \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Пусть давление падает на 1,8 мбар (0,18 геофизических единиц давления) в час, а температура одновременно повышается на 0,18° в час, что дает для притока энергии выражение

$$\varepsilon_0 = 2,7 \cdot 10^{-12}.$$

\* Помня, что  $1/\rho = \Omega$ .

\*\* Размерность введенных нами величин:  $[R] = [L^2 T^{-2} \theta^{-1}]$ ,  $[c_p] = [c_v] = [L^2 T^{-2} \theta^{-1}]$ .

Эта величина, как видно, близка по своему порядку к вычисленной нами выше для  $\varepsilon_0$ . Рассмотрение предыдущей формулы показывает, между прочим, что на больших высотах приток энергии определяется главным образом изменением давления, тогда как у поверхности Земли изменение температуры имеет то же значение, что и изменение давления.

Из сказанного ясно, как сложен вопрос о влиянии притока тепла на атмосферные явления. В самом деле, все способы получения тепла дают почти одинаковые значения для  $\varepsilon_0$ , значит, при рассмотрении дифференциальных уравнений атмосферных движений приходится все эти способы притока тепла принимать во внимание, что непомерно усложняет задачу и не позволяет детально разобраться в метеорологических явлениях.

## § 4

1. Перейдем теперь к установлению основных дифференциальных уравнений задачи, сформулированной нами в § 2.

Предварительно, однако, выведем общую формулу, связывающую температурный градиент с вертикальными течениями и с притоком энергии. Направим, как было указано ранее, ось  $z$  вертикально вверх, оси  $x$  и  $y$  проведем в горизонтальной плоскости, начало координат выберем на земной поверхности. Пусть  $u, v, w$  — составляющие скоростей в атмосфере по выбранным координатным осям,  $g$  — ускорение силы тяжести ( $g = 9,81$ ); при этих обозначениях три уравнения гидродинамики, уравнения неразрывности, состояния газа и притока тепла напишутся следующим образом\*:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\Omega \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{dv}{dt} &= -\Omega \frac{\partial p}{\partial y}, & \frac{dw}{dt} &= -g - \Omega \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial \ln \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \ln \Omega}{\partial y} + w \frac{\partial \ln \Omega}{\partial z}, \\ p\Omega &= RT, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0 \Omega = c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - A \Omega \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right)^*.$$

Определяя из этих уравнений  $\partial w / \partial z$  и  $\Omega \frac{\partial p}{\partial z}$ , подставляя полученные для этих величин выражения в последнее уравнение, найдем, обозначая  $-\partial T / \partial z$  через  $\gamma$ , основную формулу

$$\gamma = \gamma_a \frac{1 - \frac{\eta}{w} \left( 1 - \frac{w^2}{RT} \right) + \alpha w + \beta^{**}}{1 - \xi w^2}. \quad (3)$$

\* Дальнейшие результаты не изменятся, если мы примем во внимание главную часть отклоняющей силы Земли.

\*\* Для вывода этой формулы мы должны были предположить  $w \neq 0$ ; при  $w = 0$  все наши рассуждения неприменимы.

Здесь величины  $\gamma_a$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\gamma_a &= \frac{Ag}{c_p} \text{ (адиабатический градиент)} \\ \zeta &= \frac{1}{\kappa RT}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4 \\ \eta &= \frac{\varepsilon_0 \Omega - S}{c_p \gamma_a}, \\ S &= c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - A \Omega \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\ \alpha &= \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \ln \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \ln \Omega}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \beta &= \frac{1}{g} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

В настоящей статье мы не будем разбирать общую формулу (3), а применим ее к задаче, указанной в § 2.

2. В этом случае мы имеем стационарное движение, в котором отсутствуют горизонтальные течения; таким образом, в этом случае будем иметь

$$u = v = 0$$

и значит

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Кроме того, в силу стационарности движения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Принимая во внимание все эти обстоятельства, перепишем формулу (3) в следующем значительно упрощенном виде:

$$\gamma = \gamma_a \frac{1 - \frac{\eta}{w} \left( 1 - \frac{w^2}{RT} \right)}{1 - \zeta w^2}, \quad (4)$$

где  $\eta = \frac{\varepsilon_0 \Omega}{c_p \gamma_a} = \frac{R}{c_p \gamma_a} \frac{T \varepsilon_0}{P}$ , а значения остальных параметров те же, что и в предыдущем пункте.

Все наши дальнейшие рассуждения будут касаться исследования формулы (4), т. е. зависимости  $\gamma$  от  $w$  при постоянных параметрах  $p$  и  $T$ . Из дифференциальных уравнений нашей задачи следует, что мы можем задавать любые значения  $w$ ,  $T$ ,  $p$  для значения  $z = z_0$ . При этих, так сказать, начальных (правильнее, граничных) условиях проинтегрируем дифференциальные уравнения, в которые в силу стационарности и прочих



ограничительных условий будет входить лишь одна независимая переменная  $z$ . Подставляя  $T$ ,  $p$ ,  $w$  в формулу (4), получим выражение вертикального температурного градиента на высоте  $z = z_0$  в зависимости от этих граничных условий. Таким образом, в конце концов дальнейшее исследование формулы (4) сведется в известной мере к изучению зависимости интеграла дифференциальных уравнений от постоянных интегрирования \*.

Практически, следовательно, формула (4) позволяет связать значение температурного градиента с давлением, температурой, вертикальной скоростью и притоком энергии на данной высоте в атмосфере.

3. Выясним величины коэффициентов при различных степенях в формуле (4).

Величина  $\zeta$  чрезвычайно мала. В табл. 1 приведены значения  $\zeta$  для температур от 253 до 293° K; в этой же таблице помещены значения  $1/\zeta$  и  $w_L = 1/\sqrt{\zeta}$ , которые будут нам нужны в дальнейшем.

Таблица 1

| $T, ^\circ K$ | $\frac{1}{\zeta} \cdot 10^{-5}$ | $w_L$ | $\zeta \cdot 10^8$ |
|---------------|---------------------------------|-------|--------------------|
| 253           | 1,04                            | 322   | 0,96               |
| 263           | 1,08                            | 329   | 0,92               |
| 273           | 1,12                            | 335   | 0,89               |
| 283           | 1,16                            | 341   | 0,86               |
| 293           | 1,20                            | 346   | 0,83               |

Как видно из этой таблицы, величина  $\zeta$  весьма мало меняется в практически важном интервале изменений. При грубых оценках формул можно считать  $\zeta = 10^{-5}$  \*\*.

Таблица 2

| $T, ^\circ K$ | Коэффициент внутреннего трения воздуха $\eta$ |                       |                       |                             |                       |                       |                             |                       |                       |
|---------------|-----------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|
|               | $p = 100 \text{ мм рт. ст.}$                  |                       |                       | $p = 50 \text{ мм рт. ст.}$ |                       |                       | $p = 10 \text{ мм рт. ст.}$ |                       |                       |
|               | $\epsilon = 10^{-8}$                          | $\epsilon = 10^{-12}$ | $\epsilon = 10^{-15}$ | $\epsilon = 10^{-8}$        | $\epsilon = 10^{-12}$ | $\epsilon = 10^{-15}$ | $\epsilon = 10^{-8}$        | $\epsilon = 10^{-12}$ | $\epsilon = 10^{-15}$ |
| 253           | 3,14                                          | $3,14 \cdot 10^{-3}$  | $3,14 \cdot 10^{-6}$  | 6,23                        | $6,23 \cdot 10^{-3}$  | $6,23 \cdot 10^{-6}$  | 31,4                        | $31,4 \cdot 10^{-3}$  | $31,4 \cdot 10^{-6}$  |
| 273           | 3,40                                          | $3,40 \cdot 10^{-3}$  | $3,40 \cdot 10^{-6}$  | 6,79                        | $6,79 \cdot 10^{-3}$  | $6,79 \cdot 10^{-6}$  | 34,0                        | $34,0 \cdot 10^{-3}$  | $34,0 \cdot 10^{-6}$  |
| 293           | 3,64                                          | $3,64 \cdot 10^{-3}$  | $3,64 \cdot 10^{-6}$  | 7,28                        | $7,28 \cdot 10^{-3}$  | $7,28 \cdot 10^{-6}$  | 36,4                        | $36,4 \cdot 10^{-3}$  | $36,4 \cdot 10^{-6}$  |

\* Заметим, что только что приведенное соображение неприменимо к формуле (3).

\*\* Вообще, как мы увидим ниже, все наши величины в интервале температур, встречающихся в атмосфере, очень мало меняются с изменением температуры.

В табл. 2 даны значения  $\eta$  для тех же температур, для давлений, равных 100, 50, 10 (т. е. для давлений от 750 до 75 мм рт. ст.), и для различных  $\varepsilon_0$ .

Значения  $\eta$  весьма слабо зависят от  $T$  (в нашем интервале); для  $\varepsilon_0 = 10^{-12}$ — $10^{-13}$  они порядка  $10^{-2}$ — $10^{-4}$ .

Третий коэффициент, входящий в нашу формулу, равен  $\eta/RT$  и, как легко заметить, вовсе не зависит от  $\zeta$ ; он более чем в 70 000 раз меньше  $\eta$ , и, как мы увидим в следующем параграфе, для нашего интервала вертикальных скоростей можно пренебречь членом с первой степенью  $w$  в числителе формулы (4). Вследствие этого ниже приведены значения  $\alpha = \eta/RT$  лишь для  $\varepsilon_0 = 10^{-9}$ ,  $10^{-12}$ ,  $10^{-15}$  и для  $p = 100$ .

|                              |                      |                      |                       |
|------------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| $\varepsilon_0$ . . . . .    | $10^{-9}$            | $10^{-12}$           | $10^{-15}$            |
| $\alpha = \eta/RT$ . . . . . | $4,25 \cdot 10^{-4}$ | $4,25 \cdot 10^{-7}$ | $4,25 \cdot 10^{-10}$ |

4. Приложим формулу (4) к случаю адиабатических движений; этом случае  $\varepsilon_0 = 0$  и формула (4) переписется таким образом:

$$\gamma = \frac{\gamma_a}{1 - \zeta w^2}. \quad (5)$$

Наиболее просто изучить зависимость  $\gamma$  от  $w$ , построив соответственный график и отложив по оси абсцисс  $w$ , а по оси ординат  $\gamma$ . Полученная кривая (рис. 1) \* имеет две асимптоты, параллельные оси  $\gamma$ :

$$w = w_L \text{ и } w = -w_L, \text{ где } w_L = \frac{1}{\sqrt{\zeta}}$$

и одну асимптоту — ось  $w$ . Наличие вертикальных течений (вниз или вверх) требует, чтобы градиент был больше адиабатического, однако ввиду весьма малой величины  $\zeta$  самое небольшое отклонение градиента от адиабатического вызывает непомерно большие вертикальные течения. Для того чтобы  $w$  было не больше десяти, необходимо, чтобы (при  $\zeta = 10^{-5}$ )  $\gamma$  отличалось от  $\gamma_a$  меньше, чем на одну тысячную адиабатического градиента. Отсюда можно непосредственно заключить, что при отсутствии притока энергии температурный вертикальный градиент должен быть или весьма близок к адиабатическому (практически совпадать с адиабатическим) или вертикальных течений не будет. Так как на самом деле и вертикальные течения в атмосфере имеют место и вертикальный температурный градиент значительно отличается от адиабатического, то само собой разумеется, что представ-

\* Первый чертеж дает только представление о ходе нашей кривой. Осуществить на чертеже формулу (5) невозможно по типографским причинам.

ление об отсутствии в атмосфере притока энергии не может быть правильным даже и в первом приближении. Со времени классических работ Herz'a, Bezold'a и других \* принималась во внимание скрытая теплота

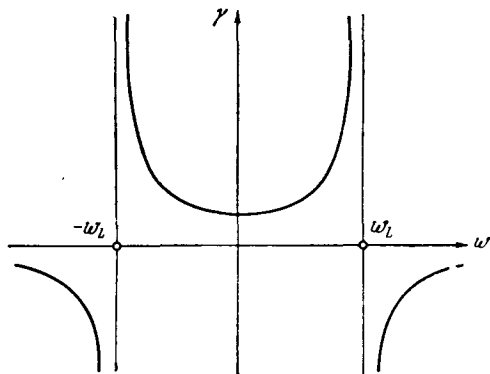


Рис. 1

парообразования и ожигения воды, до сего времени, однако, влияние иных источников энергии в атмосфере не изучалось. В одной из следующих работ я разберу влияние притока тепла путем теплопроводности на вертикальные течения и температурный градиент.

## § 5

1. Переходя к исследованию формулы (4) в общем случае, когда имеет место приток энергии, упростим прежде всего нашу формулу. Для этого заметим, что член в числителе правой части формулы (4), содержащий первую степень скорости  $w$ , даже при скорости в 15 м/сек, т. е. в самом неблагоприятном случае, не превышает  $1/2\%$  от того члена числителя, который содержит  $w$  в степени  $-1$ ; в нормальных случаях этот член не достигает и одной тысячной указанной величины, поэтому в целях упрощения дальнейшего рассуждения исключим этот член из рассмотрения и перепишем формулу (4) в более простом виде:

$$\gamma = \gamma_a \frac{1 - \frac{\eta}{w}}{1 - \xi w^2}; \quad (6)$$

\* Herz H. Graphische Methode zur Bestimmung der adiabatischen Zustandsänderungen feuchtes Luft.— Meteorol. Z., 1884.

Bezold. Zur Thermodynamik der Atmosphäre, 1906. Neuhoff. Adiabatische Zustandsänderungen feuchtes Luft, 1900.

изучением формулы (6) мы и займемся в настоящем параграфе \*. При исследовании формулы (6) заметим, что  $\zeta$  есть величина положительная и, как мы видели, очень малая, что же касается  $\eta$ , то она может быть как положительной, так и отрицательной, смотря по тому, получаем ли мы энергию или теряем ее ( $\varepsilon_0 > 0$  или  $\varepsilon_0 < 0$ ). Мы можем, однако, ограничиться рассмотрением случая  $\eta > 0$ , так как в случае  $\eta = -\eta' < 0$  кривая, выражаемая уравнением (6), очевидно, получится отражением в оси ординат (оси  $\gamma$ ) кривой для  $\eta = \eta' > 0$ .

Кроме того, рассмотрение табл. 1 и 2 дает нам возможность установить такое неравенство:

$$|\eta| < \frac{1}{\sqrt{\zeta}},$$

иначе говоря, скорость  $w_I$ , равная  $\eta$ , лежит в интервале  $(-w_L, w_L)$ , где  $w_L = 1/\sqrt{\zeta}$ , как мы уже указывали. По причинам, которые будут выяснены ниже, скорость  $w_I = \eta$  может быть названа инверсионной, а скорость  $w_L = 1/\sqrt{\zeta}$  была уже нами названа предельной скоростью \*\*.

2. Для построения кривой, выражаемой формулой (6), при тех дополнительных условиях, кои были выяснены в конце предыдущего пункта, изучим производную  $\gamma$  по  $w$ :

$$\frac{d\gamma}{dw} = \frac{\tau_a \psi(w)}{w^2 (1 - \zeta w^2)^2},$$

где

$$\psi(w) = 2\zeta w^2 - 3\eta\zeta w^2 + \eta;$$

замечая, что

$$\psi'(w) = 4\zeta w(w - \eta)$$

и что

$$\psi(-w_L) = -\frac{2}{\sqrt{\zeta}}(1 + \eta\sqrt{\zeta}) < 0,$$

$$\psi(0) = \eta > 0,$$

$$\psi(\eta) = \eta(1 - \zeta\eta^2) > 0,$$

$$\psi(w_L) = \frac{2}{\sqrt{\zeta}}(1 - \eta\sqrt{\zeta}) > 0,$$

\* Все наши рассуждения можно было бы применить и к формуле (4), причем в рассматриваемой нами области значений  $w$  обе формулы дают почти одинаковые результаты. Исследования формулы (4) мы здесь приводить не будем (см. § 8).

\*\* Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать лишь значения  $\varepsilon_0$ , удовлетворяющие неравенству  $|\eta| < 1/|\zeta|$ .

без труда найдем, что уравнение

$$\psi(w) = 0$$

имеет только один вещественный корень и этот корень лежит в интервале  $(-w_L, 0)$ . Мы обозначим его через  $w_m$ ; он отвечает минимуму  $\gamma$ , и при  $w = w_m$  величину  $\gamma$  будем обозначать  $\gamma_m$ .

Условимся  $w_m$  называть критической вертикальной скоростью,  $\gamma_m$  — критическим вертикальным температурным градиентом.

Так как при  $w = w_L = \eta$ ,  $\gamma = 0$ ,  $w = \pm w_L$  и  $w = 0$  — асимптоты кривой, выражаемой формулой (6), параллельные оси ординат, а  $\gamma = 0$  есть асимптота, параллельная оси абсцисс, то, приняв во внимание только что приведенное исследование  $d\gamma/dw$ , без труда построим кривую, выражающую  $\gamma$  в зависимости от  $w$  при  $\eta > 0$  (рис. 2).

Кривая для  $\eta < 0$  изображена на рис. 3\*.

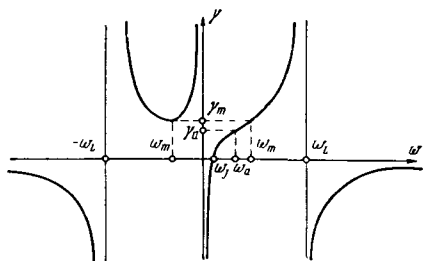


Рис. 2

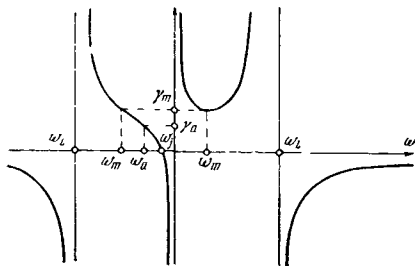


Рис. 3

Нетрудно установить, что значение градиента  $\gamma_a$  (адиабатический градиент) лежит в интервале  $(0, \gamma_m)$  и что существует только одна вертикальная скорость  $w_a$ , отвечающая этому градиенту; она определяется выражением

$$w_a = \sqrt{\frac{\eta}{\zeta}}. \quad (7)$$

Величина  $w_a$  стремится к нулю, коль скоро  $\eta$  стремится к нулю; ее значения для разных  $T$  и  $\eta$  приведены в табл. 3.

Как видно из этой таблицы, внизу при обычном притоке энергии  $w_a$  порядка 1—4 м/сек, наверху — порядка 4—8 м/сек.

3. Рассмотрение построенных нами кривых дает возможность разделить всю область значений вертикальных температурных градиентов на три части.

\* Оба эти чертежа являются только схемами, в них  $\eta$  и  $\zeta$  имеют величины, не встречающиеся на практике.

Первая — инверсионная часть этой области включает в себе градиенты  $\gamma$  в интервале  $(-\infty, 0)$ . Здесь градиенты отрицательны, поэтому имеет место инверсия, т. е. повышение температуры с высотой.

Таблица 3

| $w$                                      | $\varepsilon_0$ |            |            |            |            |            |            |
|------------------------------------------|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                                          | $10^{-9}$       | $10^{-10}$ | $10^{-11}$ | $10^{-12}$ | $10^{-13}$ | $10^{-14}$ | $10^{-15}$ |
| $T = 273^\circ \text{ K}, \quad p = 100$ |                 |            |            |            |            |            |            |
| $w_a$                                    | 70              | 33         | 15         | 7,1        | 3,3        | 1,5        | 0,70       |
| $ w_m $                                  | 56              | 26         | 12         | 5,6        | 2,6        | 1,2        | 0,56       |
| $w_m$                                    | 112             | 52         | 24         | 11,2       | 5,2        | 2,4        | 0,11       |
| $T = 273^\circ \text{ K}, \quad p = 10$  |                 |            |            |            |            |            |            |
| $w_a$                                    | 152             | 70         | 33         | 15         | 7,1        | 3,3        | 1,5        |
| $ w_m $                                  | 121             | 56         | 26         | 12         | 2,6        | 1,2        | 0,56       |
| $w_m$                                    | 242             | 112        | 52         | 24         | 5,2        | 2,4        | 0,11       |

Каждому градиенту инверсионной области соответствуют три вертикальных скорости: две из них лежат вне интервала  $(-w_L + w_L)$  и, следовательно, не удовлетворяют нашим условиям, а третья лежит в интервале  $(0, w_I)$  и, следовательно, удовлетворяет условиям задачи, т. е. стремится к нулю, коль скоро приток энергии стремится к нулю, и в условиях атмосферной действительно чрезвычайно мала. Эта скорость уменьшается с увеличением абсолютного значения вертикального температурного градиента.

Вторая часть области изменения вертикального температурного градиента может быть названа нормальной частью; она включает в себя градиенты, лежащие в интервале  $(0, \gamma_m)$ , где  $\gamma_m$  — критический вертикальный температурный градиент; в этой области обычно лежат температурные градиенты атмосферной действительности. Каждому значению градиента в нормальной области отвечает одно и только одно значение вертикальной скорости, лежащее в интервале  $(w_I, w_m)$ , где  $w_m$  — значение  $w$ , отличное от  $w_m$ , при котором  $\gamma = \gamma_m$ ;  $w_m$  назовем сопряженной критической вертикальной скоростью. Вертикальные скорости, отвечающие градиентам нормальной области, уменьшаются с уменьшением притока энергии и увеличиваются с увеличением градиента.

Эта область, как мы увидим ниже, делится в зависимости от градиента на две, смотря по тому градиент меньше адиабатического, или больше, или равен ему.

Наконец, область градиентов, больших критического, составляет третью часть области изменения градиентов. Эту третью область представляется удобным назвать а н о м а л ь н о й о б л а с т ь ю; в самом деле, случаи вертикальных температурных градиентов, лежащих в аномальной области, сравнительно редко имеют место в атмосфере. В этой аномальной области каждому значению вертикального температурного градиента соответствуют три значения вертикальных скоростей; все три лежат в интервале  $(-w_L, +w_L)$ , одно из них стремится к нулю, коль скоро приток энергии стремится к нулю, два другие стремятся к конечному пределу, когда приток энергии стремится к нулю, и могут служить примером внутренних вертикальных скоростей (см. § 2 настоящей статьи). Легко видеть, что в непосредственной близости к внутренней вертикальной скорости они очень быстро возрастают по абсолютной величине; с увеличением градиента дальнейшее их возрастание несколько замедляется. Что же касается третьей (внешней) вертикальной скорости, то она стремится к нулю, коль скоро приток энергии стремится к нулю и уменьшается с увеличением градиента. Около  $\gamma = \gamma_m$  все эти значения  $w$  при обычных притоках энергии лежат в указанных нами пределах ( $|w| \leq 15$  м/сек); при градиентах, превышающих  $\gamma_m$ , это не имеет места и условиям задачи удовлетворяет лишь третья внешняя вертикальная скорость. Подробнее об этом будет сказано в § 6.

4. Для дальнейшего изучения формулы (6) нам придется решить ее относительно  $w$ ; подобное решение проще всего выполнить, применяя формулу Кардана для решения кубического уравнения. Формула Кардана, как известно, применяется для решения кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0.$$

Обозначим через  $R$  дискриминант нашего уравнения:

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Вещественные корни нашего уравнения определяются следующими формулами:

1)  $R > 0$ , один вещественный корень:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}; \quad (8a)$$

2)  $R = 0$ , три вещественных корня, из коих два равных:

$$x_1 = x_2 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad x_3 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}; \quad (8б)$$

3.  $R < 0$ , три вещественных неравных корня:

$$x = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \operatorname{ccs} \frac{\theta + 2v\pi}{3}, \quad v = 0, 1, 2,$$

$$\operatorname{ccs} \theta = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad 0 < \theta < \pi. \quad (8в)$$

В нашем случае формула (6) может быть переписана таким образом:

$$\xi \gamma w^3 + (\gamma_a - \gamma) w - \gamma_a \eta = 0,$$

так как

$$p = \frac{\gamma_a - \gamma}{\xi \gamma}, \quad q = -\frac{\gamma_a \eta}{\xi \gamma},$$

$$R = \left( \frac{\gamma_a \eta}{2\xi \gamma} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_a - \gamma}{3\xi \gamma} \right)^3.$$

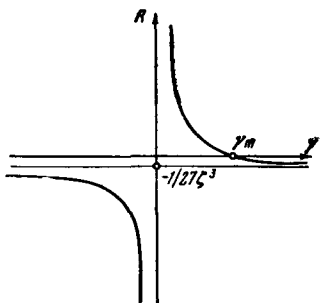


Рис. 4

Из рис. 2 и 3 следует, что  $\gamma_m$  есть единственный корень уравнения  $R = 0$ . Нетрудно, произведя соответствующее исследование,

начертить график, выражающий зависимость  $R$  от  $\gamma$ . Кривая эта имеет асимптотой ось ординат (ось  $R$ ) и прямую  $R = -1/27 \xi^3$ , параллельную оси абсцисс (оси  $\gamma$ ); она схематически изображена на рис. 4\*.

Из рассмотрения этого чертежа следует, что  $R > 0$  для нормальной области значения градиентов и  $R < 0$  в двух других областях (инверсионной и аномальной); таким образом, эти две области образуют *casus irreductibilis* для нашего основного уравнения третьей степени. Ниже мы рассмотрим подробно все три указанные выше области.

## § 6

1. Начнем изучение вертикальных течений с нормальной области. Наша задача заключается в том, чтобы выяснить зависимость  $w$  от  $\eta$  т. е. от притока энергии. При этом, так как приток энергии и величина  $\eta$  невелики, величину  $w$  мы будем разлагать по степеням  $\eta$  и ограничиваться наименьшими после нулевой степенями  $\eta$ .

\* Такой вид, как на рис. 4, кривая имеет при  $\eta^2 \xi < 8/9$ . При  $\eta^2 \xi \geq 8/9$  вид кривой будет несколько иной, что, однако, не изменяет существа дела, пока  $\eta^2 \xi \leq 1$ .



Таблица 4

| $p$ | $\varepsilon_0$ | $w$                          |                              |                              |                              |                              |
|-----|-----------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
|     |                 | $\gamma = 0,1 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = 0,3 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = 0,5 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = 0,7 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = 0,9 \cdot 10^{-2}$ |

 $T = 253^\circ \text{K}$ 

|     |                                       |                                                   |                                                   |                                                   |                                                  |                                                  |
|-----|---------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1:0 | $10^{-9}$<br>$10^{-12}$<br>$10^{-15}$ | 3,5<br>$3,5 \cdot 10^{-3}$<br>$3,5 \cdot 10^{-6}$ | 4,5<br>$4,5 \cdot 10^{-3}$<br>$4,5 \cdot 10^{-6}$ | 6,4<br>$6,4 \cdot 10^{-3}$<br>$6,4 \cdot 10^{-5}$ | 11<br>$1,1 \cdot 10^{-2}$<br>$1,1 \cdot 10^{-6}$ | 37<br>$3,8 \cdot 10^{-2}$<br>$3,8 \cdot 10^{-5}$ |
| 50  | $10^{-9}$<br>$10^{-12}$<br>$10^{-15}$ | 6,9<br>$6,9 \cdot 10^{-3}$<br>$6,9 \cdot 10^{-6}$ | 9,0<br>$9,0 \cdot 10^{-3}$<br>$9,0 \cdot 10^{-6}$ | 13<br>$1,3 \cdot 10^{-2}$<br>$1,3 \cdot 10^{-5}$  | 22<br>$2,2 \cdot 10^{-2}$<br>$2,2 \cdot 10^{-5}$ | 77<br>$7,7 \cdot 10^{-2}$<br>$7,7 \cdot 10^{-5}$ |
| 10  | $10^{-9}$<br>$10^{-12}$<br>$10^{-15}$ | 35<br>$3,5 \cdot 10^{-2}$<br>$3,5 \cdot 10^{-5}$  | 45<br>$4,5 \cdot 10^{-2}$<br>$4,5 \cdot 10^{-5}$  | 64<br>$6,4 \cdot 10^{-2}$<br>$6,4 \cdot 10^{-6}$  | 110<br>0,11<br>$0,11 \cdot 10^{-3}$              | 384<br>0,38<br>$0,38 \cdot 10^{-3}$              |

 $T = 273^\circ \text{K}$ 

|     |                                       |                                                   |                                                   |                                                   |                                                  |                                                  |
|-----|---------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 100 | $10^{-9}$<br>$10^{-12}$<br>$10^{-15}$ | 3,8<br>$3,8 \cdot 10^{-3}$<br>$3,8 \cdot 10^{-6}$ | 4,9<br>$4,9 \cdot 10^{-3}$<br>$4,9 \cdot 10^{-6}$ | 6,9<br>$6,9 \cdot 10^{-2}$<br>$6,9 \cdot 10^{-6}$ | 12<br>$1,2 \cdot 10^{-5}$<br>$1,2 \cdot 10^{-5}$ | 42<br>$4,2 \cdot 10^{-2}$<br>$4,2 \cdot 10^{-5}$ |
| 50  | $10^{-9}$<br>$10^{-12}$<br>$10^{-15}$ | 7,6<br>$7,6 \cdot 10^{-3}$<br>$7,6 \cdot 10^{-6}$ | 9,8<br>$9,8 \cdot 10^{-3}$<br>$9,8 \cdot 10^{-6}$ | 14<br>$1,4 \cdot 10^{-2}$<br>$1,4 \cdot 10^{-5}$  | 24<br>$2,4 \cdot 10^{-2}$<br>$2,4 \cdot 10^{-5}$ | 83<br>$8,3 \cdot 10^{-2}$<br>$8,3 \cdot 10^{-5}$ |
| 10  | $10^{-9}$<br>$10^{-12}$<br>$10^{-15}$ | 38<br>$3,8 \cdot 10^{-2}$<br>$3,8 \cdot 10^{-5}$  | 49<br>$4,9 \cdot 10^{-2}$<br>$4,9 \cdot 10^{-5}$  | 69<br>$6,9 \cdot 10^{-2}$<br>$6,9 \cdot 10^{-5}$  | 119<br>0,12<br>$0,12 \cdot 10^{-3}$              | 416<br>0,42<br>$0,42 \cdot 10^{-3}$              |

Таблица 4 (окончание)

| $p$                       | $\varepsilon_0$ | $w$                          |                              |                              |                              |                              |
|---------------------------|-----------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
|                           |                 | $\gamma = 0,1 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = 0,3 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = 0,5 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = 0,7 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = 0,9 \cdot 10^{-2}$ |
| $T = 293^\circ \text{ K}$ |                 |                              |                              |                              |                              |                              |
| 100                       | $10^{-9}$       | 4,1                          | 5,2                          | 7,4                          | 13                           | 44                           |
|                           | $10^{-12}$      | $4,1 \cdot 10^{-3}$          | $5,2 \cdot 10^{-3}$          | $7,4 \cdot 10^{-3}$          | $1,3 \cdot 10^{-2}$          | $4,4 \cdot 10^{-2}$          |
|                           | $10^{-15}$      | $4,1 \cdot 10^{-6}$          | $5,2 \cdot 10^{-6}$          | $7,4 \cdot 10^{-6}$          | $1,3 \cdot 10^{-5}$          | $4,4 \cdot 10^{-5}$          |
| 50                        | $10^{-9}$       | 8,1                          | 10                           | 15                           | 26                           | 89                           |
|                           | $10^{-12}$      | $8,1 \cdot 10^{-3}$          | $1,0 \cdot 10^{-2}$          | $1,5 \cdot 10^{-2}$          | $2,6 \cdot 10^{-2}$          | $8,9 \cdot 10^{-2}$          |
|                           | $10^{-15}$      | $8,1 \cdot 10^{-6}$          | $1,0 \cdot 10^{-5}$          | $1,5 \cdot 10^{-5}$          | $2,6 \cdot 10^{-5}$          | $8,9 \cdot 10^{-5}$          |
| 10                        | $10^{-9}$       | 41                           | 52                           | 74                           | 127                          | 445                          |
|                           | $10^{-12}$      | $4,1 \cdot 10^{-2}$          | $5,2 \cdot 10^{-2}$          | $7,4 \cdot 10^{-2}$          | 0,13                         | 0,44                         |
|                           | $10^{-15}$      | $4,1 \cdot 10^{-5}$          | $5,2 \cdot 10^{-5}$          | $7,4 \cdot 10^{-5}$          | $0,13 \cdot 10^{-3}$         | $0,44 \cdot 10^{-3}$         |

В нормальной области  $R > 0$ , поэтому мы должны принять во внимание формулу (8а). Разлагая  $\sqrt{R}$  по степеням  $\eta$ , мы замечаем, что при  $\gamma = \gamma_a$   $\eta = 0$  — критическая точка для  $\sqrt{R}$ ; вследствие этого при разложении  $w$  по степеням  $\eta$  мы должны в нормальной области различать два интервала для  $\gamma$ : от 0 до  $\gamma_a$  (не включая  $\gamma_a$ ) и от  $\gamma_a$  до  $\gamma_m$  (включая  $\gamma_a$  и  $\gamma_m$ ). Эти две области назовем первой и второй частями нормальной области изменений градиента.

Несложные преобразования дают нам для первой части нормальной области следующую формулу для  $w$ :

$$w = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma} \eta. \quad (9)$$

Формула эта показывает, что чем больше градиент, тем больше вертикальные течения, и, с другой стороны, чем больше приток энергии по абсолютной величине, тем больше абсолютная величина вертикальной скорости. Положительный приток энергии вызывает вертикальное течение, направленное вверх, отрицательный — вертикальное течение, направленное вниз; иначе говоря, нагревание вызывает ток кверху, охлаждение — книзу.

Формула (9) согласуется с данными опыта, указывающими на усиление вертикальных течений при увеличении вертикального температурного градиента и при усиленной инсоляции (восходящие токи летом в околополуденные часы дня).

В табл. 4 вычислены значения  $w$  для ряда значений  $\gamma$  и  $\varepsilon_0$  при  $T = 253^\circ$ ,  $273^\circ$ ,  $293^\circ$  и  $p = 100$ ,  $50$ ,  $10$ .

Из этой таблицы видно, что в обычных условиях вертикальные течения весьма слабы и лишь в исключительных случаях достигают  $1$  см/сек.

2. Исследуем теперь вторую часть нормальной области, т. е. те значения  $\gamma$ , которые лежат внутри и на границах интервала  $(\gamma_a, \gamma_m)$ . Прежде, всего посмотрим, как  $\gamma_m$  зависит от  $\eta$ ; по определению критического градиента, он есть единственное решение уравнения  $R = 0$ , иначе говоря, уравнения

$$\eta^3 = \frac{4(\gamma_m - \gamma_a)^3}{27\zeta\gamma_a^2\gamma_m}.$$

Если мы будем величину  $\eta$  откладывать по оси ординат, а величину  $\gamma_m$  — по оси абсцисс, то предыдущая формула даст нам кривую, вершина которой (точка возврата) соответствует  $\eta = 0$ ,  $\gamma_m = \gamma_a$ , а асимптота расположена налево от вершины, направо имеется ветвь кривой, не интересная для нас, так как на этой ветви  $\eta^2\gamma \gg 1$ . Кривая эта изображена схематически на рис. 5.

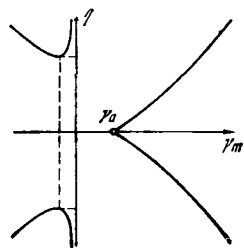


Рис. 5

Как легко видеть,  $\gamma_m$  есть алгебраическая функция  $\eta$ ; разлагая ее по степеням  $\eta$ , мы по методу Puiseux получим следующую формулу для  $\gamma_m$ :

$$\gamma_m = \gamma_a \left( 1 + 3 \sqrt[3]{\frac{\zeta}{4} \eta} \right)^{2/3}. \quad (10)$$

Согласно этой формуле  $\gamma_m$  ничтожно мало отличается от  $\gamma_a$  при малых притоках энергии; в табл. 5 вычислен ряд значений для разности  $\gamma_m - \gamma_a$  при  $T = 273^\circ$ ,  $p = 100$ ,  $10$  и разных  $\varepsilon_0$ .

При больших  $\varepsilon_0$   $\gamma_m$ , однако, может превосходить  $\gamma_a$  более чем на одну треть; такого рода мощные притоки энергии вряд ли имеют место в атмосфере.

Практически эта вторая часть нормальной области почти не имеет значения, вертикальные скорости в ней близки к адиабатической вертикальной скорости  $w_a$ . Наибольшие по абсолютной величине значения скоростей  $w_m$  и  $w'_m$ , соответствующих  $\gamma = \gamma_m$ , приведены в табл. 4.

3. Для того чтобы во второй части нормальной области получить

Таблица 5

| $\varepsilon_0$ | $\gamma_m - \gamma_a$ |                      | $\varepsilon_0$ | $\gamma_m - \gamma_a$ |        |
|-----------------|-----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|--------|
|                 | $p=100$               | $p=10$               |                 | $p=100$               | $p=10$ |
| $10^{-9}$       | $8,2 \cdot 10^{-4}$   | $38,2 \cdot 10^{-1}$ | $10^{-13}$      | 0,018                 | 0,082  |
| $10^{-10}$      | 4,8                   | 8,2                  | $10^{-14}$      | 0,0038                | 0,018  |
| $10^{-11}$      | 0,38                  | 1,8                  | $10^{-15}$      | 0,00082               | 0,0038 |
| $10^{-12}$      | 0,082                 | 0,38                 |                 |                       |        |

характер изменения  $w$  в зависимости от  $\eta$  и  $\gamma$ , введем новый вспомогательный параметр  $\xi$ :

$$\xi = \left( \frac{\gamma - \gamma_a}{3\xi\gamma} \right)^3 : \left( \frac{\gamma_a\eta}{2\xi\gamma} \right)^2.$$

Эта формула может быть написана в виде

$$\xi = \frac{4}{27} \frac{1}{\xi\eta^2} \left( 1 - \frac{\gamma_a}{\gamma} \right) \left( \frac{\gamma}{\gamma_a} - 1 \right)^2;$$

из этого выражения ясно, что  $\xi$  возрастает от 0 до 1 с возрастанием  $\gamma$  от  $\gamma_a$  до  $\gamma_m$ . Таким образом, в интервале  $(\gamma_a, \gamma_m)$   $\xi$  есть правильная положительная дробь.

Легко видеть, что формула (8a) в нашем случае дает

$$w = \sqrt[3]{\frac{\gamma_a\eta}{2\xi\lambda}} f(\xi),$$

где

$$f(\xi) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \xi}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \xi}} \quad (11)$$

есть возрастающая от  $\sqrt[3]{2}$  до 2 функция  $\xi$  в интервале (0,1). Следовательно справедливо неравенство

$$|w| \leq \sqrt[3]{4} |w_a|.$$

Мы не останавливаемся на дальнейшем разборе вертикальных течений по второй части нормальной области, так как в принципе ничего нового по сравнению с первой частью эта область не представляет.

Заметим в заключение, что при  $\gamma = \gamma_m$  мы получаем по формуле (11) не  $w_m$ , а  $w'_m$  — сопряженную критическую скорость:

$$w'_m = 2 \sqrt[3]{\frac{\gamma_a \eta}{2 \zeta \gamma_m}} - \sqrt[3]{4} w_a, \quad (12a)$$

точно так же

$$w_m = - \frac{w_a}{\sqrt[3]{2}}. \quad (12б)$$

В табл. 4 приведены значения  $|w_m|$ ,  $w'_m$  для разных  $T$  и  $\varepsilon_0$ .

## § 7

1. Перейдем теперь к случаю, когда  $\gamma$  лежит в интервале  $(\gamma_m, \infty)$ , т. е. когда мы находимся в аномальной области вертикальных температурных градиентов. В этом случае приходится обратиться к формуле (8в) \*\*.

Введя обозначение

$$1 = \frac{\text{sign } \eta}{\sqrt{\xi}},$$

где  $\text{sign } \eta$  означает  $+1$ ,  $-1$  или  $0$ , смотря по тому  $\eta > 0$ ,  $\eta < 0$  или  $\eta = 0$ , найдем для трех корней нашего уравнения следующие выражения:

$$\begin{aligned} w_1 &= 2 \sqrt[3]{\frac{\gamma - \gamma_a}{3 \zeta \gamma}} \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\arcsin \lambda}{3} \right), \\ w_2 &= 2 \sqrt[3]{\frac{\gamma - \gamma_a}{3 \zeta \gamma}} \cos \left( \frac{5\pi}{6} - \frac{\arcsin \lambda}{3} \right), \\ w_3 &= 2 \sqrt[3]{\frac{\gamma - \gamma_a}{3 \zeta \gamma}} \cos \left( \frac{9\pi}{6} - \frac{\arcsin \lambda}{3} \right), \end{aligned}$$

откуда после простых преобразований, ограничиваясь степенями  $\eta$  не выше первой, найдем

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{\frac{\gamma - \gamma_a}{\zeta \gamma}} + \frac{\gamma_a \eta}{2(\gamma - \gamma_a)}, \\ w_2 &= - \sqrt[3]{\frac{\gamma - \gamma_a}{\zeta \gamma}} + \frac{\gamma_a \eta}{2(\gamma - \gamma_a)}, \\ w_3 &= - \frac{\eta \gamma_a}{\gamma - \gamma_a}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

\* В этих формулах мы выделили только главную часть, опустив члены, содержащие  $\eta$  в высших степенях.

\*\* Случай  $\gamma = \gamma_m$  был уже нами рассмотрен выше, здесь мы его опускаем.

Займемся рассмотрением этих формул. Ввиду того, что величина  $\xi$  весьма мала, члены выражения для  $w_1$  и  $w_2$ , не зависящие от  $\eta$ , представляют при градиентах, более или менее отличающихся от  $\gamma_1$ , чрезвычайно большие величины; поэтому при слабых притоках энергии ни  $w_1$ , ни  $w_2$  не удовлетворяют условиям задачи. Остается лишь вертикальная скорость  $w_3$ , направленная вниз при нагревании и вверх при охлаждении и убывающая по абсолютной величине с возрастанием градиента.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, вычислим  $w_1, w_2, w_3$  для  $p = 100$ ,  $\epsilon_0 = 10^{-12}$ , при  $T = 273^\circ$ . При  $\gamma = 0,01$  будем иметь  $w_1 = 47$ ,  $w_2 = -47$ ,  $w_3 = -0,17$ ; при  $\gamma = 0,00981$   $w_1 = 13$ ,  $w_2 = -9$ ,  $w_3 = -3,3$ ; при тех же условиях, но на больших высотах ( $p = 10$ ) будем иметь для  $\gamma = 0,00985$   $w_1 = 36$ ;  $w_2 = -29$ ;  $w_3 = -6,7^*$ .

Все сказанное убеждает нас, что при нормальных условиях притока энергии вертикальные скорости могут весьма быстро возрастать с увеличением градиента; рассмотрение величин  $|w_m|$  и  $w'_m$  показывает, что и при ненормально большом притоке энергии вертикальные течения, отвечающие градиентам, большим критического, чрезвычайно велики. В изложенном следует искать причину того, что большие градиенты (большие критических) встречаются весьма редко в условиях атмосферной действительности и характеризуют собой весьма неустойчивое состояние атмосферы. Однако наличие ветви кривой, выражающей  $\gamma$  в зависимости от  $w$ , асимптотически приближающейся к оси  $\gamma$  в области положительных градиентов, указывает на возможность существования градиентов, больших критического; как будет указано выше, атмосфера может находиться в равновесии при любых значениях градиентов\*\*.

2. Применяя рассуждения, приведенные в § 1, для случая, когда градиент расположен в инверсионной области, найдем, что две вертикальные скорости, удовлетворяющие нашему уравнению (6), будут слишком велики и поэтому должны быть отброшены, тогда как третье решение дает нам формулу

$$w = \frac{\gamma_a \eta}{\gamma_a - \gamma}. \quad (14)$$

\* Само собой разумеется, что эти формулы с достаточным приближением решают наше уравнение лишь в том случае, когда  $\eta$  мало, а  $\gamma - \gamma_a$  не близко к нулю, т. е. когда  $\xi$  достаточно велико; когда это не имеет места, приходится обращаться к точным формулам.

\*\* Следует отметить, что при больших градиентах и при весьма интенсивном нагревании наблюдалась иногда большая относительная влажность наверху и почти полное отсутствие облачности. Такое явление Ханн объясняет наличием вертикальных токов вниз, что вполне согласуется с приведенными нами рассуждениями (Hann J. Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig, 1906, S. 67—68).

Формула эта может быть истолкована следующим образом. Когда нагревание становится достаточно сильным и имеет место вертикальное течение вверх, мы наблюдаем инверсию температуры, т. е. градиент становится отрицательным. Это может быть при летних инверсиях. Тогда же, когда усиливается охлаждение и возникают вертикальные токи вниз, опять наблюдается инверсия. Такова, по-видимому, причина ночной инверсии и инверсии в антициклонах. Наличие инверсии не исключает вертикальных течений, эти вертикальные течения тем слабее, чем меньше приток энергии и чем больше абсолютная величина градиента, т. е. чем мощнее инверсия. Величины этих вертикальных течений для  $T = 253, 273, 293^\circ \text{K}$   $p = 100, 50, 10$  и для разных  $\gamma$  и  $\varepsilon_0$  приведены в табл. 6.

Необходимо заметить, что градиент при инверсии тем больше, чем слабее вертикальные течения; быстрое падение температуры, превращающее инверсию как бы в прерывный скачок температуры, объясняется, по-видимому, весьма малой величиной вертикальных течений. С возрастанием вертикальных течений градиент уменьшается, и при известной величине этих течений инверсия прекращается и снова наблюдается падение температуры с высотой. Таким образом, слой инверсии можно представить себе как слой со слабыми вертикальными токами, усиливающимися в верхней его части.

В качестве одного из примеров рассмотрим образование инверсии при наличии плотного слоя облаков. В слое атмосферы между землей и облаками мы имеем нагревание земли лучеиспусканием, выше слоя облаков может иметь место охлаждение лучеиспусканием в пространство (например ночью); если при этом ниже облаков будем иметь восходящий ток, а выше нисходящий, то создадутся условия, при которых на высоте облачного слоя образуются инверсии. Если окажется, что выше и ниже облачного слоя имеется восходящий ток, то ниже, около облачного слоя, произойдет инверсия, выше этого слоя она исчезает, перейдя в нормальное падение температуры с высотой; этим, как нам думается, может быть объяснена малая толщина того слоя, в котором при инверсии имеет место повышение температуры, иначе говоря, может быть объяснено то обстоятельство, что инверсия большей частью является скачком температуры\*.

\* Прерывный скачок температуры наблюдается далеко не всегда даже для инверсии в тропосфере. Что же касается верхней инверсии, то, поскольку можно основываться на имеющемся наблюдательном материале, там имеет место в среднем даже медленное повышение температуры с высотой.

Таблица 6

| $p$ | $\varepsilon_0$ | $w$                           |                               |                               |                               |                               |
|-----|-----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|     |                 | $\gamma = -0,1 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = -0,5 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = -1,0 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = -2,0 \cdot 10^{-2}$ | $\gamma = -5,0 \cdot 10^{-2}$ |

 $T = 253^\circ \text{K}$ 

|     |            |                     |                     |                     |                     |                      |
|-----|------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 100 | $10^{-9}$  | 2,9                 | 2,1                 | 1,6                 | 1,0                 | 1,51                 |
|     | $10^{-12}$ | $2,9 \cdot 10^{-3}$ | $2,1 \cdot 10^{-3}$ | $1,6 \cdot 10^{-3}$ | $1,0 \cdot 10^{-3}$ | $0,51 \cdot 10^{-3}$ |
|     | $10^{-15}$ | $2,9 \cdot 10^{-6}$ | $2,1 \cdot 10^{-6}$ | $1,6 \cdot 10^{-6}$ | $1,0 \cdot 10^{-6}$ | $0,51 \cdot 10^{-6}$ |
| 50  | $10^{-9}$  | 5,7                 | 4,1                 | 3,1                 | 2,1                 | 1,0                  |
|     | $10^{-12}$ | $5,7 \cdot 10^{-3}$ | $4,1 \cdot 10^{-3}$ | $3,1 \cdot 10^{-3}$ | $2,1 \cdot 10^{-3}$ | $1,0 \cdot 10^{-3}$  |
|     | $10^{-15}$ | $5,7 \cdot 10^{-6}$ | $4,1 \cdot 10^{-6}$ | $3,1 \cdot 10^{-6}$ | $2,1 \cdot 10^{-6}$ | $1,0 \cdot 10^{-6}$  |
| 10  | $10^{-9}$  | 29                  | 21                  | 16                  | 10                  | 5,1                  |
|     | $10^{-12}$ | $2,9 \cdot 10^{-2}$ | $2,1 \cdot 10^{-2}$ | $1,6 \cdot 10^{-2}$ | $1,0 \cdot 10^{-2}$ | $0,5 \cdot 10^{-2}$  |
|     | $10^{-15}$ | $2,9 \cdot 10^{-5}$ | $2,1 \cdot 10^{-5}$ | $1,6 \cdot 10^{-5}$ | $1,0 \cdot 10^{-5}$ | $0,1 \cdot 10^{-5}$  |

 $T = 273^\circ \text{K}$ 

|     |            |                     |                     |                     |                     |                      |
|-----|------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 100 | $10^{-9}$  | 3,1                 | 2,3                 | 1,7                 | 1,1                 | 0,6                  |
|     | $10^{-12}$ | $3,1 \cdot 10^{-3}$ | $2,3 \cdot 10^{-3}$ | $1,7 \cdot 10^{-3}$ | $1,1 \cdot 10^{-3}$ | $0,6 \cdot 10^{-3}$  |
|     | $10^{-15}$ | $3,1 \cdot 10^{-6}$ | $2,3 \cdot 10^{-6}$ | $1,7 \cdot 10^{-6}$ | $1,1 \cdot 10^{-6}$ | $0,6 \cdot 10^{-6}$  |
| 50  | $10^{-9}$  | 6,2                 | 4,5                 | 3,4                 | 2,2                 | 1,1                  |
|     | $10^{-12}$ | $6,2 \cdot 10^{-3}$ | $4,5 \cdot 10^{-3}$ | $3,4 \cdot 10^{-3}$ | $2,2 \cdot 10^{-3}$ | $1,1 \cdot 10^{-3}$  |
|     | $10^{-15}$ | $6,2 \cdot 10^{-6}$ | $4,5 \cdot 10^{-6}$ | $3,4 \cdot 10^{-6}$ | $2,2 \cdot 10^{-6}$ | $1,1 \cdot 10^{-6}$  |
| 10  | $10^{-9}$  | 31                  | 23                  | 17                  | 11                  | 5,6                  |
|     | $10^{-12}$ | $3,1 \cdot 10^{-2}$ | $2,3 \cdot 10^{-2}$ | $1,7 \cdot 10^{-2}$ | $1,1 \cdot 10^{-2}$ | $0,56 \cdot 10^{-2}$ |
|     | $10^{-15}$ | $3,1 \cdot 10^{-5}$ | $2,3 \cdot 10^{-5}$ | $1,7 \cdot 10^{-5}$ | $1,1 \cdot 10^{-5}$ | $0,56 \cdot 10^{-5}$ |



Таблица 6 (окончание)

| p                         | $\varepsilon_0$ | w                            |                              |                              |                              |                              |
|---------------------------|-----------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
|                           |                 | $\gamma = 0,1 \cdot 10^{-3}$ | $\gamma = 0,5 \cdot 10^{-3}$ | $\gamma = 1,0 \cdot 10^{-3}$ | $\gamma = 2,0 \cdot 10^{-3}$ | $\gamma = 5,0 \cdot 10^{-3}$ |
| $T = 293^\circ \text{ K}$ |                 |                              |                              |                              |                              |                              |
| 100                       | $10^{-9}$       | 3,3                          | 2,4                          | 1,8                          | 1,2                          | 0,60                         |
|                           | $10^{-12}$      | $3,3 \cdot 10^{-3}$          | $2,4 \cdot 10^{-3}$          | $1,8 \cdot 10^{-3}$          | $1,2 \cdot 10^{-3}$          | $0,60 \cdot 10^{-3}$         |
|                           | $10^{-15}$      | $3,3 \cdot 10^{-6}$          | $2,4 \cdot 10^{-6}$          | $1,8 \cdot 10^{-6}$          | $1,9 \cdot 10^{-6}$          | —                            |
| 50                        | $10^{-9}$       | 6,6                          | 4,8                          | 3,6                          | 2,4                          | 1,2                          |
|                           | $10^{-12}$      | $6,6 \cdot 10^{-3}$          | $4,8 \cdot 10^{-3}$          | $3,6 \cdot 10^{-3}$          | $2,4 \cdot 10^{-3}$          | $1,2 \cdot 10^{-3}$          |
|                           | $10^{-15}$      | $6,6 \cdot 10^{-6}$          | $4,8 \cdot 10^{-6}$          | $3,6 \cdot 10^{-6}$          | $2,4 \cdot 10^{-6}$          | $1,2 \cdot 10^{-6}$          |
| 10                        | $10^{-9}$       | 33                           | 24                           | 18                           | 12                           | 6,0                          |
|                           | $10^{-12}$      | $3,3 \cdot 10^{-2}$          | $2,4 \cdot 10^{-2}$          | $1,8 \cdot 10^{-2}$          | $1,2 \cdot 10^{-2}$          | $0,60 \cdot 10^{-2}$         |
|                           | $10^{-15}$      | $3,3 \cdot 10^{-5}$          | $2,4 \cdot 10^{-5}$          | $1,8 \cdot 10^{-5}$          | $1,2 \cdot 10^{-5}$          | $0,60 \cdot 10^{-5}$         |

## § 8

1. В настоящем, последнем параграфе мы рассмотрим ряд вопросов, связанных с изучением формулы (6), в конце параграфа — случаи равновесия атмосферы и докажем, что оно возможно при любых градиентах.

В условиях действительной атмосферы редко встречаются вертикальные течения, большие по абсолютной величине  $10\text{--}15$  м/сек. Положим, что, исходя из каких-либо соображений, мы установим высший возможный предел абсолютной величины вертикальных атмосферных течений. Назовем этот предел  $w_s$ .

В зависимости от того, соответствует ли  $\pm w_s$  инверсионной нормальной или аномальной области градиентов, мы можем область величин притоков энергии разделить на три частные области. Эти области будут охарактеризованы следующими приближенными неравенствами, получаемыми из формулы (12а):

$$\begin{aligned}
 |\eta| &\geq w_s, \\
 w_s &> |\eta| > \frac{\zeta w_s^3}{4}, \\
 \frac{\zeta w_s}{4} &\geq |\eta|.
 \end{aligned}$$

Обычно имеет место средняя строка неравенств, однако в том случае, когда приток энергии очень мал и применимо третье неравенство, существуют два предела  $\gamma'_s$  и  $\gamma''_s$ , таких, что для градиентов, начиная с величины  $\gamma'_s$ , вертикальные течения вверх превзойдут  $w_s$ , а для градиентов, начиная с величины  $\gamma''_s$ , вертикальные течения вниз превзойдут по абсолютной величине  $w_s$ ; легко видеть, что

$$\begin{aligned}\gamma'_s &= \gamma_a \frac{1 - \frac{\eta}{w_s}}{1 - \zeta w_s^2}, \\ \gamma''_s &= \gamma_a \frac{1 + \frac{\eta}{w_s}}{1 - \zeta w_s^2}.\end{aligned}\tag{15}$$

При нагревании  $\gamma''_s > \gamma'_s$ , при охлаждении  $\gamma''_s < \gamma'_s$ ; таким образом, при нагревании, когда градиент достаточно велик (больше  $\gamma'_s$ ), будут возможны лишь вертикальные токи вниз, а при охлаждении, наоборот, лишь токи вверх. Происходящие здесь явления противоположны тому, что наблюдается в нормальной области вертикальных температурных градиентов.

Следует заметить, что величины  $\gamma'_s$  и  $\gamma''_s$  лишь ничтожно мало отличаются от  $\gamma_a$ ; при  $T = 273^\circ \text{ K}$  величина  $\frac{1}{4}\zeta w_s^3 = 0,0022$ , для  $w_s = 10$  это соответствует при  $p = 100$  значениям  $\varepsilon_0$ , меньшим  $10^{-13}$ , и при  $p = 10$  — меньшим  $10^{-14}$ ;  $\gamma'_s$  и  $\gamma''_s$  в этом случае отличаются от  $\gamma_a$  меньше, чем на одну тысячную  $\gamma_a$ .

2. Обратимся к формуле (3) § 4. Считая, что  $\alpha$  и  $\beta$  — малые величины и предполагая, что горизонтальные течения отсутствуют, мы можем формулу (3) заменить приближенной формулой (6) с той лишь разницей, что в формуле (6) величина  $\eta$  теперь будет

$$\eta = \frac{\varepsilon_0 \Omega - \left( c_p \frac{\partial T}{\partial t} - A \Omega \frac{\partial p}{\partial t} \right)}{c_p \gamma_a}.$$

Это выражение может быть написано так:

$$\eta = \frac{R}{c_p \gamma_a} \frac{T \varepsilon'_0}{p},$$

где

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 - \left( \frac{c_p}{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} - A \frac{\partial p}{\partial t} \right).$$

Все наши рассуждения применимы и к разбираемому случаю, с той только разницей, что величина  $\varepsilon_0$  должна быть заменена величиной  $\varepsilon'_0$ ;

эта величина может быть больше или меньше  $\varepsilon_0$ . Не останавливаясь на детальном исследовании вертикальных течений, заметим, что на больших высотах, где  $\Omega$  весьма велико, будем иметь приближенно

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 + A \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Эта формула указывает, что при повышении давления (надвигающемся антициклоне) величина  $\varepsilon'_0$  будет больше  $\varepsilon_0$ ; наоборот, при понижении давления  $\varepsilon'_0$  меньше  $\varepsilon_0$ . Это должно отразиться на положении верхней инверсии, нижняя граница ее, по-видимому, должна опуститься при надвигающемся антициклоне и подняться при уходящем. Заключение это, однако, высказано лишь в общих чертах и недостаточно строго обосновано; я не имею возможности проверить его из-за полного отсутствия материала. Можно отметить, что исследование случая, отмеченного в настоящем пункте, по моему мнению, достаточно разъясняет вопросы связи антициклонов с явлениями в стратосфере и вообще вопросы о влиянии движения барометрических максимумов и минимумов на вертикальные течения атмосферы.

3. Мы уже говорили выше, что результаты наши не изменятся существенно, если вместо формулы (6) мы будем изучать формулу (4). Легко, кроме того, видеть, что основные формулы (9), (13) и (14) могут быть применены и к решению уравнения (4) относительно  $w$ , если только мы в этих формулах заменим  $\gamma_a$  и  $\eta$  на  $\bar{\gamma}_a$  и  $\bar{\eta}$ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_a &= \gamma_a \left( 1 - \frac{\kappa^2 \gamma_a}{3\gamma} \zeta \eta^2 \right), \\ \bar{\eta} &= \frac{\eta + \frac{\gamma_a - \gamma}{3\gamma} \kappa \eta - \frac{2\kappa^3 \gamma_a^2}{27\gamma^2} \zeta \eta^3}{1 - \frac{\kappa^2}{3} \frac{\gamma_a}{\gamma} \zeta \eta^2},\end{aligned}$$

и, кроме того, к левым частям этих формул прибавим величины

$$- \frac{\kappa}{3} \frac{\gamma_a}{\gamma} \eta.$$

Предыдущие формулы можно будет, принимая во внимание малость  $\zeta$ , переписать приближенно так:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_a &= \gamma_a, \\ \bar{\eta} &= \eta \left( 1 + \frac{\kappa}{3} \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma} \right).\end{aligned}$$

Принимая во внимание это последнее упрощение, найдем, что формулы (9) и (14) для случая полного уравнения (4) не изменяются, что же касается формул (13), соответствующих аномальной области вертикальных температурных градиентов, то они переписутся так:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{\frac{\gamma - \gamma_a}{\xi \gamma}} + \frac{\eta \gamma_a}{2(\gamma - \gamma_a)} - \frac{\kappa \eta}{2} \frac{\gamma_a}{\gamma}, \\ w_2 &= -\sqrt{\frac{\gamma - \gamma_a}{\xi \gamma}} + \frac{\eta \gamma_a}{2(\gamma - \gamma_a)} - \frac{\kappa \eta}{2} \frac{\gamma_a}{\gamma}, \\ w_3 &= -\frac{\eta \gamma_a}{\gamma - \gamma_a}, \end{aligned}$$

при тех величинах притока энергии, температуры и т. д., какие имеют место в действительности, эти формулы мало отличаются от формул (13).

4. Нам остается рассмотреть случай равновесия атмосферы в предположении, что все величины, ее характеризующие, зависят только от  $t$  и высоты  $z$ . Уравнения гидродинамики в этом частном случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} -g - \Omega \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= 0, \\ p\Omega &= RT, \\ \varepsilon_0 \Omega &= c_p \frac{\partial T}{\partial t} - A\Omega \frac{\partial p}{\partial t}; \end{aligned}$$

интегрируя эти уравнения, найдем

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega(z), & \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= 0, \\ \varepsilon_0 &= \varepsilon_0(t), & \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} &= 0, \\ p &= p_0 - g \int_0^z \frac{dz}{\Omega} + \frac{R}{c_v} \int_0^t \varepsilon_0 dt, \\ \gamma &= \gamma_L - \frac{d \ln \Omega}{dz} T, \end{aligned}$$

где  $\gamma_L = g/R$ , как и ранее, а  $\varepsilon_0(t)$  и  $\Omega(z)$  — произвольные функции. Следовательно,  $\Omega(z)$  может быть как возрастающей, так и убывающей функцией высоты  $z$ .

Последнее из предыдущих равенств дает

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dz} = \frac{\gamma_L - \gamma}{T} \quad \text{или} \quad \frac{d\Omega}{dz} = \frac{R(\gamma_L - \gamma)}{p};$$

следовательно, когда градиент меньше предельного, то при равновесии в атмосфере удельный объем возрастает (плотность убывает) с высотой; когда же градиент больше предельного, то при наличии равновесия в атмосфере удельный объем убывает (плотность возрастает) с высотой.

Таким образом, приходится признать неправильным общепринятое мнение о том, что градиент не может быть больше предельного. Это мнение, основанное на невозможности такого положения, когда более тяжелая несжимаемая жидкость находится наверху, а более легкая внизу, совершенно неприменимо к случаю идеального газа и к случаю равновесия атмосферы. По-видимому, при градиентах, больших предельного, мы будем иметь неустойчивое равновесие атмосферы, впрочем, вопрос устойчивости равновесия атмосферы требует в свою очередь более или менее строгого с точки зрения аналитической механики решения. Принимая во внимание, что давление никогда не будет величиной отрицательной, мы можем утверждать, что плотность в атмосфере не может все время возрастать с высотой. Доказательства этого положения мы здесь приводить не будем.

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ С ВЫСОТОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА ЗЕМЛИ И СОЛНЦА <sup>11</sup>

*г. Пермь, 17 февраля 1919 г.*

В статье «Sur la distribution de la température aux diverses hauteurs» (Геофизический сборник, 1914, 1, вып. 1, стр. 35) \* я рассмотрел задачу распределения температуры по высоте в атмосфере при наличии лучистого теплообмена Земли и Солнца и при весьма слабых вертикальных токах воздуха. Указанное в этой статье решение при помощи разложения искомых функций в ряды по степеням некоторого малого параметра приводило к чрезвычайно сложному методу определения коэффициентов этого разложения (при помощи уравнений типа Фукса); кроме того, ввиду невозможности приложить известную теорему Poincaré к нашей задаче, самая сходимость полученного при решении задачи ряда оставалась недоказанной. В настоящей заметке я укажу в краткой форме иное решение поставленной

\* См. стр. 81 настоящей книги.

в упомянутой выше статье задачи, дающее значительно более простое разложение в ряды искомых величин и предоставляющее возможность доказать сходимость этих рядов. Более подробное изложение решения, приводимого в настоящей заметке, будет изложено в моей статье «Addition to the note: Sur la distribution de la température aux diverses hauteurs», напечатанной в Геофизическом сборнике.

## § 1

Уравнения задачи распределения температуры с высотой приводятся, как это было показано в моей вышеупомянутой статье, к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \rho w &= \mu, \\ p &= H \rho T, \\ kF &= c_v \frac{dT}{dz} + HT \frac{dw}{dz}, \\ E &= cT^4, \\ w \frac{dw}{dz} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dz} \right) &= k^2 \rho F - \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{\rho} \frac{dE}{dz} \right); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при этом  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $w$  означают давление, плотность, температуру и скорость вертикального течения воздуха на высоте  $z$  над земной поверхностью,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $c_v$  — теплоемкость при постоянном объеме,  $H$  — газовая постоянная,  $c$  — коэффициент в законе Стефана — Больцмана,  $k$  — коэффициент поглощения воздуха, величины  $F$  и  $E$  определяются третьим и четвертым уравнениями системы (1).

Вводя новую переменную  $m$  условием

$$m = \int_0^z \rho dz, \quad (2)$$

мы приведем систему (1) к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} \rho w &= H \mu T, \\ kF &= c_v \mu \frac{dT}{dm} + p \frac{dw}{dm}, \\ E &= cT^4, \\ p &= P + \mu w_0 - g m - \mu w, \\ \frac{d^2 F}{dm^2} - k^2 F &= -2 \frac{d^2 E}{dm^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $P$  и  $w_0$  — давление и скорость вертикального течения близ земной поверхности; отметим, что  $w_0$  не равно нулю, так как, с одной стороны, земная поверхность может быть и не горизонтальной, а с другой стороны, более правильно относить граничную скорость вертикальных течений не к самой земной поверхности, а к слою на несколько сантиметров выше.

Из уравнений (3) мы можем последовательно определить  $p$  и  $w$  в зависимости от  $T$  и  $m$  (а также от  $P$  и  $w_0$ ) и получить для  $T$  дифференциальное уравнение третьего порядка.

Для полного решения задачи необходимо определить значения пяти постоянных, трех получающихся при интегрировании уравнения третьего порядка для  $T$  и двух, введенных ранее ( $P$  и  $w_0$ ). Постоянные эти мы определим из условий (4):

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0, \\ p &= P, \\ T &= \tau, \\ \text{grad } T &= -\Gamma_1, \\ \frac{d}{dz}(\text{grad } T) &= -\Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

на поверхности земли, т. е. при  $m = 0$ ,  $w_0$ ,  $P$ ,  $\tau$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  — заданные значения;

$$\text{grad } T = -\frac{dT}{dz}.$$

Решая систему уравнений (3) при добавочных условиях (4), мы получим  $p$ ,  $w$ ,  $T$  как функции  $m$ ; чтобы получить значения этих элементов в зависимости от высоты  $z$ , нам достаточно выразить  $z$  в зависимости от  $m$  при помощи уравнения (5):

$$z = \int_0^m \frac{w}{\mu} dm. \quad (5)$$

При соблюдении этих условий мы получим параметрическое изображение наших элементов и высоты  $z$  через посредство величины  $m$ , отсюда, придав  $m$  ряд значений, найдем зависимость между указанными элементами и высотой, т. е. решим нашу задачу. Приближенное решение ее дается в конце настоящей заметки.

## § 2

Задача наша будет решена, коль скоро мы будем иметь возможность разложить искомые функции ( $p$ ,  $w$ ,  $T$ ) в ряды по степеням параметра  $\mu$ , причем докажем сходимость этих рядов и укажем метод вычисления их коэффициентов.

Полагая  $w = \mu u$ ,  $t = \mu x$  и вводя постоянную  $a$  при условии  $w_0 = \mu a$ , без труда выразим  $p$  и  $T$  через  $u$ :

$$\left. \begin{aligned} p &= P - g\mu x - \mu^2(u - a), \\ T &= \frac{u}{H} (P - g\mu x - \mu^2(u - a)), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Остальные наши уравнения дадут нам по исключению из них  $p$  и  $T$  дифференциальное уравнение третьего порядка относительно  $u$ ; заменяя  $u$  функцией  $v$  при условии

$$\begin{aligned} v &= u - \mu^2 U_2(\mu) \frac{x^2}{2} - \mu U_1(\mu) x, \\ u &= v + \mu^2 U_2(\mu) \frac{x^2}{2} + \mu U_1(\mu) x, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_1(\mu) &= \frac{a(H\Gamma_1 + g)}{P - \mu^2 a}, \\ U_2(\mu) &= \frac{1}{P - \mu^2 a} \left\{ \Gamma_2 H a^2 + a \frac{(H\Gamma_1 + g)(H\Gamma_1 + 2g)}{P - \mu^2 a} + \frac{2a^2(H\Gamma_1 + g)^2}{(P - \mu^2 a)^2} \mu^2 \right\}, \end{aligned}$$

найдем, что  $v$  будет удовлетворять уравнению третьего порядка

$$\psi \frac{d^3 v}{dx^3} = \Phi \left( \mu, x, v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2 v}{dx^2} \right),$$

где

$$\psi = \alpha P - \alpha g x \mu - (2\alpha - 1) \mu^2 u + \alpha \mu^2 a, \quad \alpha = 1 + \frac{C_v}{H},$$

причем  $\Phi(\mu, x, v', v'')$  — голоморфная функция своих переменных вблизи  $\mu = 0$ ,  $x = 0$ ,  $v = a$ ,  $v' = 0$ ,  $v'' = 0$ .

Начальные условия, которым удовлетворяет  $v$ , будут

$$\begin{aligned} v &= a, \\ \frac{dv}{dx} &= 0, \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= 0 \quad \text{при } x = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\alpha P \neq 0$ , то  $\Phi/\psi$  есть голоморфная функция относительно своих переменных, поэтому согласно теореме Роисагё,  $v$  есть функция от  $\mu$ , голоморфная вблизи  $\mu = 0$ ; само собой разумеется, что при выводе указанного положения нужно принять во внимание голоморфность



вблизи  $\mu=0$  функций  $U_1(\mu)$  и  $U_2(\mu)$ . Подробное изложение указанного доказательства помещено в вышеупомянутой заметке, напечатанной в Геофизическом сборнике.

Доказав, что  $v$  есть голоморфная функция  $\mu$ , тем самым мы доказали, что  $u$ , а также  $p$  и  $T$  — голоморфные функции  $\mu$ ; согласно формуле (5) и  $z$  будет голоморфной функцией  $\mu$  вблизи  $\mu=0$ . Таким образом, все наши искомые функции разлагаются в сходящиеся ряды, расположенные по степеням  $\mu$ ; ряды эти будут сходиться для малых  $\mu$  (т. е. при слабых вертикальных токах) и вблизи земной поверхности (требование малости  $x$ ).

### § 3

Произведем указанное разложение в ряды. Положим, что ряды для  $u$ ,  $p$ ,  $T$  будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1\mu + u_2\mu^2 + \dots, \\ p &= p_0 + p_1\mu + p_2\mu^2 + \dots, \\ T &= T_0 + T_1\mu + T_2\mu^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для определения  $u_n$  мы получим уравнение

$$\frac{du_n}{dx} + vu_n = a_n x + b_n - \psi_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$u_0 = a, \quad v = \frac{8kc}{\alpha} \frac{P^3}{H^4} a^3,$$

$\psi_n(x)$  есть известная функция от  $x$  и от ранее определенных  $v_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ ;  $a_n$  и  $b_n$  — постоянные, определяемые формулами

$$a_n = \eta_n + v\xi_n - \psi_n'(0),$$

$$b_n = \xi_n - \psi_n(0),$$

причем  $\xi_n$  и  $\eta_n$  — коэффициенты разложения в ряды по степеням  $\mu$  функций

$$\mu U_1(\mu) = \xi_1\mu + \xi_2\mu^2 + \dots,$$

$$\mu^3 U_2(\mu) = \eta_1\mu + \eta_2\mu^2 + \dots, \quad \eta = 0.$$

Последовательное определение  $u_n$  из уравнений (8) может быть сделано при помощи условий  $u_n = 0$  при  $x = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) по формуле

$$u_1 = e^{-vx} \int_0^x [a_n x + b_n + \psi_n(x)] dx.$$

Определив таким образом  $u_n$ , мы можем для  $T_n$  и  $p_n$  написать следующие формулы:

$$p_0 = P p_1 = -gx,$$

$$p_2 = a - u_0,$$

$$p_n = -u_{n-2} \quad (n = 3, 4, \dots),$$

$$T_n = \frac{P}{H} u_n - \frac{gx}{H} u_{n-1} - \frac{1}{H} \sum_{i=0}^{n-2} u_i u_{n-i-2} + \frac{a}{H} u_{n-2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При помощи формулы (2) найдем

$$z = \mu \int_0^x u dx;$$

полагая

$$z = z_0 + z_1 \mu + z_2 \mu^2 + \dots,$$

получим

$$z_0 = 0, \quad z_n = \int_0^x u_{n-1} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ограничиваясь в разложении  $T$  по степеням  $\mu$  вторыми степенями, а в разложении  $z$  по степеням  $\mu$  первыми степенями параметра, будем иметь следующее выражение  $T$  в зависимости непосредственно от  $z$ :

$$T = \frac{Pa}{H} + \frac{P\xi_1 - ga}{aH} z + \frac{g\xi_1}{a^2 H} z^2 + \mu^2 \left( \frac{P\eta_2 - 2g\xi_1}{H} \right) \left( \frac{1 - e^{-\frac{vz}{\mu a}}}{v^2} + \frac{z}{v\mu a} \right),$$

где

$$\xi_1 = \frac{a(H\Gamma_1 + g)}{P},$$

$$\eta_2 = \frac{a}{P} \left( H\Gamma_2 a + \frac{(H\Gamma_1 + g)(H\Gamma_1 + 2g)}{P} \right).$$

Численные результаты приложения этих соображений к конкретным случаям распределения температуры в атмосфере будут нами сообщены дополнительно.

Матем. бюро Главной физич. обсерватории  
Июнь 1920 г.

## ОБ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЯХ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ И ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСЬЮ <sup>12</sup>

Ряд соображений \* показывает, что величина горизонтальной составляющей вихрей в атмосфере значительно больше их вертикальной составляющей. Представляется небесполезным указать, что к такому же результату приводит рассмотрение уравнений гидродинамики, управляющих движениями атмосферы. На движение атмосферной частицы влияют, как известно, следующие четыре обстоятельства:

- 1) сила тяжести, обладающая консервативным характером;
- 2) приток энергии, сказывающейся в действии на частицу относительного давления;
- 3) кажущиеся силы, обусловленные вращением Земли;
- 4) диссипативные силы внутреннего трения в атмосфере, а также и силы трения двух различных атмосферных слоев друг о друга или о земную поверхность и т. п.

Обозначая через  $V$  вектор скорости атмосферной частицы, через  $F_1$  — вектор силы тяжести, действующей на единицу массы частицы, через  $\omega$  и  $p$  — удельный объем и давление в данной частице к моменту  $t$ , через  $F_2$  — вектор отклоняющей силы вращения Земли и через  $F_3$  — равнодействующую всех диссипативных сил, будем иметь следующее векторное уравнение движения атмосферной частицы:

$$\frac{dV}{dt} = -\omega \operatorname{grad} p + F_1 + F_2 + F_3. \quad (1)$$

Для выяснения изменения величины вихря рассматривают изменения напряжения  $I$  вихревой трубки; это напряжение, равное для бесконечно тонкой вихревой трубки произведению величины вихря на площадь сечения нормального к оси трубки, во всех случаях равняется циркуляции скорости  $C$  по замкнутому контуру, проведенному на поверхности трубки (как бы сжимающему трубку). Согласно теореме В. Томсона и Бьеркнеса производная циркуляции скорости по времени равняется циркуляции ускорения  $\Pi$ , которая согласно формуле (1) распадается на четыре части: 1) циркуляция  $\Pi_0$  вектора  $\omega \operatorname{grad} p$ ; 2) циркуляция  $\Pi_1$  силы тяжести  $F_1$ ; 3) циркуляция  $\Pi_2$  отклоняющей силы Земли и 4) циркуляция  $\Pi_3$  диссипативных сил.

Так как сила тяжести — консервативная сила, то  $\Pi_1 = 0$  при любом замкнутом контуре. Остаются, таким образом, только три слагаемых цирку-

---

\* В j e r k n e s V. Dynamische Meteorologie, Bd. 2. Braunschweig, 1912, а также см. мою статью «Об атмосферных вихрях». — Геофизический сборник, 1916, 3 (резюме этой статьи см. на стр. 369 настоящей книги).

ляции. Если вихрь пересекает к некоторому моменту времени изобарическую поверхность, то, взяв за контур, стягивающий вихревую трубку, линию пересечения трубки с изобарической поверхностью, будем иметь

$$\Pi_0 = \int \omega \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \int \omega dp = 0,$$

ибо  $p = \text{const}$  на всем контуре; таким образом, с того момента, как вихревая трубка пересекла изобарическую поверхность, будем иметь

$$\frac{dC}{dt} = \Pi_2 + \Pi_3, \quad (2)$$

т. е. в развитии изменения циркуляции скорости или напряжения вихревой трубки, что то же самое, будет играть роль лишь отклоняющая сила вращения Земли и диссипативные силы. Если пренебречь действием этих сил, то мы нашли бы, что

$$\frac{dC}{dt} = 0;$$

иначе говоря, коль скоро вихревая трубка пересечет изобарическую поверхность, напряжение ее перестанет изменяться и, следовательно, не может возникнуть вихревой трубки, пересекающей изобарическую поверхность. Возникать могут лишь вихревые трубки, параллельные изобарическим поверхностям; только такие трубки могут увеличивать свое напряжение, т. е. могут развиваться. Принимая же во внимание, что изобарические поверхности расположены почти горизонтально, мы будем иметь возможность возникновения и развития горизонтальных вихрей и невозможность появления вертикальных вихрей.

Наличие отклоняющей силы Земли и диссипативных сил смягчает указанный выше процесс, позволяя возникать и развиваться вихрям с вертикальной осью и иногда усиливая или ослабляя развитие вихрей с горизонтальной осью. Приведенные элементарные и совершенно суммарные соображения позволяют, как нам кажется, понять причину, почему вертикальные составляющие вихрей значительно меньше горизонтальных составляющих атмосферных вихрей.

Матем. бюро Главной физич. обсерватории  
20 декабря 1920 г.

## ИДЕЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ<sup>13</sup>

Ряд работ английских метеорологов и гидродинамиков \*, появившихся в последнее время, изучает атмосферные движения не с точки зрения стационарных явлений, а с точки зрения явлений, изменяющихся с течением времени. Подобная динамическая точка зрения представляется для синоптика единственно рациональной, ибо случаи не меняющихся с течением времени атмосферных движений встречаются чрезвычайно редко в обычной синоптической практике; вот почему взгляды английских метеорологов и гидродинамиков имеют безусловное преимущество перед старыми работами Guldberg'a и Mohn'a, Oberdeck'a, Marchi и других, рассматривавшими циклоны и антициклоны как явления стационарные. Основная идея упомянутых английских работ заключается в установлении особой кинематической формы для атмосферных движений и использовании уравнений гидромеханики в целях получения указаний относительно распределения давления, отвечающего заданному кинематическому движению. Эта совершенно правильная в основе своей идея стеснена, однако, в упомянутых работах рядом дополнительных предположений, лежащих не в существе рассматриваемого вопроса, а введенных исключительно в целях упрощения вычислений. Так, например, в работе Шоу вводится предположение о том, что изобары в рассматриваемом им случае совпадают с линиями тока; подобное предположение в свою очередь требует выполнения так называемых геострофических соотношений \*\*. Лорд Рэлей в выше цитированной работе предполагает плотность постоянной и, кроме того, пренебрегает вертикальной составляющей отклоняющей силы Земли. Наконец, Грин сводит задачу к случаю изотермических изменений жидкости, т. е. предполагает плотность пропорциональной давлению. Кроме того, почти все указанные авторы (за исключением Грина) ограничивают себя предположением неизменяемости скоростей ветра с высотой, предположением, которое не только не соответствует действительности, но и так сужает, как мы это увидим ниже, задачу об атмосферных движениях, что совершенно правильная в основе своей идея английских метеорологов становится мало применимой к условиям атмосферной действительности.

\* R a y l e i g h L. On the dynamics of revolving fluids. — Proc. Roy. Soc., 1915, 93, N 648, p. 148; The travelling Cyclone. — Philos. Mag., 1919, p. 420.

S h a w N. Proceed. Roy. Soc., 94, p. 34.  
G r e e n. Some problems relating to rotating Fluid in the Atmosphere. — Philos. Mag., 1921, p. 665.

\*\* Кроме упомянутых работ, смотри книгу S h a w N. Manual of Meteorology. Cambridge, Univ. Press., 1919, part. IV.

Целью настоящей заметки является изучение атмосферных движений, кинематическая форма которых близка к указанной английскими метеорологами, со всей возможной степенью общности и без введения каких-либо стесняющих и по существу ненужных предположений. Такое исследование можно выполнить, используя условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости, изложенные в моей работе «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости».

## § 1

1. Для изучения атмосферных движений выберем координатную систему следующим образом: ось  $z$  направим вертикально (по отвесу) вверх, ось  $x$  — к северу (по меридиану), ось  $y$  — к востоку (по параллели), начало координат расположим в том месте, где мы изучаем движение. Пусть движение нашей жидкости (атмосферы) будет в каждой горизонтальной плоскости вращением с постоянной угловой скоростью  $\zeta$  вокруг перемещающегося центра с координатами  $x = a$ ,  $y = b$ . При этом перемещающийся центр вращения будет различным для горизонтальных плоскостей на разных высотах, а угловая скорость для всех высот одинаковой, т. е.  $a$  и  $b$  будут функциями  $z$  и времени  $t$ ; что же касается  $\zeta$ , то это будет некоторая постоянная. Заметим здесь же, что при выбранной нами координатной системе циклоническое вращение характерно для отрицательных  $\zeta$ , а антициклоническое — для положительных. Указанное движение явится перемещением вращающегося атмосферного шнура, ось которого не является, вообще говоря, вертикальной прямой; между тем Шоу и большинство английских метеорологов предполагают, что столб вращающейся жидкости стоит вертикально, т. е.  $a$  и  $b$  не зависят от  $z$ , являясь лишь функциями времени  $t$ .

Мы рассматриваем безграничную массу жидкости; в действительности указанное движение в атмосфере будет ограничено снизу земной поверхностью, сверху — одним из атмосферных слоев, например слоем нижней инверсии, или границей между стратосферой и тропосферой.

2. Пользуясь только что приведенной формой атмосферных движений и обозначая через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  составляющие по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вектора скорости ветра  $V$  в данной точке с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и к моменту  $t$ , без труда получим следующие формулы:

$$u = \frac{\partial a}{\partial t} - \zeta (y - b), \quad (1)$$

$$v = \frac{\partial b}{\partial t} + \zeta (x - a),$$

$$w = 0.$$

Прежде чем перейти к изучению динамических свойств движения, данного формулами (1), займемся, следуя кругу идей, указанному Шоу, кинематическим рассмотрением этого движения, а именно: обратимся к изучению мгновенного центра вращения атмосферных частиц, линий тока, траекторий этих частиц и вихревых линий.

Координаты центра вращения обозначим через  $x_1, y_1, z_1$ ; эти координаты определяются равенствами

$$x_1 = a(t, z), \quad y_1 = b(t, z), \quad z_1 = z. \quad (2)$$

Геометрическое место центров вращения для всех высот дает нам понятие об оси вращения. Эта ось вращения, вообще говоря, — кривая двойкой кривизны — меняет свое положение и форму с течением времени; для движений, рассматриваемых Шоу и Рэлеем, ось вращения есть вертикальная прямая, перемещающаяся с течением времени; для некоторых движений, изученных Грином, ось вращения является наклонной прямой, не смещающейся с течением времени.

В каждый данный момент движение, нами рассматриваемое, можно представить как вращение частиц жидкости около некоторого мгновенного центра, который мы, следуя Шоу, назовем кинематическим центром.

Координаты  $x_c, y_c, z_c$  кинематического центра определяются равенствами

$$x_c = a - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial b}{\partial t}, \quad y_c = b + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial a}{\partial t}, \quad z_c = z, \quad (3)$$

при этом мы исключаем из рассмотрения малоинтересный случай  $\zeta = 0$ , когда вращение жидкости отсутствует.

Кинематический центр перемещается, следуя за центром вращения, но он, вообще говоря, смещен относительно центра вращения, причем это смещение зависит от скорости перемещения центра вращения и различно как в разных горизонтальных плоскостях, так и для разных моментов времени. Отметим несколько особенностей этого смещения, непосредственно вытекающих из формулы (3). Если центр вращения движется к северу, то кинематический центр смещен к востоку при антициклоническом вращении и к западу — при циклоническом; если центр вращения движется к востоку, то кинематический центр смещен к югу при антициклоническом вращении и к северу — при циклоническом. Вообще кинематический центр смещается перпендикулярно к скорости перемещения центра вращения, направо от этой скорости при антициклоническом и налево — при циклоническом вращении. Если центр вращения в известный момент резко меняет направление своего движения, то для этого момента центр вращения и кинематический центр совпадают друг с другом.

Геометрическое место кинематических центров для всех высот назовем кинематической осью движения; относительно

кинематической оси можно сказать то же самое, что и относительно оси вращения.

3. Реальное представление о центре вращения и о кинематическом центре мы можем получить, изучая линии тока и траектории воздушных частиц.

Уравнения линий тока, которые могут быть написаны следующим образом:

$$\frac{dx}{u} - \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},$$

после интегрирования дадут нам равенства

$$\begin{aligned} z &= c_1(t), \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= c_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные функции  $t$ . Таким образом, линии тока будут concentрическими кругами в некоторой горизонтальной плоскости, причем центр этих кругов будет лежать как раз в кинематическом центре, отвечающем данной горизонтальной плоскости. Таким образом, кинематический центр явится критической точкой линий тока рассматриваемого нами движения. Значит, если атмосферное движение близко по своему характеру в известной области к изучаемому движению, то линии тока в этой области будут близки к кругам, а их критическая точка — к нашему кинематическому центру. Если имеются хорошие данные наблюдений над ветром, то провести линии тока и установить их критические точки особых трудностей не представляет\*.

Траектории каждой частицы определяются интеграцией уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

и последующим исключением из полученных интегралов времени  $t$ . Производя соответственные (элементарные) вычисления, мы получим равенства

$$\begin{aligned} x &= a + A \cos(\zeta t + \alpha), \\ y &= b + A \sin(\zeta t + \alpha), \\ z &= B, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $\alpha$  — постоянные, не зависящие от  $t$  и определяемые начальным положением частицы. Нетрудно кинематически представить себе траекторию частицы. Это будет траектория точки, расположенной на круге,

---

\* Bjerknes V. Dynamische Meteorologie und Hydrographie, Bd. II. Braunschweig, 1912.



вращающемся около центра с угловой скоростью  $\zeta$ , причем центр этот (совпадающий с центром вращения) перемещается по пути центра вращения. Начертив такую траекторию, мы получим характерные петли и точки возврата, отмеченные Шоу и Лемпферт в их экспериментальном изучении траекторий воздушных частиц \*. Это обстоятельство дает нам первое указание на то, что изучаемая нами кинематическая форма движения близка к явлениям атмосферной действительности.

4. Нам остается еще рассмотреть, какой вид имеют вихревые линии изучаемого нами движения. Если через  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$  обозначим компоненты вихря по координатным осям, то, пользуясь следующими известными формулами для определения этих составляющих:

$$\xi_0 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta_0 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta_0 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

найдем такие равенства:

$$\xi_0 = \zeta \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial^2 b}{\partial t \partial z}, \quad \eta_0 = \zeta \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial^2 a}{\partial t \partial z}, \quad \zeta_0 = 2\zeta. \quad (6)$$

Из этих формул будет следовать, что горизонтальные составляющие вихрей будут зависеть лишь от времени и от высоты; их величина будет обусловлена двумя причинами: изменением положения центра вращения с высотой и изменением скоростей перемещения центра вращения с высотой. В случае движений, рассматриваемых Шоу, горизонтальных вихрей не будет, а так как величина этих вихрей (по пилотным наблюдениям) \*\* значительно больше вертикальных, то это обстоятельство является одним из указаний на сомнительность предположения Шоу о неизменяемости ветра с высотой.

Вертикальная составляющая вихрей для нашего движения постоянна и будет равна удвоенной угловой скорости вращения. Само собой разумеется, что в условиях атмосферной действительности редко встретится движение, в точности воспроизводящее рассматриваемое движение вращающейся жидкости; конечно, вертикальная составляющая вихря не будет постоянна, а будет меняться в зависимости от координат, как она меняется в пронзающемся шторме.

Как мы увидим ниже, при динамическом изучении рассматриваемого движения величина горизонтальных вихрей совершает два гармонических колебания с разными периодами около некоторого среднего значе-

\* Shaw N. and Lempfert R. The life history of surface air current. Cambridge, 1906.

\*\* Фридман А. Об атмосферных вихрях.— Геофизический сборник, 1916, 3.

Фридман А. О вертикальных и горизонтальных атмосферных вихрях.— Изв. Главной физич. обсерватории, 1920, № 3; см. стр. 141 и 369 настоящей книги.

ния. Это среднее значение зависит от угловой скорости вращающейся жидкости и от широты места, где мы изучаем наше движение; от этих же параметров зависят и оба периода колебания величины горизонтальных вихрей. Следует заметить, что колеблющиеся вихри подобного рода представляют, по-видимому, частое явление в атмосфере.

Перейдем к рассмотрению вихревых линий; эти линии определяются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx}{\xi_0} = \frac{dy}{\eta_0} = \frac{dz}{\zeta_0}.$$

Интегрирование этих уравнений дает нам следующие уравнения для вихревой линии:

$$\begin{aligned} 2\xi x + \frac{\partial b}{\partial t} - \zeta a &= c_1(t), \\ 2\zeta y - \frac{\partial a}{\partial t} - \xi b &= c_2(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные функции времени  $t$ . Рассматривая на данной высоте горизонтальные вихревые линии, получим семейство прямых, определяемых уравнением

$$\eta_0 x - \xi_0 y = \text{const},$$

т. е. к данному моменту на данной высоте вихревые линии будут параллельными прямыми, наклоненными к меридиану под углом, тангенс которого равен отношению  $\frac{\eta_0}{\xi_0}$ .

## § 2

1. Переходя от кинематического рассмотрения движения к динамическому его изучению, установим прежде всего те силы, которые действуют на частицы жидкости с единичной массой. Прежде всего мы должны принять во внимание силу тяжести с учетом центробежного ускорения вращения Земли. Подобного рода сила будет действовать по отвесу вниз и по величине она равна ускорению силы тяжести  $g$ , исправленному на влияние центробежного ускорения вращения Земли вокруг оси. Обозначая вектор этой силы через  $\mathbf{K}$  и составляющие его по осям координат через  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ , будем иметь

$$K_x = 0, \quad K_y = 0, \quad K_z = -g^*.$$

Второй силой, действующей на частицу единичной массы, является отклоняющая сила вращения Земли, проистекающая из ускорения Кориолиса. Эта сила имеет, как известно, не только горизонтальную, но и вертикаль-

ную составляющую. Обозначим вектор этой силы через  $U$ ; на основании теоремы Кориолиса мы можем получить выражение для  $U$  в зависимости от скорости  $V$  частицы и от вектора вращения Земли; обозначим этот последний вектор через  $\mathbf{Y}$ . Принимая во внимание выбранную нами систему координат, мы можем  $\mathbf{Y}$  определить как вектор, направленный к южному полюсу Земли и по величине равный  $\omega$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли вокруг оси. Обозначая составляющие вектора  $\mathbf{Y}$  по выбранным нами координатным осям через  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и полагая, что рассматриваемое нами движение происходит в северном полушарии, в местности с широтой  $\varphi$ , будем иметь следующие равенства:

$$\omega_1 = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\omega \sin \varphi.$$

Нетрудно получить аналогичные формулы и для южного полушария. Заметим, что, предполагая в дальнейшем широту постоянной, мы вводим известного рода ограничение, а именно рассматриваем атмосферное явление мало меняющим свою широту. От этого ограничивающего нас предположения следует освободиться, ибо при движении циклона от Исландии к нам широта меняется в весьма существенных пределах. Однако освободиться от указанного ограничения можно, лишь изучая движение в сферических координатах; это изучение является одной из текущих задач математического бюро Главной физической обсерватории.

На основании теоремы Кориолиса мы можем получить следующее выражение для отклоняющей силы вращения Земли  $U$ :

$$U = -2 [\mathbf{Y}, \mathbf{V}],$$

где символ  $[\mathbf{Y}, \mathbf{V}]$  означает векторное произведение векторов  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$ . Учитывая, что  $\omega_2 = 0$ ,  $w = 0$ , получим следующие выражения для составляющих по координатным осям силы  $U$ :

$$U_x = 2\omega_3 v, \quad U_y = -2\omega_3 u, \quad U_z = -2\omega v.$$

Установив силы, действующие на нашу частицу единичной массы, напишем уравнения гидромеханики в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\omega \operatorname{grad} p + \mathbf{F}, \tag{A}$$

$$\frac{d \ln \omega}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{V},$$

где  $\omega$  и  $p$  — удельный объем и давление;  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на единицу массы жидкости; эта сила определяется равенством

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} - 2 [\mathbf{Y}, \mathbf{V}];$$

операция  $d/dt$  есть обычное сокращенное обозначение следующей операции:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

а символы  $\text{grad}$  и  $\text{div}$  обозначают вектор-градиент скаляра и скаляр, равный расхождению вектора.

2. Как известно, не всякое кинематически мыслимое движение возможно динамически, иначе говоря, не при всяком распределении скоростей частиц жидкости можно подобрать удельный объем и давление, удовлетворяющие уравнениям гидромеханики (А). Оказывается, что составляющие скорости должны удовлетворять некоторым условиям, называемым условиями динамической возможности движения.

Не останавливаясь на выводе этих условий, что сделано в моей работе, упомянутой выше, а также в моей заметке, помещенной в *Comptes Rendus* в 1916 г., ограничусь лишь их перечислением.

Введем два вспомогательные вектора, нужные нам для дальнейшего:

$$\mathbf{G} - \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \omega \text{ grad } p, \quad (8)$$

$$\mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{G} = [\text{grad } p, \text{ grad } \omega],$$

вектор  $\mathbf{G}$  называется динамическим градиентом, вектор  $\mathbf{H}$  — турбулизирующим вектором. Если  $\mathbf{H}$  равен нулю, то под действием консервативных сил при движении жидкости обе основных теоремы Гельмгольца имеют место, иначе говоря, вихревые шнуры не могут ни возникать, ни разрушаться; таким образом, отличие  $\mathbf{H}$  от нуля характеризует степень возникновения или разрушения вихрей в соответствии с известной теоремой Бьеркнеса\*. Очевидно, что  $\mathbf{H}$  обращается в нуль, когда изобарические и изостерические поверхности совпадают, в противном случае  $\mathbf{H}$  отлично от нуля; в условиях атмосферной действительности  $\mathbf{H}$  большей частью отлично от нуля.

Движения сжимаемой жидкости распадаются на два класса. К первому относятся движения, в которых величина  $\mu = (\mathbf{V}, \mathbf{G})$  отлична от нуля; эти движения называются нормальными движениями. Ко второму классу относятся движения, у коих  $\mu$  обращается в нуль; такие движения называются полуконсервативными.

Обратимся к нормальным движениям и введем еще несколько вспомогательных векторов:

$$\alpha = \frac{[\mathbf{H}, \mathbf{V}] + \theta \mathbf{G}}{\mu}, \quad \beta = -\frac{\mathbf{G}}{\mu},$$

\* B j e r k n e s V. — Meteorol. Z. 1900, 17, S. 97, 145.

$$\begin{aligned}\gamma &= \operatorname{rot} \alpha = \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \beta \right], \\ \delta &= \operatorname{rot} \beta + \left[ \frac{\partial \beta}{\partial t}, \beta \right],\end{aligned}\quad (9)$$

здесь  $\theta$  означает  $\operatorname{div} V$ .

Вектора  $\alpha$  и  $\beta$  назовем турбооментами и приведенным градиентом, вектора  $\gamma$  и  $\delta$  ввиду близкой связи их с величиной притока энергии — первым и вторым тепловыми векторами. Нормальное движение называется общим, когда второй тепловой вектор отличен от нуля, и специальным, когда он равен нулю; так как в дальнейшем нам понадобится только общее нормальное движение, то ограничимся установлением условий динамической возможности только для этого вида нормальных движений.

Введем величину  $\lambda$ , которую назовем стереоскаляром, при помощи одного из скалярных уравнений, заключенных в следующем векторном уравнении:

$$\gamma + \lambda \delta = 0. \quad (10)$$

Как мы сейчас увидим, условия динамической возможности для общего нормального движения позволят нам утверждать, что  $\lambda$  будет одной и той же величиной, безразлично из какого скалярного уравнения (10) мы ее будем определять.

Наконец введем при помощи равенства (11) вектор  $\sigma$

$$\sigma = \alpha + \lambda \beta \quad (11)$$

и назовем его стереовектором.

Необходимые и достаточные условия динамической возможности общего нормального движения сжимаемой жидкости заключаются в выполнении следующих требований:

1) динамический градиент должен быть ортогонален турбулизирующему вектору (условие незакручиваемости);

2) оба тепловых вектора должны быть параллельны (тепловое условие);

3) частная производная по времени стереовектора должна быть градиентом стереоскаляра (объемные условия).

Эти условия могут быть написаны в виде равенств

$$(H, G) = 0, \quad (B)$$

$$[\gamma, \delta] = 0, \quad (B)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \operatorname{grad} \lambda. \quad (Г)$$

Если указанные условия соблюдаются, то удельный объем  $\omega$  и давление  $p$  определяются равенствами

$$\omega = \omega_0 e^{\int \sigma_x dx + \sigma_y dy + \sigma_z dz + \lambda dt}, \quad (Д)$$

$$p = \int \frac{G_x dx + G_y dy + G_z dz}{w} + p_0(t), \quad (Е)$$

причем  $\omega_0$  и  $p_0(t)$  — соответственно произвольная постоянная и произвольная функция времени,  $e$  — основание непрерывных логарифмов, а выражения, стоящие под знаком интегралов, являются полными дифференциалами в силу условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости.

3. Обращаясь к изучению полуконсервативных движений, заметим, что они распадаются так же, как и нормальные движения, на два класса; к общим полуконсервативным движениям относятся те движения, для которых вектор  $[G, dG/dt]$  отличен от нуля; к специальным полуконсервативным движениям относятся такие полуконсервативные движения, для которых  $[G, dG/dt]$  обращается в нуль. В дальнейшем нам нужны будут только специальные полуконсервативные движения, поэтому мы только для этих движений установим условия их динамической возможности. Предположим, что  $G$  не обращается в нуль и введем две скалярные величины  $v$  и  $s$ , определяемые с помощью двух скалярных соотношений, вытекающих из векторных равенств

$$[H, V] = vG, \quad (12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = sG.$$

Необходимые и достаточные условия динамической возможности специального полуконсервативного движения сжимаемой жидкости заключаются в выполнении следующих равенств:

$$\begin{aligned} (V, G) &= 0, & [G, \frac{\partial G}{\partial t}] &= 0, \\ (H, G) &= 0, \end{aligned} \quad (Ж)$$

$$sH - \frac{\partial H}{\partial t} + [G, \text{grad}(v + \theta)] = 0,$$

где  $\theta = \text{div } V$ .

Коль скоро условия (Ж) выполняются, удельный объем  $\omega$  определяется следующим образом. Находим общее решение  $\Phi$  нормальной (в силу

условий (Ж)) системы линейных уравнений с частными производными первого порядка\*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{G_x}{G_y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{H_y}{G_z} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{G_y}{G_z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{H_x}{G_z} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (v + \theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

и определяем  $\varphi = \ln \omega$  из уравнения

$$\Phi(\varphi, t, x, y, z) = 0.$$

Давление будет определено по формуле (Е), причем выражение, стоящее под знаком интеграла, будет полным дифференциалом в силу условий (Ж). Как нетрудно видеть, условие незакручиваемости, выражающееся равенством

$$(H, G) = 0,$$

будет иметь место как для нормального, так и для полуконсервативного движения.

С изучения этого условия обычно и начинают при рассмотрении движений сжимаемой жидкости.

### § 3

1. Приступая к динамическому изучению нашего движения, определяемому формулами (1), рассмотрим сначала случай, когда ветер не меняется с высотой, т. е. когда  $a$  и  $b$  не зависят от  $z$ .

Вводя для краткости обозначение

$$\psi = \zeta (\zeta + 2\nu_3),$$

мы можем условия незакручиваемости (равенство (Б)) для нашего случая написать следующим образом:

$$2\nu_1 \zeta \left\{ \left( 2\nu_3 \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} \right) - \psi (y - b) \right\} = 0.$$

Из этого равенства следует, что условие незакручиваемости может выполняться лишь в одном из следующих случаев:

---

\* Мы предполагаем, что  $G_z \neq 0$ ; аналогично можно было бы рассмотреть случай  $G_x \neq 0$  или  $G_y \neq 0$ .

- 1)  $\zeta = 0$ , вращение отсутствует;
- 2)  $\mu_1 = 0$ , движение совершается на полюсе;
- 3)  $\zeta + 2\mu_3 = 0$ .

Первые два случая для нас мало интересны, и мы не будем их рассматривать, хотя разбор их никаких трудностей не представляет.

Третий случай имеет место, когда  $\zeta = -2\mu_3$ ;  $\zeta$  в этом случае — величина положительная; мы назовем этот случай *геоантициклоном*. Он тоже представляет мало интереса, так как величина угловой скорости вращения является определенной, связанной с широтой, постоянной. Более подробное исследование этого случая показывает, что он имеет место при прямолинейных стационарных изобарах с очень слабым барометрическим градиентом; вращающийся столб жидкости перемещается по некоторой траектории, описывая петли при своем движении. Этот случай интересен, пожалуй, лишь тем, что показывает передвижение вихря (вращающегося столба воздуха) при полной стационарности карты изобар, т. е. карта изобар не может дать никаких указаний относительно перемещения вихря, а так как разрушительные действия связаны как раз с перемещением вихря, то само собой разумеется, что, используя лишь карту изобар и не пользуясь ветром, будет совершенно невозможно предвидеть, в каком месте пройдет разрушающий вихрь. Это обстоятельство можно было бы не учитывать, если бы оно имело место только в геоантициклоне, т. е. при весьма исключительных условиях и при исключительно малом градиенте. Мы увидим, однако, далее, что аналогичные обстоятельства встречаются и в более обычных для атмосферы условиях. Невозможность предвидеть на основании карты изобар перемещение вихря служит лишь одним указанием на необходимость улучшить производство метеорологических наблюдений над ветром и использовать более интенсивно эти наблюдения в синоптической практике.

Предположение неизменяемости ветра с высотой привело нас к трем малоинтересным случаям. Изучая в дальнейшем общий случай, когда ветер с высотой меняется, мы ради краткости будем предполагать, что угловая скорость вращения  $\zeta$  отлична от нуля, что движение происходит не на полюсе ( $\mu_1 \neq 0$ ) и что мы имеем дело не с геоантициклоном ( $\zeta + 2\mu_3 \neq 0$ ).

2. Обратимся к изучению общего случая движения, определяемого формулами (1). Вычисляя динамический градиент и турбулизирующий вектор, получим следующие формулы:

$$G_x = (x - a)\psi + 2\mu_3 \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial^2 a}{\partial t^2},$$

$$G_y = (y - b)\psi - 2\mu_3 \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial^2 b}{\partial t^2},$$



$$G_z = -g - (x - a) 2\mu_1 \zeta - 2\mu_1 \frac{\partial b}{\partial t}, \quad (13)$$

$$H_x = -\psi \frac{\partial b}{\partial z} - 2\mu_3 \frac{\partial^2 a}{\partial t \partial z} - \frac{\partial^3 b}{\partial t^2 \partial z},$$

$$H_y = -2\mu_1 \zeta + \psi \frac{\partial a}{\partial z} - 2\mu_3 \frac{\partial^2 b}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^3 a}{\partial t^2 \partial z},$$

$$H_z = 0.$$

Используя условия незакручиваемости, найдем, что

$$H_x = 0, \quad H_y = 0. \quad (14)$$

Таким образом, в рассматриваемом движении турбулизирующий вектор обращается в нуль, иначе говоря, изостерические и изобарические поверхности совпадают; это, очевидно, равносильно совпадению изотермических и изобарических поверхностей. Конечно, подобное обстоятельство значительно обесценивает рассматриваемое движение, ибо, как показывают ежедневные синоптические карты, совпадение изотерм и изобар редко имеет место. Однако, с другой стороны, в атмосферной действительности мы часто встречаемся со случаем пересечения изобарических и изотермических поверхностей под весьма острым углом, что соответствует весьма малой величине турбулизирующего вектора  $\mathbf{H}$  и позволяет результаты изучения рассматриваемого нами движения считать приблизительно правильными и для условий атмосферной действительности. Интегрирование условий (14) дает нам следующие два равенства:

$$\begin{aligned} -\psi a + 2\mu_3 \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} &= -2\mu_1 \zeta z + q_1(t), \\ -\psi b - 2\mu_3 \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} &= q_2(t), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — произвольные функции времени  $t$ . Обращаясь к случаю общего нормального движения, будем иметь

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0, \quad \lambda = 0, \quad \sigma = 0,$$

откуда, пользуясь равенством (Д), найдем

$$\omega = \omega_0 = \text{const.}$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае удельный объем или, что то же самое, плотность является величиной постоянной.

Такой результат противоречит факту увеличения удельного объема с высотой; это значит, что полученное нами движение не может хорошо

выражать действительного явления, если высота вращающегося столба воздуха значительна, иначе говоря, когда слой инверсии, в которую упирается наш столб, расположен (это часто имеет место в весенних инверсиях) высоко над землей. Наоборот, при незначительной высоте вращающегося столба воздуха (например, при зимней низко над землей расположенной инверсии) условие постоянства плотности будет не слишком нарушено в условиях атмосферной действительности. Итак, разбираемый нами случай может иметь место, когда слой инверсии расположен невысоко над земной поверхностью.

3. Перейдем к определению изобар, отвечающих разбираемому нами случаю. Определяя давление  $p$  по формуле (E), найдем

$$\omega_0 p = \frac{\psi}{2} \left\{ x^2 + 2 \frac{q_1(t) - 2\alpha_1 \zeta z}{\psi} x + y^2 + 2 \frac{q_2(t)}{\psi} y - 2 \frac{g}{\psi} z - \frac{2}{\psi} L(z, t) \right\} + \omega_0 p_0(t), \quad (16)$$

где

$$L(z, t) = 2\alpha_1 \int \left( \frac{\partial b}{\partial z} - \zeta a \right) dz.$$

Из формулы (16) видно, что сечение изобарической поверхности горизонтальной плоскостью на высоте  $z$  даст семейство изобар (или, что в нашем случае то же самое, изотерм), являющихся концентрическими кругами с центром в точке с координатами  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , определяемыми равенствами

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2\alpha_1 \zeta z - q_1(t)}{\psi}, \\ y_0 &= - \frac{q_2(t)}{\psi}, \\ z_0 &= z. \end{aligned} \quad (17)$$

Эту точку можно назвать, по аналогии с соответствующим термином Шоу, динамическим центром. Геометрическое место динамических центров для разных высот можно назвать динамической осью движения. Как показывает формула (17), динамический центр не совпадает, вообще говоря, ни с кинематическим центром, ни с центром вращения. Динамическая ось является прямой линией, расположенной в плоскости меридиана и наклоненной к вертикали под углом, тангенс которого равен величине  $2\alpha_1/(\zeta + 2\alpha_3)$  и, следовательно, зависит как от угловой скорости вращения, так и от широты места.

Формулы (17) показывают, что динамический центр движется, причем составляющие по осям координат скорости его перемещения  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$

определяются формулами

$$q_x = -\frac{1}{\psi} \dot{q}_1(t), \quad q_y = -\frac{1}{\psi} \dot{q}_2(t), \quad q_z = 0. \quad (18)$$

Из уравнений (15) нетрудно обычными приемами определить  $a$  и  $b$ . Производя вычисления, получим равенства

$$\begin{aligned} a = \frac{2\mu_1}{\xi + 2\mu_3} z + \alpha(t) + A_1(z) \cos \mu_1 t + B_1(z) \sin \mu_1 t + \\ + A_2(z) \cos \mu_2 t + B_2(z) \sin \mu_2 t, \\ b = \beta(t) + B_1(z) \cos \mu_1 t - A_1(z) \sin \mu_1 t - \\ - \operatorname{sign} \psi [B_2(z) \cos \mu_2 t - A_2(z) \sin \mu_2 t], \end{aligned} \quad (19)$$

где  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  — произвольные функции  $z$ ;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mu_1 = \sqrt{\psi + 2\mu_3^2} + \sqrt{(\psi + 2\mu_3)^2 - \psi^2} = \sqrt{\psi + \mu_3^2} + |\mu_3|, \\ \mu_2 = \sqrt{\psi + 2\mu_3^2} - \sqrt{(\psi + 2\mu_3)^2 - \psi^2} = (\sqrt{\psi + \mu_3^2} - \mu_3) \operatorname{sign} \psi, \end{aligned}$$

причем  $|\mu_3|$  означает абсолютное значение  $\mu_3$ , а  $\operatorname{sign} \psi$  означает  $+1$  или  $-1$ , смотря по тому  $\psi > 0$  или  $\psi < 0$ .

Функции  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , входящие в формулу (19), определяются как частные решения уравнений

$$\begin{aligned} -\psi \ddot{\alpha} + 2\mu_3 \dot{\beta} - \ddot{\alpha} &= q_1(t), \\ -\psi \ddot{\beta} - 2\mu_3 \dot{\alpha} - \ddot{\beta} &= q_2(t), \end{aligned}$$

где  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$  означают первую и вторую производные по времени от функции  $\alpha(t)$ .

Формула (19) показывает, что центр вращения в своем передвижении связан с перемещением динамического центра. В самом деле, введем точку с координатами  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\mu_1}{\xi + 2\mu_3} z + \alpha(t), \\ b_0 &= \beta(t), \\ c_0 &= z \end{aligned} \quad (20)$$

и назовем ее вторичным центром вращения. Движение вторичного центра вращения на любой высоте обусловлено перемещениями динамического центра; в то же время вторичная ось вращения (геометрическое место вторичных центров вращения для разных высот) будет прямой, параллельной динамической оси.

Движение центра вращения, как видно из формулы (19), распадается на два: движение вторичного центра вращения, зависящее от перемещения динамического центра, и движение центра вращения около вторичного центра вращения, разное для разных высот, но не зависящее от перемещения динамического центра.

Это второе движение можно описать так: вокруг вторичного центра вращения движется по кругу с угловой скоростью  $\mu_1$  некоторая точка, центр вращения (первичный) движется около этой точки также по кругу с угловой скоростью  $\mu_2$ ; получается движение, аналогичное эпициклам древних астрономов. Мы не останавливаемся за недостатком места на разборе интересных случаев, когда динамический центр перемещается прямолинейно и равномерно или когда он движется равномерно по кругу. Путь изучения этих движений будет заключаться прежде всего в определении движения вторичного центра вращения.

4. Обратимся теперь к изучению специального нормального движения и полуконсервативного движения. Несколько длинные, но элементарные вычисления покажут нам, что случай специального нормального движения невозможен; наоборот, рассмотрение полуконсервативного движения позволит освободиться от ограничивающего нас предположения о постоянстве плотности воздуха.

Условие полуконсервативных движений дает равенства

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} &= 0, \\ \xi \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} &= 0;\end{aligned}\quad (21)$$

в свою очередь эти равенства позволяют нам утверждать справедливость соотношения

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

следовательно,  $[G, \partial G / \partial t] = 0$ , и наше полуконсервативное движение должно быть специальным. Нетрудно видеть, что  $G \neq 0$  и что все условия (Ж) выполняются. Таким образом, условия динамической возможности рассматриваемого нами движения сводятся к выполнению равенств (15) и (21). Пользуясь этими равенствами, найдем, что обе функции  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  не зависят от времени  $t$  и являются постоянными:  $q_1(t) = q_1$ ,  $q_2(t) = q_2$ .

Вычисляя  $a$  и  $b$ , будем иметь

$$\begin{aligned}a &= \frac{z'}{\xi} + A(z) \cos \xi t + B(z) \sin \xi t, \\ b &= \frac{q}{\xi} + A(z) \sin \xi t - B(z) \cos \xi t,\end{aligned}\quad (23)$$

где  $z'$  и  $q$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} z' &= \frac{2\nu_1 \xi z - q_1}{\xi + 2\nu_3}, \\ q &= -\frac{q_2}{\xi + 2\nu_3}. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, центр вращения описывает круги с угловой скоростью  $\xi$  вокруг точки, имеющей на высоте  $z$  координаты  $x_0, y_0, z_0$ , определяемые равенствами

$$x_0 = \frac{z'}{\xi}, \quad y_0 = \frac{q}{\xi}, \quad z_0 = z. \quad (25)$$

Ниже мы увидим, что эта точка будет динамическим центром нашего движения; значит центр вращения описывает круги с угловой скоростью  $\xi$  около динамического центра.

Для определения динамического центра обратимся к изучению удельного объема и давления. Вычисляя динамический градиент для нашего случая, мы без труда найдем

$$\begin{aligned} G_x &= \psi x - 2\nu_1 \xi z + q_1, \\ G_y &= \psi y + q_2, \\ G_z &= -g - 2\nu_1 \xi x + 2\nu_1 \frac{2\nu_1 \xi z - q_1}{\xi + 2\nu_3}; \end{aligned}$$

пользуясь этими формулами, мы определим  $\Phi$ , а значит и  $\omega = e^\Phi$  из уравнений (3). Производя некоторые упрощения, найдем

$$\omega = F(\sigma),$$

где

$$\sigma = y'^2 + (z' - x')^2 - \frac{g}{\nu_1} z',$$

$F(\sigma)$  — произвольная функция своего аргумента;  $x', y', z'$  определяются равенствами

$$x' = \xi x, \quad y' = \xi y + \frac{q_2}{\xi + 2\nu_3}, \quad z' = \frac{2\nu_1 \xi z - q_1}{\xi + 2\nu_3}. \quad (26)$$

Вводя функцию  $\Pi(\sigma)$ , связанную с  $F(\sigma)$  соотношением

$$\Pi(\sigma) = \int \frac{d\sigma}{F(\sigma)},$$

мы будем для определения давления  $p$  иметь равенство

$$p = \frac{\xi + 2\nu_3}{2\xi} \Pi(\sigma) + p_0(t).$$

Из этой формулы следует, что изобары на высоте  $z$  будут определяться семейством кривых

$$\sigma = y'^2 + (z' - x')^2 - \frac{g}{\omega_1} z' = \text{const};$$

это семейство будет семейством концентрических кругов с неподвижным центром, определяемым координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ , вычисляемыми по формуле (25). Этот неподвижный центр, очевидно, будет динамическим центром рассматриваемого движения.

Произвольность функции  $F(\sigma)$  позволяет нам выбрать то изменение плотности с высотой, какое имеется в атмосфере в данном месте; таким образом, мы освобождаемся от весьма существенного, указанного выше ограничения, и разбираемое нами движение может иметь место, как бы высоко (хотя бы до стратосферы) ни простирался наш столб вращающейся жидкости.

В рассматриваемом движении динамический центр неподвижен, между тем центр вращающейся жидкости обегает его по кругу с постоянной угловой скоростью; это движение близко такому явлению, часто наблюдающемуся в атмосфере, при котором стационарный центр начинают обегать небольшие по горизонтальным размерам вихри, несущие с собой значительные разрушения.

Предвидеть движение этих вихрей трудно потому, что динамический центр не смещается, оставаясь постоянно на одном и том же месте и, следовательно, карта изобар мало меняется; для изобар остается лишь возможность приближаться к динамическому центру или удаляться от него.

1921 г.

## О ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ГРАДИЕНТАХ В АТМОСФЕРЕ <sup>14</sup>

1. Аэрологические наблюдения дают возможность констатировать, что вертикальный температурный градиент  $\gamma$  в большинстве случаев не превышает своего так называемого граничного значения  $\gamma_L = 3,4 \cdot 10^{-2}$ , выраженного в геофизических единицах (метр, тонны, секунда). Этот направленный наружу градиент характеризует ту границу вертикальных температурных градиентов, начиная от которой происходит не уменьшение, а только увеличение плотности воздуха с высотой.

Но в некоторых случаях вертикальный температурный градиент может превышать значение  $\gamma_L$  без нарушения равновесия атмосферы. Цель этой статьи показать, что равновесие атмосферы при температурных градиен-

тах, превышающих граничное значение, возможно и теоретически. Обычное представление о том, что более тяжелая верхняя воздушная масса должна в силу необходимости, опускаясь, проникать в более легкую, очевидно, неправильно, так как такое представление не учитывает наличия давления, или, иначе говоря, при этом не рассматриваются силы взаимодействия внутри газообразной среды\*.

2. Направим ось  $z$  прямоугольной системы координат вертикально вверх, причем начало координат должно находиться на земной поверхности. Если через  $t$  обозначить время, через  $x, y, z$  — координаты какой-либо точки в атмосфере, то получим для случая равновесия атмосферы следующие уравнения, которые непосредственно вытекают из гидродинамических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \omega \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \omega \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, & -g - \omega \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 0, \\ p\omega &= RT, \\ \epsilon\omega &= c_p \frac{\partial T}{\partial t} - A\omega \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В этих уравнениях  $p$ ,  $\omega$  и  $T$  означают давление, удельный объем и абсолютную температуру в данной области атмосферы;  $\epsilon$  — тепло, подведенное за единицу времени в единицу объема;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении;  $R$  — газовая постоянная;  $A$  — термический эквивалент работы. Три первые уравнения (1) — это гидродинамические уравнения, полученные из условий равновесия воздушных частиц, четвертое — уравнение неразрывности для случая равновесия, пятое — уравнение Клапейрона и шестое — уравнение притока энергии.

Систему (1) можно непосредственно интегрировать. Три первые уравнения показывают, что  $p$  и  $\omega$  не зависят от  $x$  и  $y$ . Из четвертого уравнения следует, что  $\omega$  не зависит от  $t$  (плотность не изменяется со временем):

$$\omega = \omega(z). \quad (2)$$

Шестое из уравнений (1) дает с помощью уравнения Клапейрона следующее:

$$\epsilon = \frac{c_v}{R} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $c_v$  означает удельную теплоемкость при постоянном объеме.

\* Приведенный в этой работе случай равновесия атмосферы я исследовал в статье «О вертикальных течениях в атмосфере», которая была закончена в мае 1919 г. и появилась на русском языке в «Известиях Физико-математического общества» при университете в Перми в 1920 г. (См. стр. 104 настоящей книги).

Последнее из приведенных уравнений вместе с третьим уравнением (1) показывает, что  $\varepsilon$  не зависит от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; это значит, что  $\varepsilon$  является только функцией  $t$  (приток тепла на различных высотах одинаков):

$$\varepsilon = \varepsilon(t).$$

Обе функции  $\omega(z)$  и  $\varepsilon(t)$  произвольны; давление  $p$ , как легко увидеть из уравнений (1), определяется уравнением

$$p = p_0 - g \int_0^z \frac{dz}{\omega(z)} + \frac{R}{c_v} \int_0^t \varepsilon(t) dt, \quad (4)$$

где  $p_0$  означает давление на поверхности земли ( $z = 0$ ) и в начальный момент ( $t = 0$ ).

Уравнения (2), (3) и (4) вместе с уравнением Клапейрона приводят к полному решению задачи: определяются при условии равновесия атмосферы плотность, давление и температура.

3. Из полученного решения очевидно, что это равновесие должно нарушиться, как только приток энергии на различных высотах и в различных местах станет неодинаков.

Из этого же решения можно определить величину вертикального температурного градиента. Из предыдущих формул, если учесть, что вертикальный температурный градиент  $\gamma$  определяется из уравнения  $\gamma = -\partial T / \partial z$ , можно непосредственно получить уравнение

$$\gamma = \gamma_L - T \frac{d \ln \omega}{dz}, \quad (5)$$

где  $\gamma_L = g/R$  и означает граничное значение вертикального температурного градиента. Уравнение (5) может быть написано следующим образом

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{R(\gamma_L - \gamma)}{p}. \quad (6)$$

Это уравнение показывает, что, пока вертикальный температурный градиент остается меньше граничного значения, удельный объем растет с высотой (плотность уменьшается), но как только вертикальный температурный градиент превышает граничное значение, удельный объем уменьшается с высотой (плотность возрастает). Однако можно выбрать такое изменение удельного объема с высотой, что при вертикальном температурном градиенте, превышающем граничное значение, атмосфера останется в равновесии, т. е., при вертикальных температурных градиентах, превышающих граничное значение, теоретически допустимы случаи равновесия атмосферы.



4. В настоящих рассуждениях зависимость удельного объема от высоты остается произвольной; это следует из того, что не делалось никакого предположения о характере притока тепла. Исследуем теперь, каким образом могут измениться результаты предыдущего параграфа, если предположить определенный характер изменения температуры.

Рассмотрим случай изменения температуры вследствие теплопроводности. Обозначим через  $\Lambda$  коэффициент внутренней теплопроводности атмосферы воздуха \*, тогда

$$\varepsilon = K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)^{**}.$$

Подставив это выражение для  $\varepsilon$  в уравнения (1) и рассуждая так же, как в § 2, легко найдем, что  $\omega$  — функция только  $z$ , а  $p$  и  $T$  будут зависеть от  $t$  и  $z$ . В соответствии с этим обстоятельством мы получим после нескольких простых преобразований из уравнений (1) следующие соотношения для определения  $\omega$  и  $p$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(z), \\ \alpha \frac{\partial p}{\partial t} &= p\omega'' - \frac{g\omega'}{\omega}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{g}{\omega}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha = c_v/R$ ,  $\omega'$  и  $\omega''$  — производные первого и второго порядков функции  $\omega$  по  $z$ . Если  $\omega$  и  $p$  будут определены из уравнений (7), а температура  $T$  из уравнения Клапейрона, то задача о равновесии атмосферы в случае притока тепла вследствие теплопроводности полностью разрешается.

Если продифференцировать по  $z$  обе части уравнений (7) и принять во внимание, что согласно третьему и первому уравнению (7)  $\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} = 0$  то после простых вычислений найдем уравнение

$$p\omega''' - \frac{2g\omega''}{\omega} + \frac{g\omega'^2}{\omega^2} = 0, \quad (8)$$

где  $\omega'''$  — производная  $\omega$  третьего порядка по  $z$ .

В ходе дальнейшего исследования задачи нужно различать два случая:

- 1)  $\omega''' \neq 0$ , тогда  $p$ , согласно уравнению (8), не зависит от  $t$ , и
- 2)  $\omega''' = 0$ .

\* Коэффициент внутренней теплопроводности атмосферного воздуха, как и коэффициент внутреннего трения, в тысячу раз больше, чем коэффициент, определенный в лаборатории. См. об этом мою статью, цитированную выше.

\*\* См., например, Kirchhoff G. Vorlesungen über Mathematische Physik. Theorie der Wärme. Leipzig, 4, 1894.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

5. Если  $\omega''' \neq 0$ , то, как показывает уравнение (8),  $p$  не зависит от  $t$  и  $\varepsilon = 0$ ; это значит, что  $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$ . Из уравнения Клапейрона следует, что  $T$  не зависит от времени. Итак, мы имеем

$$T = bz + a, \quad (9)$$

где  $a$  и  $b$  — константы. Принимая во внимание (9), с помощью простых вычислений получим следующие выражения для  $\omega$  и  $p$ :

$$p = p_0 (a + bz)^{-\gamma_L/b}, \quad \omega = \frac{R}{p_0} (a + bz)^{(1+\gamma_L)/b}. \quad (10)$$

Из уравнений (9) и (10), которые решают нашу задачу для данного случая, легко видеть, что вертикальный температурный градиент (который в нашем случае равен  $-b$ ) может иметь любое значение; это значит, иначе говоря, что он может превысить граничное значение. Однако какое бы положительное значение градиент ни принял, на всей высоте атмосферы такой градиент не может существовать, так как давление и удельный объем положительны. Следовательно, формулы (9) и (10) с необходимостью приводят к верхней инверсии, которую аналитически можно рассматривать как следствие процесса подвода теплоты посредством теплопроводности.

Исследуем теперь случай  $\omega''' = 0$ . Уравнение (8) дает соотношение

$$2\omega''\omega = \omega'^2. \quad (11)$$

Так как  $\omega''' = 0$ , то  $\omega = a + bz + cz^2$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — константы. Уравнение (11) дает  $4ac = b^2$ . Это означает, что трехчлен  $a + bz + cz^2$  является точным квадратом. Учитывая, что  $\omega$  положительная величина, получаем

$$\omega = (a + bz)^2, \quad (12)$$

где  $a$  и  $b$  — константы, причем можно принять, что  $b > 0$ . Случай  $b = 0$  простой, поэтому исследуем далее только случай  $b > 0$ .

Определим  $p$  из второго и третьего уравнений (7), а температуру — из уравнения Клапейрона; получаем, таким образом,

$$p = p_0 e^{\frac{2b^2}{a}t} + \frac{g}{c(a + bz)}, \quad (13)$$

$$T = \frac{\gamma_L(a + bz)}{b} + \frac{p_0}{R} (a + bz)^2 e^{\frac{2b^2}{a}t},$$

Подсчитав вертикальный градиент  $\gamma$ , найдем

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = -\gamma_L - 2b(a + bz) \frac{p_0}{R} e^{\frac{2b^2}{a}t}.$$

Эта формула после простых преобразований приводит к уравнению

$$\gamma_L - \gamma = 2b(a + bz) \frac{p}{R}. \quad (14)$$

Прежде чем исследовать возможность существования вертикальных температурных градиентов, превышающих граничное значение, рассмотрим, как определяются из наблюдений входящие в наши вычисления постоянные величины  $p_0$ ,  $a$ ,  $b$ . Для получения этих констант мы предположим, что в начальный момент ( $t = 0$ ) и на поверхности Земли ( $z = 0$ ) плотность, удельный объем (или, что то же, температура) и вертикальный температурный градиент заданы. Тогда при  $t = 0$  и  $z = 0$ :

$$p = p^{(0)}, \quad \omega = \omega^{(0)}, \quad T = T^{(0)}, \quad \gamma = \gamma^{(0)},$$

где  $p^{(0)}$  и т. д. — величины, полученные из наблюдений, причем по уравнению Клапейрона

$$p^{(0)}\omega^{(0)} = RT^{(0)}.$$

С этими данными нетрудно определить  $a$ ,  $b$  и  $p$  из уравнений

$$a = \sigma \sqrt{\omega^{(0)}}, \quad b = \sigma \frac{\gamma_L - \gamma^{(0)}}{2T^{(0)}} \sqrt{\omega^{(0)}}, \quad p = -p^{(0)} \frac{\gamma_L + \gamma^{(0)}}{\gamma_L - \gamma^{(0)}},$$

причем  $\sigma = \pm 1$  и выбирается так, чтобы  $b$  было положительным, следовательно,  $\sigma = +1$ , если  $\gamma^{(0)} < \gamma_L$ , и  $\sigma = -1$ , если  $\gamma^{(0)} > \gamma_L$ . Из уравнений (15) непосредственно следует, что при  $0 < \gamma^{(0)} < \gamma_L$ ,  $p_0$  будет отрицательным, а при  $\gamma^{(0)} > \gamma_L$  — положительным. Это значит, что в случае равновесия атмосферы при положительном вертикальном температурном градиенте, который меньше граничного значения, давление со временем падает, а если вертикальный температурный градиент больше граничного значения, то давление со временем возрастает.

Исследуем случай, когда вертикальный температурный градиент превышает граничное значение. Тогда уравнение (14) (при предположении, что  $b > 0$ ) приводит к неравенству

$$a + bz < 0. \quad (15)$$

Уравнения (15) показывают, что  $a$  должно быть отрицательным, но тогда приведенное неравенство будет иметь место только для критиче-

ской высоты  $\zeta$ . Начиная с этой высоты, градиент  $\gamma$  будет меньше граничного значения. Эту критическую высоту можно определять уравнением  $\zeta = -a/b$  и выражать через начальные наблюдения метеорологических элементов следующим образом:

$$\zeta = \frac{2T^{(0)}}{\gamma^{(0)} - \gamma_L}. \quad (16)$$

Итак, чтобы стало возможным появление в атмосфере вертикального температурного градиента, который больше граничного значения, необходимо, чтобы вертикальный температурный градиент на земной поверхности превышал это граничное значение. В таком случае градиент остается больше, чем граничное значение, до определенной высоты  $\zeta$ , которая определяется уравнением (16). Начиная с этой высоты, вертикальный температурный градиент будет меньше граничного значения. Если  $\gamma^{(0)}$  больше, чем  $\gamma_L$ , на  $1,0 \cdot 10^{-2}$ , то критическая высота  $\zeta$  достигает 54600 м, т. е. она будет очень большой. Практически это означает, что если вертикальный температурный градиент на поверхности Земли больше граничного значения, то он таков же и во всем атмосферном слое.

С помощью приведенных в этой работе уравнений нетрудно установить возможность появления инверсии в исследуемом случае, если равновесие в атмосфере установится вследствие притока тепла при теплопроводности.

*Петроград, 1922 г.*

## **ОБ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЯХ И О ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВЕТРА <sup>15</sup>**

Как известно, исследование так называемой структуры ветра показывает, что скорость и направление ветра колеблются около некоторых средних величин, причем периоды и амплитуды этих колебаний могут значительно отличаться друг от друга. Это характерное для структуры ветра явление известно под названием турбулентности ветра. Если рассмотреть кривые пульсаций ветра, то само собой напрашивается предположение, что турбулентность возникает благодаря вихревым нитям, которые пронизывают атмосферу во всех направлениях. Если это объяснение верно, то возникает возможность определять интенсивность, форму и скорость поступательного движения вихревых нитей, движущихся выше или ниже места наблюдения, на основании наблюдений турбулентности ветра на поверхности Земли или на произвольной высоте в свободной атмосфере. Итак, наблюдения турбулентности ветра могут доставить нам весьма ценный материал для заключения о величине и характере атмо-

сферных вихревых нитей, столь важных для всех атмосферных явлений и столь мало исследованных.

Наблюдаемая периодичность турбулентности ветра наводит на мысль, что распределение вихревых нитей не может быть беспорядочным, наоборот, через равные периоды времени в определенном месте наблюдения должна быть одинаковая конфигурация вихревых нитей.

С другой стороны, вертикальная компонента вихря значительно меньше, чем горизонтальные компоненты его, так что можно ограничиться рассмотрением вихрей с горизонтальной осью.

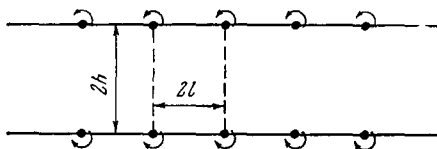


Рис. 1

Итак, мы пришли к проблеме исследования некоторой системы бесконечно большого числа горизонтальных параллельных вихревых нитей, которые обладают определенной периодичностью. Такие системы мы будем называть «периодическими системами» вихревых нитей. Периодическую систему вихрей можно определить следующим образом.

Выберем некоторую конфигурацию  $n$  параллельных вихревых нитей и назовем эту совокупность основной конфигурацией. Затем сдвинем эту основную конфигурацию в направлении, перпендикулярном вихревым нитям на отрезки  $l, 2l, 3l, \dots$ ; полученную таким образом бесконечную систему вихревых нитей мы и назовем периодической системой, а число  $l$  — модулем этой системы вихрей (рис. 1).

Периодические системы вихрей можно разделить на две категории. К первой категории относятся те системы, которые в силу взаимного влияния вихрей движутся как жесткая система точек; ко второй категории — все остальные системы вихрей. Назовем систему вихрей первой категории жесткой системой. Нетрудно показать, что движение жестких систем может быть только поступательным и что скорость их вращения равна нулю.

Ясно, что, проходя над местом наблюдения, жесткая периодическая система вихрей обуславливает периодически изменяющуюся турбулентность ветра. В настоящей заметке мы рассмотрим вопрос о турбулентности ветра, вызываемой жесткой периодической системой вихрей, которая ранее рассматривалась Карманом (Kármán)\*.

\* K á r m á n T. u. R u b a c h. Über den Mechanismus des Flüssigkeits und Luftwiderstandes. — Phys. Z., 1912, S. 49.

## § 1

1. Так как рассматриваемые нами прямолинейные бесконечно тонкие вихревые нити параллельны, то можно (пересекая их перпендикулярной плоскостью) рассматривать вызванное этими вихрями движение как плоское. Обозначив декартову систему прямоугольных координат в этой плоскости через  $x$  и  $y$ , можно свести задачу движения к следующей задаче: установить зависимости между комплексными переменными  $z = x + iy$  и  $w = \varphi + i\psi$ , где  $\varphi$  — потенциал скорости и  $\psi$  — функция тока. Обозначив дальше компоненты скорости по осям координат в точке  $(x, y)$  через  $u$  и  $v$ , получим уравнение

$$u - iv = \frac{dw}{dz}. \quad (1)$$

Рассмотрим сначала движение жидкости с одной бесконечно тонкой вихревой нитью интенсивности  $I$  в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Это движение характеризуется, как известно, следующей зависимостью между  $w$  и  $z$ :

$$w = \frac{I}{2\pi i} \ln(z - z_0),$$

откуда легко получаются известные формулы для  $u$  и  $v$ :

$$u = -\frac{I}{2\pi} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad v = \frac{I}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

2. В цитированной выше статье Карман рассматривал две жесткие периодические системы вихрей. Первая система состоит из двух бесконечных вихревых цепей, расстояние между которыми равно  $2h$  и вихри расположены так, что под каждым вихрем первой цепи находится вихрь второй цепи, причем интенсивности вихрей обеих цепей равны по величине и противоположны по знаку (см. рис. 1). Такую систему вихрей мы назовем «парным упорядочением».

Вторая система вихрей состоит точно так же из двух бесконечных, расстояние между которыми равно  $2h$ , и вихри расположены так, что против середины расстояния между двумя вихрями первой цепи находится вихрь второй, причем интенсивности обеих вихревых цепей равны по величине и противоположны по знаку (рис. 2). Такую систему вихрей называют системой с «шахматным расположением».

Предположим, что ось  $x$  лежит посередине между вихревыми цепями, которые показаны на рис. 1 и 2. Ось  $y$  мы выберем позднее так, чтобы она прошла через пункт наблюдения. Затем положим, что текущая точка  $z = z_0$  соответствует тому вихрю верхней цепи, который в начальный момент находился на оси  $y$ , т. е. был как раз над местом наблюдения.

Легко видеть, что движение для попарного расположения вихрей представляется уравнением

$$w = \frac{I}{2\pi i} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l} (z - z_0)}{\sin \frac{\pi}{2l} (z - z_0 + 2hi)}, \quad (2)$$

где  $I$  — интенсивность каждого отдельного вихря первой цепи.

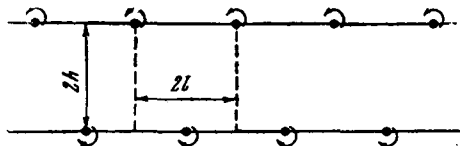


Рис. 2

Аналогично найдем уравнение для шахматного расположения

$$w = \frac{I}{2\pi i} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l} (z - z_0)}{\sin \frac{\pi}{2l} (z - z_0 - l + 2hi)}. \quad (3)$$

Теория поступательного движения особых точек плоских потоков жидкости позволяет определить для наших случаев попарного или шахматного расположения вихрей проекции их скорости поступательного движения на оси координат. Эти проекции  $q_x$ ,  $q_y$  в точке  $z_0$  выражаются формулой

$$\eta = q_x - iq_y = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{dw}{dz} - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} \right). \quad (4)$$

Вычислив, найдем, что каждый отдельный вихрь как при попарном, так и при шахматном расположении движется с постоянной скоростью  $q$  в положительном или отрицательном направлении оси  $x$ . Итак, как попарное, так и шахматное расположение является жесткой системой вихрей, которая движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $q$ . Эта скорость определяется для попарного расположения формулой

$$q = \frac{I}{4l} \coth \frac{\pi h}{l}, \quad (5)$$

\*  $\coth$ ,  $\tanh$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$  — гиперболические котангенс, тангенс, синус и косинус.

а для шахматного расположения

$$q = \frac{I}{4l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l}. \quad (6)$$

Из исследований Кармана следует, что с точки зрения теории малых колебаний попарное расположение неустойчиво и что шахматное расположение вихрей может быть устойчивым только при условии  $\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}$ , из которого получается равенство

$$\frac{h}{l} = 0,283. \quad (7)$$

Исходя из некоторых соображений, мы в дальнейшем будем исследовать как попарные, так и шахматные расположения, не обращая особенного внимания на их устойчивость. Само собой разумеется, что по истечении более или менее короткого промежутка времени неустойчивые системы вихрей разрушаются и появляются турбулентности ветра; вследствие этого нарушается их строго периодический характер. В конце этой заметки мы исследуем случай устойчивого расположения вихрей (по Карману). При этом мы покажем, что все характеристические элементы такой системы вихрей можно определить по данным наблюдений.

3. Так как ось  $x$  проходит на равном расстоянии от обеих цепей и так как вихри перемещаются вдоль оси  $x$  со скоростью  $q$ , то получаем для  $z_0$  выражение

$$z_0 = qt + hi. \quad (8)$$

Пусть  $y$  — ордината точки, где наблюдается турбулентность ветра; абсцисса ее (согласно предположению) равна нулю; поэтому для пункта наблюдения  $z = yi$ .

Предположим далее, что ось  $x$  направлена горизонтально; в случае попарного расположения получим тогда следующее уравнение для горизонтальной и вертикальной компонент скорости ветра в пункте наблюдения:

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = \frac{I}{4li} \left\{ \cotg \frac{\pi}{2l} [i(y-h) - qt] - \cotg \frac{\pi}{2l} [i(y+h) - qt] \right\}, \quad (9)$$

а для случая шахматного расположения

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= u - iv = \\ &= \frac{I}{4li} \left\{ \cotg \frac{\pi}{2l} [i(y-h) - qt] - \cotg \frac{\pi}{2l} [i(y+h) - qt - l] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$



С помощью легко устанавливаемого соотношения

$$\cot g(a + ib) = \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a} - i \frac{\operatorname{sh} 2b}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a}$$

получим следующие формулы для скорости ветра в пункте наблюдения:

1) для попарного расположения вихрей

$$\begin{aligned} u &= c \left( \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \tau} - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \tau} \right), \\ v &= c \left( \frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \tau} - \frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \beta - \cos \tau} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

2) для шахматного расположения

$$\begin{aligned} u &= c \left( \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \tau} - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \tau} \right), \\ v &= -c \left( \frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \tau} + \frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \beta - \cos \tau} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$c = \frac{l}{4l}, \quad \alpha = \frac{\pi(y+h)}{l}, \quad \beta = \frac{\pi(y-h)}{l}, \quad \tau = \frac{\pi q}{l} t.$$

В следующих параграфах мы попытаемся определить из формул (11) и (12) характер колебаний ветра и одновременно покажем, как по данным наблюдений над турбулентностью ветра можно было бы определить положение и свойства системы вихрей, которые вызывают эту турбулентность.

## § 2

1. Легко видеть, что величина  $\alpha$  всегда больше, чем  $\beta$ . Знаки величин  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют расположение системы вихрей относительно пункта наблюдения. Именно, если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют различные знаки ( $\alpha$  — положительный,  $\beta$  — отрицательный), то пункт наблюдения находится между двумя цепями, образующими систему вихрей. Если  $\alpha$  и  $\beta$  оба положительны, то система вихрей находится под наблюдательным пунктом. И, наконец, если  $\alpha$  и  $\beta$  оба отрицательны, то система вихрей находится над пунктом наблюдения.

При исследовании изменения скорости во времени мы ограничимся исследованием горизонтальной компоненты ветра. Как следует из формул (11) и (12), эта компонента периодически изменяется со временем; ее период  $T$  определяется уравнением

$$l = \frac{qT}{2}. \quad (13)$$

Переходя к детальному исследованию изменчивости ветра, обратимся сначала к попарному расположению и рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - x} - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - x},$$

причем, очевидно, достаточно исследовать изменение этой функции при  $x$ , изменяющейся от  $-I$  до  $+I$ .

Из этого исследования  $f(x)$  и формул (11) и (12) нетрудно заключить, что зависимость между  $u$  и  $t$  не может быть представлена ни кривой, которая имеет внутри периода один максимум и один минимум, ни кривой, которая имеет два максимума и два минимума.

Ввиду недостатка места мы затрудняемся представить подробно вид зависимости между  $u$  и  $t$ .

2. Для дальнейшего существенно знать колебание функции  $f(x)$  в интервале  $(-I, +I)$ , т. е. разность между наибольшим и наименьшим значением  $f(x)$  в этом интервале.

Если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют различные знаки (т. е. если наблюдательный пункт расположен между цепями, образующими систему вихрей), то  $2f = f(-I) - f(+I)$ . В случае, если  $\alpha$  и  $\beta$  одинакового знака, нужно принимать во внимание наличие максимума или минимума функции  $f(x)$  в интервале от  $-I$  до  $+I$ . Этот максимум или минимум определяется по общим правилам (приравнивая нулю производную  $f(x)$ ), и тогда  $x_1$  (значение  $x$ , при котором  $f(x)$  достигает максимума или минимума) должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\operatorname{ch} \alpha - x}{\operatorname{ch} \beta - x} = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{sh} \beta}}.$$

Если  $x$  лежит вне интервала  $(-I, +I)$ , то  $2f$  точно так же равно  $f(-I) - f(+I)$ ; наконец, если  $x$  лежит внутри интервала  $(-I, +I)$ , то  $2f = f(x_1) - f(+I)$ .

Из выражения  $f(-I) - f(+I) = 2f$  легко находим

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{l} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l}}{f} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} - \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l} = 0 \quad (14)$$

и аналогично из  $2f = f(x_1) - f(+I)$  находим

$$(a^2 + 2abS + b^2S^2)(S^2 - 1) = \left(S - \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}\right)^2 \left(S^2 - \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}\right), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l}, & a &= 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi h}{l} - \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l} + 2f \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}, \\ & & b &= \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} - 2f \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l}. \end{aligned}$$

3. После этих предварительных вычислений мы можем перейти к вопросу о том, как из данных наблюдения можно определить расположение и характер системы вихрей, которые обуславливают турбулентность ветра

Наблюдения обычно дают нам три величины: 1) скорость поступательного движения вихревых нитей  $q$ ; 2) периоды колебаний ветра  $T$  и 3) амплитуду колебаний ветра  $A$ . Нужно определить следующие четыре неизвестных параметра:  $h$ ,  $l$ ,  $I$ ,  $y$ . Первые два характеризуют расположение вихрей в системе, третья величина дает интенсивность вихрей и четвертая — положение системы вихрей относительно пункта наблюдения.

Самой собой разумеется, что получаемых из наблюдений значений  $q$ ,  $T$ ,  $A$  недостаточно для нахождения четырех неизвестных параметров, характеризующих систему вихрей. Поэтому один из этих параметров должен быть задан. Предположим, например, что нам задана величина  $h$ , тогда остальные параметры можно найти следующим образом.

Из формулы (13) определяется  $l$ :

$$l = \frac{qT}{2}, \quad (16)$$

из формулы (5) находится  $I$ :

$$I = 4lq \operatorname{th} \frac{\pi h}{l}, \quad (17)$$

отсюда следует

$$c = q \operatorname{th} \frac{\pi h}{l}.$$

Несколько труднее определить  $y$ . Ограничимся случаем, когда  $I > 0$ ; тогда  $f$  мы найдем из уравнения

$$f = \frac{A}{2c}. \quad (18)$$

Сначала мы находим  $y$  из формулы (14)

$$\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi h}{l}}{f} + \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi h}{l}}{f^2} + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}}, \quad (19)$$

так как  $\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l}$  положителен.

После того как мы нашли  $y$ , вычислим  $\alpha$  и  $\beta$ . Если они имеют одинаковые знаки, то вычислим  $x_1$ , в случае же, если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют различные знаки, найденное значение для  $y$  решает задачу. Точно так же найденное значение  $y$  является решением задачи, если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют одинаковый знак, но  $x_1$  лежит вне интервала  $(-I, +I)$ . В случае, если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют одинаковые знаки и  $x_1$  внутри интервала  $(-I, +I)$ , полученное значение для  $y$  непригодно и нужно применить уравнение (15). После того как мы получим  $y$  из уравнения (15), вычислим  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $x_1$ . Практический метод опре-

деления элементов системы вихрей, которая вызывает данную турбулентность ветра, дан в работе Полубариновой (Polubarinova P.).\*

4. Перейдем теперь к исследованию шахматного расположения и исследуем функцию  $F(x)$ :

$$F(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + x} - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - x},$$

причем предположим, что  $x$  лежит в интервале  $(-I, +I)$ . Нетрудно видеть, что если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют одинаковые знаки, то производная функции  $F(x)$  в интервале  $(-I, +I)$  не обращается в нуль, а всегда сохраняет один и тот же знак. Обозначив через  $2F$  колебание этой функции в упомянутом интервале, получим

$$2F = F(-I) + F(+I), \quad (20)$$

если  $\alpha$  и  $\beta$  положительны, и

$$2F = F(+I) - F(-I), \quad (21)$$

если  $\alpha$  и  $\beta$  отрицательны.

Легко видеть, что если  $\alpha$  и  $\beta$  положительны, то  $F(x)$  в интервале  $(-I, +I)$  убывает от  $F(-I)$  до  $F(+I)$ , а если  $\alpha$  и  $\beta$  отрицательны,  $F(x)$  возрастает в интервале  $(-I, +I)$  от  $F(-I)$  до  $F(+I)$ . Если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют различные знаки, то  $F(x)$  в интервале  $(-I, +I)$  обращается в нуль. Так как исследование этого случая почти не отличается от приведенного в § 2, то не будем больше задерживаться на нем.

Из уравнений (20) и (21) легко найти следующие соотношения, если  $\alpha$  и  $\beta$  положительны:

$$\operatorname{sh} \frac{\pi y}{l} = \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}}{f} + \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}}{f^2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi h}{l}} \quad (22)$$

и, если  $\alpha$  и  $\beta$  отрицательны,

$$\operatorname{sh} \frac{\pi y}{l} = -\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}}{f} - \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}}{f^2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi h}{l}}. \quad (23)$$

5. Обратимся теперь к определению параметров шахматного расположения по наблюдениям турбулентности ветра. Если применить условия Кармана для устойчивости расположения вихрей, то получим еще одно уравнение, позволяющее определить величину  $h$ , которая оставалась произвольной при исследовании попарного расположения. Ход вычисле-

---

\* Polubarinova P. Zur Frage über die Turbulenz des Windes. — Beitr. Phys. Atmosph., 1924, Bd. XI. S. 181.

ний будет при этом следующий:  $l$  определяется заданными  $q$  и  $T$

$$l = \frac{qT}{2}; \quad (24)$$

согласно условию Кармана, из уравнения (7) получаем

$$h = 0,283 l, \quad (25)$$

из формулы (6) имеем

$$I = 4lq \coth \frac{\pi h}{l} = 4\sqrt{2} lq \quad (26)$$

и отсюда

$$c = q\sqrt{2},$$

$$F = \frac{A}{2c} = \frac{A}{2\sqrt{2}q}. \quad (27)$$

После того как подсчитаны эти величины, определим  $y$  из уравнения (22) или (23). Проверим затем знаки  $\alpha$  и  $\beta$ ; если знаки  $\alpha$  и  $\beta$  одинаковы, то задача решена, в противном случае нужно провести дополнительное исследование, аналогичное предыдущему. Необходимо отметить, что в большинстве случаев последнее исследование оказывается ненужным, так как если используются данные наблюдений на земной поверхности, то совершенно невероятно, чтобы пункт наблюдения находился между двумя вихревыми цепями.

В заключение еще одно замечание: проходящие в атмосфере вихревые нити вызывают турбулентность не только горизонтальной компоненты ветра, но также и вертикальной. Эта вертикальная компонента достигает в определенные моменты, в течение периода колебания турбулентности, величины порядка 1 м/сек и более.

Однако легко видеть, что средняя вертикальная компонента за период равна нулю, это означает, что вертикальные течения, которые вызываются турбулентностью ветра, очевидно, не могут послужить причиной перемещения воздушных масс в вертикальном направлении.

*Петроград, январь 1924 г.*

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ВЕТРА <sup>16</sup>

Определение вертикальной компоненты  $w$  скорости ветра является одной из важнейших задач метеорологии; к сожалению, не имеется почти никакого надежного экспериментального метода ее определения. Именно поэтому особенно необходимо рассмотреть методы вычисления  $w$ , осно-

ванные на теоретических соображениях гидромеханики. Настоящая заметка имеет целью дать такой новый метод определения  $w$ .

Границу инверсии можно рассматривать как поверхность разрывности метеорологических элементов; практически ее можно представлять как очень тонкий воздушный слой, в котором изменение метеорологических элементов чрезвычайно велико. Применение метода Адамара при исследовании движения поверхностей разрыва такого рода в невязкой жидкости приводит нас к выводу, что эти поверхности или распространяются со скоростью, близкой к скорости звука, или оказываются стационарными поверхностями, т. е. они всегда состоят из одних и тех же частиц жидкости. В этом последнем случае (единственном, который мог бы нас интересовать) скорость движения поверхности разрыва совпадает с проекцией скорости ветра на нормаль к этой поверхности.

Граница инверсии оказывается, вообще говоря, почти горизонтальной плоскостью, поэтому скорость движения границы инверсии совпадает с проекцией скорости ветра на вертикальную прямую, т. е. с вертикальной компонентой скорости ветра.

Отсюда следует, что, определяя скорость перемещения границ инверсии, мы определяем тем самым величину  $w$ . Таким образом, можно определить вертикальную компоненту скорости ветра. Мы выполнили соответствующую обработку наблюдений за бумажными змеями в Линденберге в 1911 и 1912 гг. Они сгруппированы по временам года и представлены в таблице (на стр. 177—178).

Из таблицы видно, что вертикальные скорости не превышают одной десятой метра в секунду и выражаются большей частью в сотых метра в секунду. Хотя число исследованных нами случаев слишком мало, чтобы извлечь из этого какие-либо выводы об изменении вертикальных скоростей, но уже поверхностный взгляд на таблицу дает возможность установить, что  $w$ , вообще говоря, больше летом, чем зимой, — обстоятельство, которое совпадает с известным общим усилением вихревой деятельности атмосферы летом (порывистый характер ветра, образование кучевых облаков и т. д.).

*Отделение теоретической метеорологии  
главной физической обсерватории  
Петроград, 1924 г.*

## Скорость движения инверсии по наблюдениям в Линденберге в 1911 и 1912 гг.

| Дата             | Величина инверсии, °C | Скорость движения, ед. MTS | Дата               | Величина инверсии, °C | Скорость движения, ед. MTS |
|------------------|-----------------------|----------------------------|--------------------|-----------------------|----------------------------|
| Зима             |                       |                            | Весна              |                       |                            |
| 1 января 1911 г. | 0,8                   | —0,18                      | 11 марта 1911 г.   | 2,2                   | +0,11                      |
| 16 »             | 9,1                   | —0,043                     | 19 »               | 3,0                   | —0,048                     |
| 21 »             | 8,6                   | —0,085                     | 20 »               | 3,9                   | —0,0083                    |
| 22 »             | 11,3                  | —0,025                     | 28 »               | 0,4                   | +0,11                      |
| 28 »             | 0,2                   | +0,063                     | 30 »               | 0,2                   | +0,11                      |
| 1 февраля        | 3,9                   | +0,0033                    | 1 апреля           | 2,9                   | —0,025                     |
| 4 »              | 6,5                   | —0,038                     | 1 »                | 2,0                   | +0,11                      |
| 8 »              | 1,7                   | —0,0016                    | 5 »                | 2,8                   | —0,088                     |
| 2 декабря        | 0,7                   | —0,096                     | 15 »               | 2,6                   | —0,037                     |
| 3 »              | 4,5                   | —0,018                     | 5 мая              | 4,3                   | +0,012                     |
| 7 »              | 3,4                   | —0,0083                    | 5 »                | 1,5                   | —0,022                     |
| 15 »             | 0,2                   | +0,013                     | 9 »                | 2,7                   | —0,018                     |
| 28 »             | 0,5                   | +0,072                     |                    |                       |                            |
| 2 января 1912 г. | 1,5                   | +0,017                     | 11 марта 1912 г.   | 1,3                   | +0,0067                    |
| 18 »             | 2,3                   | +0,056                     | 27 »               | 2,3                   | —0,018                     |
| 2 февраля        | 1,6                   | —0,022                     | 11 апреля          | 0,8                   | +0,0033                    |
| 18 »             | 0,6                   | —0,010                     | 16 »               | 0,5                   | —0,053                     |
| 2 декабря        | 0,2                   | —0,0033                    | 4 мая              | 1,5                   | —0,053                     |
| 24 »             | 0,3                   | +0,028                     | 16 »               | 2,1                   | +0,0067                    |
| Лето             |                       |                            | Осень              |                       |                            |
| 2 июня 1911 г.   | 0,5                   | —0,023                     | 4 сентября 1911 г. | 6,1                   | —0,055                     |
| 3 »              | 0,6                   | —0,0017                    | 5 »                | 2,3                   | +0,00                      |
| 7 »              | 1,1                   | —0,043                     | 6 »                | 1,7                   | —0,19                      |
| 8 »              | 0,8                   | —0,025                     | 7 »                | 0,5                   | +0,11                      |
| 15 »             | 0,2                   | —0,037                     | 7 »                | 4,4                   | +0,025                     |
| 16 »             | 2,5                   | —0,095                     | 11 »               | 1,8                   | +0,033                     |
| 24 »             | 1,5                   | +0,027                     | 11 »               | 3,1                   | —0,023                     |
| 26 »             | 1,0                   | —0,022                     | 30 »               | 0,5                   | +0,038                     |
| 10 июля          | 1,4                   | —0,18                      | 11 октября         | 0,4                   | —0,013                     |
| 11 »             | 0,8                   | +0,017                     | 15 »               | 1,0                   | +0,022                     |
| 15 »             | 3,1                   | +0,053                     | 16 »               | 0,9                   | +0,018                     |
| 19 »             | 2,2                   | —0,19                      | 24 »               | 1,6                   | +0,015                     |
| 23 »             | 0,9                   | —0,020                     | 31 »               | 2,1                   | +0,018                     |
| 29 »             | 1,4                   | —0,0033                    | 4 ноября           | 0,8                   | +0,020                     |
| 30 »             | 3,2                   | —0,0033                    | 10 »               | 0,5                   | —0,030                     |
| 30 »             | 0,4                   | —0,013                     | 15 »               | 0,3                   | —0,024                     |

Таблица (окончание)

| Дата               | Величина инверсии, °C | Скорость движения, ед. MTS | Дата               | Величина инверсии, °C | Скорость движения, ед. MTS |
|--------------------|-----------------------|----------------------------|--------------------|-----------------------|----------------------------|
| Лето               |                       |                            | Осень              |                       |                            |
| 30/31 июля 1911 г. | 1,2                   | —0,043                     | 24 ноября 1911 г.  | 1,3                   | —0,0017                    |
| 31 »               | 0,8                   | —0,00                      | 25 »               | 10,8                  | —0,027                     |
| 15 августа         | 3,5                   | +0,042                     |                    |                       |                            |
| 18 »               | 1,0                   | +0,043                     |                    |                       |                            |
| 20 »               | 1,8                   | —0,027                     |                    |                       |                            |
| 31 »               | 1,8                   | —0,020                     |                    |                       |                            |
| 10 июня 1912 г.    | 0,8                   | —0,0033                    | 4 сентября 1912 г. | 1,0                   | +0,010                     |
| 10 »               | 0,5                   | —0,088                     | 21 »               | 0,9                   | +0,010                     |
| 5 июля             | 2,6                   | —0,007                     | 7 октября          | 2,8                   | —0,030                     |
| 6 »                | 2,0                   | —0,015                     | 23 »               | 2,1                   | —0,022                     |
| 13 августа         | 0,5                   | —0,027                     | 1 ноября           | 1,1                   | —0,025                     |
| 28 »               | 0,5                   | —0,0067                    | 18 »               | 5,2                   | —0,063                     |

Примечание. Знак + означает, что скорость направлена вверх, знак —, что она направлена вниз.

## ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К АТМОСФЕРНЫМ ДВИЖЕНИЯМ <sup>17</sup>

### § 1

1. Классическая гидродинамика обычно изучает либо движения жидкостей, плотность которых постоянна (т. е. не зависит от времени и координат), либо движения, при которых давление есть заданная функция плотности и, следовательно, изобарические поверхности совпадают с изотермическими. При изучении движений атмосферы эти два предположения классической гидродинамики неприменимы. В самом деле, из общих предположений относительно свойств газа, составляющего атмосферу, следует, что плотность воздуха нельзя считать постоянной; аэрологические наблюдения, особенно их прекрасные приложения, проведенные в Лейпцигском геофизическом институте по инициативе и под руководством Бьеркнеса \*, также доказывают, что изобарические и изотермические поверхности никоим образом не совпадают, но пересекаются под некоторыми углами (правда, очень малыми).

\* См., например, B j e r k n e s V.— Meteor. Z. 1900, 17, S. 97, 145.



Таким образом, для изучения атмосферных движений недостаточно общих предположений классической гидродинамики. Бьеркнес первым стал систематически принимать во внимание это обстоятельство.

Он создал большую школу и оказал значительное влияние на развитие теоретической метеорологии в начале XX в. Своей известной изящной теоремой о соотношении между вариацией циркуляции скорости и числом единичных трубок, образуемых при пересечении изобарических и изотермических поверхностей, Бьеркнес доказал возможность возникновения вихрей в атмосфере. Направление теоретической метеорологии, созданное Бьеркнесом и его учениками, главным образом Хессельбергом и Сандстрёмом, позволило развить эффективные методы обработки многочисленных данных аэрологических наблюдений. Это в свою очередь позволило находить свойства и законы атмосферных движений из экспериментов и вычислений\*. В области теоретической гидромеханики работы Бьеркнеса и его школы позволили развить теорию тех движений сжимаемой жидкости, которые называются б а р о к л и н и ч е с к и м и, т. е. движений, в которых давление зависит не только от плотности, но также и от температуры. Эта теория изложена в новом издании классической *Mécanique Rationnelle* Аппеля (Appell)\*\*, в главе, написанной Бьеркнесом.

Настоящая работа имеет целью некоторое развитие теории движения сжимаемой жидкости и прежде всего нахождение уравнений для общего вида сжимаемых жидкостей, аналогичных классическим уравнениям Гельмгольца для несжимаемой жидкости. Эти уравнения представляют собой условия, которым должно удовлетворять поле скоростей сжимаемой жидкости, для того чтобы движение, определенное полем скоростей, было действительно возможным; другими словами, условие того, что для заданного поля скоростей можно найти такое распределение давления и плотности, для которого выполняются уравнения общей гидромеханики. Эти уравнения условий, которые мы будем называть условиями динамической возможности движения жидкости и которые представляют обобщение уравнений Гельмгольца, должны выполняться при любом способе притока тепла. Иначе говоря, полученные уравнения должны выполняться при заданном притоке тепла и во всех случаях представлять собой необходимые условия, которым должно удовлетворять поле скоростей. Мы увидим ниже, что эти условия позволяют с помощью уравнений гидромеханики определить плотность с точностью до постоянного множителя, а давление с точностью до аддитивной произвольной функции времени. Далее эти произвольные элементы должны быть определены с помощью уравнения притока тепла.

\* B j e r k n e s V. *Dynamische Meteorologie und Hydrographie*, Bd. I, II. Braunschweig, 1912.

\*\* A p p e l l P. *Traité de Mécanique Rationnelle*, t. III. Paris, 1921.

Второй вопрос касается методов определения различных типов атмосферных движений с помощью установленных условий динамической возможности движения жидкости. Сущность метода состоит в следующем. Пусть некоторое поле скоростей задано функцией, содержащей, вообще говоря, произвольные функции времени и координат; эти произвольные функции определяются в большинстве случаев упомянутыми выше условиями динамической возможности движения. С другой стороны, уравнения гидромеханики определяют давление и плотность с помощью полученного поля динамически возможных скоростей.

Таким образом, если задан некоторый тип атмосферного движения (например, «revolving fluid») \* и использованы условия динамической возможности движения, то можно легко построить определенную модель той или другой картины распределения давлений. В настоящей статье описаны две модели атмосферных движений — в одной изобары представляют семейство прямых, а во второй — окружностей.

В заключение мы детально исследуем приложения полученных моделей атмосферных движений к действительным условиям атмосферы.

К уравнениям гидродинамики необходимо добавить дополнительные условия, которые характеризуют действительную возможность того или иного атмосферного движения. Эти дополнительные ограничительные условия мы получим, заметив, что скорость ветра не может превосходить некоторой конечной величины. Принимая это условие, мы дадим в конце настоящей работы некоторые числовые примеры моделей атмосферных движений (некоторые стационарные циклоны и антициклоны).

2. Для того чтобы получить уравнения гидродинамики для сжимаемой жидкости, исследуем прежде всего величины, характеризующие ее движение. Выберем некоторую прямоугольную систему координат и обозначим координаты произвольной точки через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и время через  $t$ . Движение сжимаемой жидкости будет полностью определено, как только давление  $p$  в заданной частице жидкости, ее плотность  $\rho$  (или, что то же, ее удельный объем  $\omega$ ), ее абсолютная температура  $T$  и три проекции  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вектора скорости  $V$  частицы на оси координат будут выражены как функции координат этой частицы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$ .

Условием называть в дальнейшем величины  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ , так же как и все функции этих величин и их производные по времени и координатам, динамическими элементами движения, а величины  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , функции этих величин и их производные по времени и координатам — кинематическими элементами движения.

Из гидродинамики известны шесть уравнений для определения этих шести величин. Первые три из этих уравнений представляют собой обыч-

---

\* Rayleigh. On the Dynamics of Revolving Fluids. Proc. Roy. Soc., 1915, 93, N 648, p. 148.

ные уравнения движения частицы жидкости под действием заданных сил. Четвертое уравнение есть следствие закона сохранения материи и называется уравнением неразрывности. Пятое вытекает из закона сохранения энергии (первый принцип термодинамики) и называется уравнением притока тепла. Наконец, шестое уравнение, связывающее в виде конечного соотношения давление, плотность (или удельный объем) и температуру, называется уравнением состояния.

Силы, действующие на частицу жидкости, делятся на два класса. К первому относятся силы, которые (будучи отнесенными к единице массы жидкости) выражаются известным и конечным образом через составляющие скорости и их производные по координатам. Из сил, учитываемых при рассмотрении атмосферных движений, к этому классу относятся в первую очередь силы тяготения. Обозначим эту силу, отнесенную к единице массы, через  $K$ . В относительно ограниченных областях мы сможем рассматривать силу тяготения как постоянную по величине и направлению. Направив ось  $Oz$  из заданной точки поверхности Земли вертикально вверх, будем иметь следующие выражения для составляющих силы  $K$ :

$$K_x = 0, \quad K_y = 0, \quad K_z = -g, \quad (1)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

В атмосферных движениях имеет место также сила, обусловленная вращением Земли; мы будем называть ее девиацией и обозначать через  $U$ .

Обозначая через  $\tau$  вектор вращения Земли, будем иметь следующие формулы для  $U$ :

$$U = -2[\tau, V],$$

$$U_x = 2\tau_3 v - 2\tau_2 w, \quad U_y = 2\tau_1 w - 2\tau_3 u, \quad U_z = 2\tau_2 u - 2\tau_1 v. \quad (2)$$

Если принять за декартову прямоугольную систему координат левую систему (т. е. ось  $Ox$  совместится с осью  $Oy$  при повороте ее на прямой угол по часовой стрелке, если смотреть на плоскость  $xOy$  с конца оси  $Oz$ ), то вектор  $\tau$  будет направлен из центра Земли к южному полюсу и его длина равна угловой скорости вращения Земли.

В настоящей статье мы сосредоточим наше внимание главным образом на атмосферных движениях. Если, однако, применить указанные здесь методы к вопросам космогонии, то нужно добавить к перечисленным силам консервативную силу взаимного притяжения частиц жидкости, которая возникает между ними согласно закону Ньютона.

Условимся обозначать вектором  $F$  результирующую сил первого класса, отнесенную к единице массы и приложенную к данной частице.

Силы второго класса — это силы, отнесенные к единице объема и

выраженные с помощью заданных функций через кинематические и динамические элементы движения.

К этой категории сил относятся внутренние силы, которые действуют во всей сжимаемой жидкости и вызваны неравномерным распределением давления; назовем их градиентом давления. Обозначив эту силу, отнесенную к единице объема, через  $G$ , имеем

$$G = -\text{grad } p,$$

$$G_x = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad G_y = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad G_z = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3)$$

Во многих вопросах движения сжимаемой жидкости кроме этой силы вводят в рассмотрение еще силу вязкости. Выражение этой силы, отнесенной к единице объема, зависит, как известно, только от кинематических элементов\*. Будем обозначать через  $\Phi$  отнесенную к единице объема силу, выражение которой зависит только от скоростей и их производных по координатам.

Резюмируя все сказанное о силах, действующих на частицу жидкости, и принимая во внимание уравнение неразрывности, запишем первые четыре уравнения гидромеханики сжимаемой жидкости в виде

$$\frac{dV}{dt} = -\omega \text{grad } p + F + \omega\Phi,$$

$$\text{div } V = \frac{d \ln \omega}{dt}; \quad (A)$$

в этих уравнениях символ  $d/dt$  означает, как обычно,

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Назовем уравнения (A) динамической группой уравнений гидромеханики.

3. Все величины, которые в классической гидромеханике определяют движение жидкости, сводятся к четырем, а именно: к трем компонентам скорости  $V$  и к давлению, так как удельный объем (или плотность) — известная функция давления (или как частный случай постоянная), а температура благодаря уравнению состояния есть также известная функция плотности. Таким образом, в классической гидромеханике четырех уравнений динамической группы достаточно для решения задачи движения жидкости при начальных условиях и некоторых ограничениях, наложенных на составляющие скорости и давление.

В гидромеханике сжимаемой жидкости к четырем величинам, определяющим движение жидкости в классической гидромеханике, добавляется

\* L a m b H. Hydrodynamics, Cambridge, гл. XI.

пятая величина\*, а именно: удельный объем или плотность, и, таким образом, для определения движения жидкости по заданным начальным условиям и ограничениям четырех уравнений динамической группы становится недостаточно. Нужно прибегнуть к термодинамике — к уравнению притока тепла. И так как в этом уравнении фигурирует температура частицы жидкости, то необходимо добавить еще и уравнение состояния, которое связывает давление, удельный объем и температуру.

Обозначая через  $\varepsilon$  количество тепла, получаемое данной частицей в единицу времени, отнесенное к единице объема, вводя для удельной теплоты при постоянном объеме обычное обозначение  $c_v$ \*\* и обозначая через  $A$  термический эквивалент работы, будем иметь следующие равенства, называемые уравнением притока тепла и уравнением состояния

$$\omega \varepsilon = c_v \frac{dT}{dt} + A p \frac{d\omega}{dt},$$

$$f(p, \omega, T) = 0. \quad (B)$$

Назовем эти два уравнения термодинамической группой уравнений гидромеханики.

Величина  $\varepsilon$ , которая фигурирует в уравнениях (B), должна быть задана либо как известная функция времени и координат; либо в виде некоторого соотношения между  $\varepsilon$  и кинематическими и динамическими элементами. Легко видеть, что допущения классической гидромеханики сводятся в сущности к тому, что приток тепла задают в виде некоторой функции кинематических и динамических элементов при условии, что уравнения состояния заданы. В самом деле, предположим, что мы имеем дело с движением жидкости, для которого удельный объем задан как функция давления; такие движения называются баротропическими\*\*\*.

Очевидно, что в этом случае температура будет определяться с помощью уравнения состояния как некоторая функция давления и, следовательно,  $c_v$  будет также известной функцией давления. Запишем эти три функции следующим образом

$$\omega = \varphi_1(p), \quad T = \varphi_2(p), \quad c_v = \varphi_3(p).$$

\* Шестая величина — температура, вследствие уравнения состояния, выражается как функция давления и плотности.

\*\*  $c_v$  — известная функция давления, удельного объема и температуры.

\*\*\* Appell P. *Traité de Mécanique Rationnelle*, 1. Paris, 1879.

Bjerknes V. On the Dynamics of the circular vortex with applications to the atmosphere and atmospheric vortex and wave motions.— *Geophys. publ.*, 1921, v. II.

Используя эти обозначения, перепишем первое уравнение (В) в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{\varphi_3(p) \varphi_2'(p) + A p \varphi_1'(p)}{\varphi_1(p)} \frac{dp}{dt},$$

иначе говоря, мы получим  $\varepsilon$  в виде некоторой функции динамических и кинематических элементов, определенных уравнениями (А) динамической группы.

Часто вводится предположение об адиабатичности движения, заключающееся в том, что частицы жидкости не получают и не теряют тепла; это значит, что  $\varepsilon = 0$ . Итак, предположение об адиабатичности движения есть частный случай более общего предположения о притоке тепла как известной функции времени и координат\*.

Если рассматривать приток тепла как процесс, обусловленный теплопроводностью, то для  $\varepsilon$  получается следующее классическое выражение:

$$\varepsilon = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

где  $k$  — коэффициент внутренней теплопроводности\*\*.

В атмосферных движениях приток тепла обуславливается главным образом тепловым излучением Земли и Солнца, а также теплом, полученным или потерянным при переходе воды, содержащейся в атмосфере, из одного состояния в другое (из одной фазы в другую). Для случаев притока тепла, вызванного этими двумя причинами, достаточно хорошее выражение  $\varepsilon$  еще не найдено. Во всех случаях\*\*\*  $\varepsilon$  будет чрезвычайно сложным образом зависеть от кинематических и динамических элементов движения, и практическое его использование чрезвычайно затруднено.

В случае атмосферных движений термодинамическая группа уравнений гидромеханики значительно упрощается. Смесь газов, составляющих атмосферу, может с очень большим приближением рассматриваться как смесь идеальных газов; для идеальных газов\*\*\*\* удельная теплоемкость  $c_v$ , как известно, постоянна и уравнение состояния превращается в уравнение Клапейрона:

$$p\omega = RT, \quad (4)$$

\* Jeffreys G. B. On Periodic Atmospheric currents.— Philos. Mag., 1917.

\*\* Fourier. Sur le mouvement de la chaleur dans les fluides. Oeuvres, t. II. Paris, p. 595.

Neumann. Berichte über die Verhandlungen d. Kön. Sächsisch. Gesellschaft Wiss. Leipzig, 1894, p. 1.

\*\*\* Schwarzschild K. Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre.— Göttinger Nach., 1906.

Емден R. Gaskugeln, 1911, а также ряд работ Humphreys, Gold, Emden и автора настоящей статьи; см. также Humphreys W. J. Physics of the Air. Philadelphia, Franklin Inst., XI, 1920.

\*\*\*\* Присутствие паров воды в атмосфере обязывает внести некоторые поправки.

где  $R$  — газовая постоянная. В настоящей статье мы будем пользоваться только термодинамической группой уравнений гидромеханики, но там, где мы их используем, будем считать, что сжимаемая жидкость является идеальным газом и, следовательно, уравнением состояния является уравнение (4).

Легко видеть, что уравнения динамической и термодинамической групп позволяют определить движение сжимаемой жидкости по начальным краевым условиям, задав только некоторый приток тепла \*. В самом деле, уравнения (A) и (B) позволяют определить

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial t}$$

как функции величин  $u, v, w, \omega, T$  и их производных по координатам. Ясно, что, зная величины в начальный момент  $t = t_0$  как функции координат, мы найдем  $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$  и т. д. в тот же начальный момент. Таким же образом, дифференцируя последовательно по  $t$  выражения  $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$  и т. д., мы получим для начального момента все производные по времени величин  $u, v, w, p, \omega, T$ . Иначе говоря, мы сможем получить для каждого момента времени после  $t_0$  ряды Тэйлора для  $u, v, w, \omega$  и  $T$ , расположенные по степеням  $t - t_0$ .

В общей теории дифференциальных уравнений доказывается сходимость этих рядов при достаточно малых значениях абсолютных величин  $t - t_0$ . Таким образом, уравнения (A) и (B) позволяют, зная начальные условия, решить задачу определения величин, характеризующих движение сжимаемой жидкости. На языке динамической метеорологии это означает, что уравнения (A) и (B) позволяют предвидеть погоду \*\*.

4. Такое изучение атмосферных движений практически совершенно невозможно по многим причинам, например: 1) невозможность определить  $\epsilon$ ; 2) отсутствие надежных методов измерения вертикальной составляющей скорости ветра. С другой стороны, теоретическое изучение атмосферных движений (намеченное в общих чертах в п. 3 настоящего параграфа) также встречает огромные трудности, состоящие в том, что мы не знаем, как выражается  $\epsilon$  через кинематические и динамические элементы в случае, когда приток тепла обусловлен тепловым излучением Земли и Солнца. Следовательно, чрезвычайно желательно изучение законов, которым подчиняются движения сжимаемой жидкости и приложения их ко всем видам притока тепла в конкретных жидкостях. Иными словами, детальное изучение динамической группы уравнений гидромеханики пред-

\* См. замечательно ясное изложение задачи предсказания погоды в очерке Бьеркнеса: B j e r k n e s V. Die Meteorologie als Exakte Wissenschaft. Braunschweig, 1904.

\*\* R i c h a r d s o n L. Weather Prediction by numerical process. Cambridge, 1922.

ставляется очень полезным. Путь исследования в случае классической гидромеханики намечен Гельмгольцем, а в случае гидромеханики сжимаемой жидкости — Бьеркнесом.

Гельмгольц\* получил свои две фундаментальные теоремы о сохранении вихрей в идеальной несжимаемой (не вязкой) жидкости с помощью уравнений, найденных им же (уравнения Гельмгольца). Эти теоремы налагают некоторые ограничения на поле скоростей. Благодаря этим ограничениям движение с заданным полем скоростей становится возможным. Уравнение Гельмгольца для несжимаемой жидкости получается исключением давления  $p$  из уравнений динамической группы. Эти уравнения представляют собой условия, которым должно удовлетворять поле скоростей несжимаемой жидкости для того, чтобы можно было найти поле давления в движущейся несжимаемой жидкости, если задано поле скоростей.

В указанных выше работах Бьеркнес доказал, что в общем случае движения сжимаемой жидкости нужно изменить формулировку теории Гельмгольца о сохранении вихрей.

В своих исследованиях Бьеркнес использовал теорему Томсона и понятие циркуляции скорости. Весьма естественной кажется идея дать непосредственное обобщение теорем Гельмгольца для случая сжимаемой жидкости, возможно меньше отклоняясь при этом от метода Бьеркнеса.

Обобщая соответствующим образом идеи Гельмгольца, мы приходим к следующей задаче: найти условия, которым должно удовлетворять поле скоростей сжимаемой жидкости, для того чтобы можно было найти удельный объем и давление как функции времени и координат, удовлетворяющие динамической группе уравнений гидромеханики.

Эти условия будут необходимыми условиями, наложенными на поле скоростей при любом притоке тепла. Будем называть их условиями динамической возможности движения сжимаемой жидкости.

Если поле скоростей удовлетворяет приведенным ниже условиям динамической возможности движения сжимаемой жидкости, то всегда можно найти некоторое распределение давления, удельного объема, температуры и притока тепла, которое допускает движение сжимаемой жидкости с заданным полем скоростей. Если, однако, приток тепла задан заранее в виде известной функции кинематических и динамических элементов, то условий динамической возможности движения недостаточно для решения задачи (хотя они и остаются необходимыми условиями). Нужно будет добавить к ним дополнительные условия, которые можно назвать у с л о -

---

\* H e l m h o l t z H. Ueber Integrale der Hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle J., 1858, 55.



виями термодинамической возможности движения сжимаемой жидкости.

Если поле скоростей удовлетворяет условиям динамической возможности движения, то давление и удельный объем определяются либо квадратурами, либо интегрированием системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В следующем параграфе нашей работы будут установлены условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости. Мы ограничимся исследованием случая идеальной жидкости, иными словами, мы предположим, что в формуле (А) вектор  $\Phi$  равен нулю\*.

## § 2

1. Перед тем как перейти к выводу условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости, приведем некоторые краткие обозначения и некоторые правила векторного анализа и, кроме того, в общих чертах коснемся вопроса о роли фундаментальных теорем Гельмгольца в теории движения несжимаемой жидкости.

Известно, что вихревые линии в несжимаемой жидкости подчиняются двум теоремам Гельмгольца; первая из них утверждает, что частицы жидкости, которые в заданный момент находятся на вихревой линии, всегда останутся на вихревой линии, вторая, — что интенсивность вихревой трубки не изменяется со временем. Следовательно, кинематически эти два свойства независимы. Иначе говоря, кинематически можно представить движения, которые подчиняются первой теореме Гельмгольца и не подчиняются второй и наоборот.

Заметим, что в каждом поле векторов можно образовать векторные линии и векторные трубки. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы к вектору  $A$  можно было применить обе теоремы Гельмгольца, выражается равенством

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \text{rot} [A, V] + V \text{div} A = 0. \quad (5)$$

Не будем останавливаться на доказательстве этого предположения, так как в дальнейшем оно не будет иметь значения и упомянуто только с целью ввести новую краткую векторную символику\*\*.

\* Один из сотрудников Главной физической обсерватории в Петрограде Б. Извеков изучил и разрешил задачу нахождения условий динамической возможности движения вязкой сжимаемой жидкости, когда  $\Phi$  отлично от нуля.

Статья Извекова «Об условиях возможности движения вязкой и сжимаемой жидкости» опубликована в Математическом сборнике, т. 32, 1924.

\*\* Zogawski K. Ueber Erhaltung der Wirbelbewegung.— Bull. Acad. sci. Cracovie, 1900; Friedman A. Sur la cinématique de tourbillon.— Bull. Acad. sci. Cracovie, 1922.

Обозначим через  $\text{helm } A^*$  левую часть равенства (5). Этот символ обладает следующим свойством (которое легко проверяется):

$$\text{rot } \frac{\partial V}{\partial t} = \text{helm rot } V. \quad (6)$$

Изучение кинематики вихревых линий в случае, когда не приложима либо одна, либо обе теоремы Гельмгольца, обнаруживает фундаментальное значение символа  $\text{helm } A$  в проблеме изменения вихревых нитей и интенсивности вихревых трубок.

Равенство (6) позволяет при помощи условий динамической возможности движения несжимаемой жидкости под действием консервативных сил получить сразу обе фундаментальные теоремы Гельмгольца. В самом деле, для несжимаемой жидкости уравнения (A) принимают вид

$$\frac{dV}{dt} = -\omega_0 \text{grad } p + F, \quad \text{div } V = 0, \quad (7)$$

где  $\omega_0$  — некоторая постоянная, характеризующая рассматриваемую жидкость.

Для того чтобы получить условия динамической возможности движения несжимаемой жидкости, нужно выяснить смысл ограничений, налагаемых на скорости, тем, что давление  $p$  должно удовлетворять трем первым уравнениям (7). Разрешая эти уравнения относительно  $\text{grad } p$ , получим

$$\text{grad } p = \frac{1}{\omega_0} \left( F - \frac{dV}{dt} \right).$$

Для определения  $p$  необходимо, чтобы  $\text{rot}$  вектора, который фигурирует в правой части этого равенства, был равен нулю. Применяя к обеим частям равенства операцию  $\text{rot}$  и замечая, что  $\omega_0 = \text{const}$  и  $\text{rot } F = 0$  (так как  $F$  — консервативная сила), будем иметь

$$\text{rot } \frac{dV}{dt} = \text{helm rot } V = 0. \quad (8)$$

Полученные уравнения — это хорошо известные уравнения Гельмгольца. Добавляя к ним последнее уравнение (7), а именно условие несжимаемости, мы получим уравнения, которые и составляют условия динамической возможности движения несжимаемой жидкости.

---

\* Этот символ есть не что иное как производная  $\frac{\partial A}{\partial t}$ , введенная Лоренцем в его исследованиях по термодинамике движущихся сред. См. Abraham und Fö r p l. Theorie der Electricität, I, гл. 2, 1912.

Следовательно, уравнения (8) выражают обе теоремы Гельмгольца для несжимаемой жидкости.

2. Перейдем теперь к выводу условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости. Определим сначала те налагаемые на кинематические элементы и удельный объем условия, при которых возможно найти давление  $p$ , удовлетворяющее уравнениям (А). Очевидно, для того чтобы получить эти условия, необходимо с помощью подходящего дифференцирования исключить  $p$  из уравнений (А). Таким образом получим ряд уравнений, которые связывают удельный объем и кинематические элементы. Исключив затем удельный объем из полученных уравнений, установим условия, которым должны удовлетворять кинематические элементы, для того чтобы можно было определить удельный объем, а затем давление, удовлетворяющие уравнениям (А). Полученные таким образом равенства и будут, очевидно, условиями динамической возможности движения сжимаемой жидкости.

Введем два вспомогательных вектора:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \omega \operatorname{grad} p, \quad (9)$$

$$\mathbf{H} = -\operatorname{rot} \mathbf{G} = [\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} \omega]. \quad (10)$$

Назовем первый вектор по аналогии с метеорологией динамическим градиентом, а второй, принимая во внимание его роль в образовании вихрей, турбулизирующим вектором.

Простой подсчет дает

$$\mathbf{H} = [\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} \omega] = \operatorname{helm} \operatorname{rot} \mathbf{V} - \operatorname{rot} \mathbf{F}.$$

Необходимое и достаточное условие, для того чтобы для заданного движения выполнялись обе теоремы Гельмгольца, состоит в том, что турбулизирующий вектор должен равняться нулю, иначе говоря, в каждый момент изобарические и изотермические поверхности совпадают; аналитически это условие выражается равенством

$$p = f(\omega, t),$$

где предполагается, что силы  $\mathbf{F}$  — консервативные.

Полученное соотношение между давлением и удельным объемом характеризует, как мы только что это видели, баротропическое движение жидкости. При отсутствии этого соотношения, т. е. при турбулизирующем векторе, отличном от нуля, движение жидкости называется бароклиническим. Для того чтобы выполнялась вторая теорема Гельмгольца о сохранении интенсивности вихревой трубки, необходимо чтобы движение было баротропическим, как это доказано известной теоремой Бьеркнеса. Зильберштейн и Зоравский также обращали внимание на то, что и

для первой теоремы Гельмгольца турбулизирующий вектор имеет существенное значение.

Из уравнения (9) имеем

$$\text{grad } p = \frac{G}{\omega}. \quad (11)$$

Для того чтобы можно было найти давление  $p$ , удовлетворяющее этому соотношению, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rot } \frac{G}{\omega} = 0,$$

это уравнение можно переписать в виде

$$[G, \text{grad } \varphi] = H,$$

где

$$\varphi = \ln \omega.$$

Таким образом, для того чтобы с помощью уравнения (A) определить давление  $p$  и удельный объем  $\omega$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\omega$  и  $\varphi$  удовлетворяли следующим условиям:

$$[G, \text{grad } \varphi] = H \quad (C)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{div } V.$$

Если уравнения (C) выполняются, то  $p$  определяется соотношением (11) с точностью до произвольной аддитивной функции времени.

Мы получаем первое необходимое условие динамической возможности движения сжимаемой жидкости непосредственно из уравнений (C) на основании хорошо известного свойства сколярного произведения; это условие может быть записано следующим образом:

$$(G, H) = 0. \quad (a)$$

Условие (a) показывает, что градиент должен быть ортогонален турбулизирующему вектору; иными словами, градиент должен быть вектором, ортогональным своему вихрю. Жуковский назвал такие векторы *незакручивающимися*. В дальнейшем мы будем кратко называть условие (a) условием *незакручиваемости*.

3. Дальнейшее исследование условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости приводит к разделению этих условий на две группы. К первой относятся движения, при которых динамический градиент не ортогонален вектору скорости, ко второй — все остальные движения. Назовем движения первой группы *нормальными*. Очевид-

но, что для них величина

$$\mu = (G, H) = \omega \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (12)$$

отлична от нуля.

Движения второй группы обладают тем свойством, что для них  $(V, G)$  равно нулю. Следовательно, работа сил давления при таком действительном перемещении равна нулю. Назовем эти движения *полуконсервативными*.

Легко видеть, что уравнения (С) можно переписать следующим образом:

$$[G, \text{grad } \varphi] = H \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + (V, \text{grad } \varphi) = 0,$$

где  $\theta = \text{div } V$ .

Рассмотрим сначала нормальные движения.

Покажем, что если задано условие *незакручиваемости*, то система (13) для нормального движения эквивалентна системе

$$\vec{a} + \vec{b} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{grad } \varphi, \quad (14)$$

где

$$\vec{a} = \frac{[H, V] + \theta G}{\mu}, \quad (15)$$

$$\vec{b} = -\frac{G}{\mu}. \quad (16)$$

Удобно дать специальные названия векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ; назовем вектор  $\vec{a}$  *турбомоментом*, а вектор  $\vec{b}$  — *приведенным градиентом*.

Покажем сначала, что уравнения (13) следуют из уравнений (14). Уравнение (14) можно переписать следующим образом:

$$[H, V] + \theta G = \mu \text{grad } \varphi + G \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (17)$$

Умножая векторно это равенство на  $G$ , получим

$$[G, [H, V]] = \mu [G, \text{grad } \varphi], \quad (18)$$

но в силу известной формулы векторной алгебры будем иметь

$$[G, [H, V]] = (H(G, V) - V(G, H)).$$

Так как  $(G, V) = \mu$  и  $(G, H) = 0$  (в силу условия *незакручиваемости*), то уравнение (14) превращается в первое уравнение (13) ( $\mu \neq 0$ ).

Для того чтобы получить второе уравнение (13), достаточно умножить скалярно (17) на  $G$ .

Покажем теперь, что уравнение (14) получается из уравнений (13). Для этого умножим векторно первое уравнение (13) на  $V$ , получаем

$$[V, [G, \text{grad } \varphi]] = (V, \text{grad } \varphi) G - (V, G) \text{grad } \varphi = [V, H],$$

откуда с помощью второго уравнения (13) получаем уравнение (14).

Применяя к обеим частям уравнения (14) операцию  $\text{rot}$ , легко находим равенство

$$\vec{c} + \vec{b} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (19)$$

где  $\vec{c}$  и  $\vec{b}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \text{rot } \vec{b} + \left[ \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \vec{b} \right], \\ \vec{b} &= \text{rot } \vec{c} + \left[ \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}, \vec{c} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражая векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{b}$  через давление и удельный объем, будем иметь

$$\begin{aligned} \mu^2 \vec{c} &= -\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} \left[ \text{grad } \frac{dp}{dt}, \text{grad } p \right], \\ \mu^2 \vec{b} &= \omega^2 \left[ \text{grad } \frac{dp}{dt}, \text{grad } p \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Из этих формул видно, что векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{b}$  выражаются через вектор  $[\text{grad } dp/dt, \text{grad } p] = A$ , который связан с  $\varepsilon$  и  $\theta$  таким образом:

$$A = \frac{R}{c_v} [\text{grad } \varepsilon, \text{grad } p] - \kappa p [\text{grad } \theta, \text{grad } p],$$

где  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ ;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Принимая во внимание тесную связь между векторами  $\vec{c}$  и  $\vec{b}$ , с одной стороны, и величиной  $\varepsilon$ , с другой, назовем их первым и вторым тепловыми векторами.

Уравнение (19) дает непосредственно уравнение динамической возможности движения

$$[\vec{c}, \vec{b}] = 0. \quad (b)$$

Итак, для того чтобы движение было динамически возможным, необходимо, чтобы тепловые векторы были параллельны.

Назовем условие (b) тепловыми условиями динамической возможности движения сжимаемой жидкости. С первого взгляда кажется,

что условие (b) содержит два скалярных равенства; однако на самом деле в силу условия незакручиваемости одно из этих равенств будет следствием другого. Таким образом, термические условия сводятся к равенству

$$(V, [H_1, H]) + \mu(H, \text{grad } \theta) - (H_1 + [\text{grad } \theta, G], \frac{\partial G}{\partial t} + \text{grad } \mu) = 0,$$

где

$$H_1 = \text{helm } H.$$

Для того чтобы получить это равенство, нужно провести достаточно длинные вычисления и доказать ряд векторных тождеств. За недостатком места мы опускаем эти вычисления. Заметим, однако, что в дальнейшем мы будем использовать тепловые условия в форме (b).

4. В дальнейшем изучении условий динамической возможности нормального движения сжимаемой жидкости нужно различать два случая в зависимости от того, равен нулю или нет второй вектор. Назовем движения первого рода ( $\vec{b} \neq 0$ ) общими нормальными движениями, а движения второго рода ( $\vec{b} = 0$ ) специальными нормальными движениями.

Рассмотрим случай общего нормального движения. Из теплового условия (b) видно, что если  $\vec{b}$  отличен от нуля, то существует некоторая скалярная величина  $\lambda$ , определяемая равенством

$$c + \lambda \vec{b} = 0. \quad (22)$$

Принимая во внимание роль, которую будет играть эта величина в определении удельного объема, целесообразно назвать ее *стереоскаляром*.

С помощью стереоскаляра  $\lambda$  и векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуем вектор  $\vec{s}$

$$\vec{s} = \vec{a} + \lambda \vec{b}, \quad (23)$$

который мы назовем *стереовектором*. Равенства (19), (22) и уравнение (14) можно преобразовать в следующие уравнения, эквивалентные системе (14):

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \vec{s}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \lambda. \end{aligned} \quad (24)$$

Совершенно очевидно, что как только мы определим  $\varphi$ , удовлетворяющее равенствам (24), уравнения (14) будут выполняться в силу определения стереовектора и стереоскаляра.

Для того чтобы определить  $\varphi$ , удовлетворяющее равенством (24),

нужно чтобы выполнялись следующие условия

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{s} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} &= \operatorname{grad} \lambda, \end{aligned} \quad (c)$$

которые мы назовем **объемными условиями**.

Непосредственно видно, что условия объема сводятся к шести скалярным. Тем не менее легко заметить, что первое из условий (c) есть следствие второго, благодаря чему число независимых скалярных уравнений, которые получаются из условий (c), сводится к трем. Покажем, что первое из равенств (c) следует из второго.

Используя равенство (23), найдем следующее выражение для  $\operatorname{rot} \vec{s}$ :

$$\operatorname{rot} \vec{s} = \operatorname{rot} \vec{a} + \lambda \operatorname{rot} \vec{b} + [\operatorname{grad} \lambda, \vec{b}];$$

подставляя вместо  $\operatorname{grad} \lambda$  его значение  $\partial \vec{s} / \partial t$  из (c) и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \vec{b} \frac{\partial \lambda}{\partial t},$$

получим с помощью (20) выражение

$$\operatorname{rot} \vec{s} = \vec{c} + \lambda \vec{d};$$

из него следует, что в силу (23)  $\operatorname{rot} \vec{s} = 0$ .

Анализируя условия динамической возможности общего нормального движения сжимаемой жидкости, мы пришли к равенствам (a), (b), (c), которые мы назвали тепловыми условиями, условиями незакручиваемости и объемными.

Если только эти условия выполняются, то можно определить с помощью уравнений (24)  $\varphi$  с точностью до аддитивной произвольной постоянной и с помощью уравнений (11) — давление  $p$  с точностью до аддитивной произвольной функции времени. Само собой разумеется, что  $\omega = e^\varphi$  будет сдерживать произвольный постоянный множитель.

Таким образом, удельный объем  $\omega$  и давление  $p$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 e^{\int \vec{s}_x dx + \vec{s}_y dy + \vec{s}_z dz + \lambda dt} \\ p &= \int \frac{G_x dx + G_y dy + G_z dz}{\omega} + p_0(t), \end{aligned} \quad (d)$$

где  $\omega_0$  и  $p_0(t)$  — произвольная постоянная и произвольная функция времени.

Исследуем кратко метод установления условий динамической возможности частных нормальных движений сжимаемой жидкости. Уравнение



(19) показывает, что как только  $\vec{b}$  обращается в нуль, то обращается в нуль и вектор  $\vec{c}$ , и уравнения (14) превращаются в нормальную систему линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка. Таким образом, в случае частного нормального движения условия динамической возможности состоят из условия незакручиваемости и равенства нулю двух тепловых векторов; иными словами, эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} (G, H) &= 0, \\ \vec{c} &= 0, \quad \vec{b} = 0. \end{aligned} \quad (e)$$

Если выполняются эти условия,  $\Phi$  будет определено из уравнения

$$\Phi(\varphi, t, x, y, z) = 0, \quad (25)$$

где  $\Phi$  представляет собой решение системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - b_x \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - b_y \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_y \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} - b_z \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_z \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Система (26) получается с помощью уравнений (14) обычным способом. Простыми вычислениями, образуя скобки Пуассона и используя равенства (e), легко показать, что эта система нормальная.

Как известно, общее решение системы (26) содержит две произвольные функции. Легко видеть, что можно написать два независимых решения системы (26):

$$\Phi_1 = \varphi - f_1(t, x, y, z), \quad \Phi_2 = f_2(t, x, y, z),$$

и, следовательно, уравнение (25) позволяет определить  $\varphi$  выражением

$$\varphi = f_1(t, x, y, z) + \Psi[f_2(t, x, y, z)],$$

где  $\Psi$  — произвольная функция своего аргумента. Таким образом  $\varphi$ , а следовательно, и  $\omega$  будут содержать произвольную функцию. В случае частного нормального движения, которое мы исследуем, давление  $p$ , как и в общем случае, будет определяться с помощью второго уравнения (d).

5. Остается еще исследовать условия динамической возможности полуконсервативного движения сжимаемой жидкости. Так как метод не отличается существенно от метода исследования нормального движения сжимаемой жидкости, то из-за недостатка места мы ограничимся рассмотрением только самых важных моментов и приведем без доказательства условия динамической возможности полуконсервативного движения сжимаемой жидкости.

Вектор  $\Gamma = [G, \frac{\partial G}{\partial t}]$  играет важную роль в классификации полуконсервативных движений. Будем называть общими полуконсервативными движениями движения, при которых  $\Gamma$  отличен от нуля; специальными полуконсервативными движениями — движения, при которых  $\Gamma = 0$ , а  $G \neq 0$ , и, наконец, движениями без градиента — движения, при которых динамический градиент  $G$ , а следовательно, и  $\Gamma$  равны нулю. Условия динамической возможности общего полуконсервативного движения принимают более сложную форму; их можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu(V, G) &= 0, & (G, H) &= 0, \\ \text{grad}(v + \theta) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{[H, G]}{(G, G)} + n \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t} G, \\ \text{rot} \frac{[H, G]}{(G, G)} - nH + [\text{grad } n, G] &= 0, \end{aligned} \quad (f)$$

где скаляры  $v$  и  $n$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} [H, V] &= vG, \\ n &= \frac{\left( \Gamma, \left[ G, \text{grad}(v + \theta) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{[H, G]}{(G, G)} \right] \right)}{(\Gamma, \Gamma)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Если поле скоростей удовлетворяет условиям (f), то величина  $\varphi = \ln \omega$  определяется с помощью равенств

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \frac{[H, G]}{(G, G)} + nG, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= v + \theta. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом,  $\omega$  определяется квадратурами и содержит произвольный постоянный множитель; что же касается давления  $p$ , то его можно получить с помощью второго уравнения (d).

Условия динамической возможности специального полуконсервативного движения выражаются более простыми равенствами

$$\begin{aligned} \mu(V, G) &= 0, & \Gamma &= \left[ G, \frac{\partial G}{\partial t} \right], & (G, H) &= 0, \\ sH - \frac{\partial H}{\partial t} + [G, \text{grad}(v + \theta)] &= 0, \end{aligned} \quad (g)$$

где скаляры  $v$  и  $s$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} [H, V] &= vG, \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= sG. \end{aligned} \quad (29)$$

Если поле скоростей удовлетворяет условиям (g), удельный объем определяется интегрированием нормальной системы трех линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка. Так как  $G$  отлично от нуля, то по крайней мере одна составляющая вектора  $G$  отлична от нуля; предположим  $G_z \neq 0$  (это, конечно, не ограничивает общности рассуждений), тогда систему уравнений в частных производных можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{G_x}{G_z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{H_y}{G_z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{G_y}{G_z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{H_x}{G_z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (v + \theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\varphi$  определяется из уравнения

$$\Phi(\varphi, t, x, y, z) = 0.$$

а  $\Phi$  — решение системы (30). Легко видеть, что можно найти два линейно независимых решения этой системы в виде

$$\Phi_1 = \varphi - f_1(t, x, y, z),$$

$$\Phi_2 = f_2(t, x, y, z).$$

Таким образом,  $\varphi$  будет определяться равенством

$$\varphi = f_1(t, x, y, z) + \Psi[f_2(t, x, y, z)], \quad (31)$$

где  $\Psi$  — произвольная функция своего аргумента. Отсюда следует, что в выражение удельного объема будет входить произвольная функция; очевидно, что давление будет определяться по второй формуле (d).

Единственное условие динамической возможности движения без градиента представляет собой равенство

$$G = 0. \quad (h)$$

Если имеет место это равенство, то  $\varphi = \ln \omega$  определяется условием непрерывности, а именно:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (32)$$

что касается давления  $p$ , то оно не будет зависеть от  $x, y, z$  и представляет собой произвольную функцию времени.

6. В заключение этого параграфа сделаем два замечания. Определяя давление и удельный объем по заданному полю скоростей динамически возможного движения сжимаемой жидкости, мы видели, что выражения этих величин содержат произвольные постоянные и произвольные функции различных аргументов. Эти постоянные и функции не могут быть определены через кинематические элементы, для их определения нужно обратиться к экспериментальным данным. В модели циклона или антициклона, исследуемой ниже, мы определяем эти неизвестные элементы задачи с помощью аэрологических наблюдений, произведенных в некотором месте района, охваченного циклоном или антициклоном.

Второе замечание относится к термодинамическим условиям возможности движения сжимаемой жидкости, в частности, когда нет никакого притока тепла (адиабатическое движение). К условиям, исследуемым выше, добавляется в этом случае еще ряд равенств. Совершенно естественно, что нужно задать вопрос, возможно ли адиабатическое набаротропическое движение; иными словами, могут ли возникать вихри при отсутствии притока тепла извне?

Вопрос будет решен, если найдется динамически и термодинамически возможное движение, при котором турбулизирующий вектор  $\mathbf{H}$  не равен нулю. Решить этот вопрос методами, рассмотренными в настоящей работе, очень трудно.

Однако если использовать уравнения гидромеханики не в форме Эйлера, а в форме Лагранжа, то можно ответить утвердительно на этот вопрос и доказать возможность возникновения вихрей и без притока тепла извне. За недостатком места мы не останавливаемся больше на этих соображениях \*.

### § 3

В настоящем параграфе мы рассмотрим два примера применения условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости, установленных в предыдущем параграфе, к исследованию частных возможных случаев движения сжимаемой жидкости, которые могут служить в динамической метеорологии моделями той или иной картины распределения давлений.

В первом из этих примеров изобары представляют собой параллельные прямые, во втором исследована модель стационарного циклона или антициклона. Мы вернемся к детальному изучению этого стационарного циклона или антициклона в следующем параграфе. Первый пример мы разберем достаточно подробно, чтобы показать применение условий динамиче-

\* *Прим. ред. геофизич. сборника* Этот вопрос решен положительно Н. Кочиным в его статье «Über einen Fall der adiabatsichen Bewegung». — Z. Phys., 1923, Bd. 17.

ской возможности движения сжимаемой жидкости к этому частному случаю.

Условимся, что в дальнейшем ось  $Oz$  будет направлена из заданной точки на поверхности Земли вертикально вверх. Будем считать также земную поверхность плоской, т. е. рассматривать движения только малой протяженности.

При сделанных предположениях проекции силы, составленной из силы тяжести и силы отклонения, вызываемой вращением земного шара (силы Кориолиса), на оси координат будут выражаться равенствами

$$F_x = 2\tau_3 v - 2\tau_2 w, \quad F_y = 2\tau_1 w - 2\tau_3 u, \quad F_z = 2\tau_2 u - 2\tau_1 v - g.$$

Эти выражения компонент  $F$  мы и будем рассматривать в дальнейшем, изучая движение сжимаемой жидкости. При изучении движений сжимаемой жидкости необходимо задать сначала некоторый кинематический вид этого движения; иначе говоря, задать на основании тех или иных допущений более или менее общее соотношение между компонентами скорости жидкости  $V$ , временем и координатами. Это соотношение должно содержать произвольные функции одного или нескольких аргументов, а эти произвольные функции должны быть точно определены при помощи условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости. Произвол в выборе функций значительно ограничивается этим определением, а оставшаяся неопределенность почти всегда может быть устранена при помощи данных наблюдений.

В первом примере мы установим кинематический вид скорости  $V$ , исходя из предположения существования горизонтального ветра, совершенно не зависящего от горизонтальных осей, направление которого не зависит от высоты, т. е. от координаты  $z$  и скорость которого может изменяться с высотой и временем. Будем называть такое движение **орт о г о н а л ь н ы м**.

Выбирая для оси  $Oy$  направление указанного ортогонального движения (направление которого по предположению не зависит ни от времени, ни от координат частицы), будем иметь следующие равенства, характеризующие ортогональное движение:

$$u = 0, \quad v = v(t, z), \quad w = 0, \quad (33)$$

где  $v$  — произвольная функция своих аргументов, которую нужно определить из условий динамической возможности движения.

Рассмотрим подробно кинематику ортогонального движения.

**Л и н и и т о к а** этого движения, определяемые интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \quad (34)$$

будут прямыми линиями:

$$x = c_1, \quad z = c_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные, взятые для определенного значения времени. Эти прямые, очевидно, будут составлять семейство прямых, параллельных оси  $Oy$ , т. е. параллельных направлению изучаемого движения.

Траектории частиц в ортогональном движении определяются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w \quad (35)$$

и совпадут с линиями тока.

Обозначая через  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega_z$  — три проекции вихря скорости  $\Omega = \text{rot } V$  на оси координат, будем иметь для ортогонального движения

$$\Omega_x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = 0.$$

Итак, вихрь будет горизонтальным и перпендикулярным ортогональному движению. Вихревые линии, т. е. линии, определяемые интегралами уравнений

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}, \quad (36)$$

представляют собой горизонтальные прямые, перпендикулярные скорости ортогонального движения.

Второй пример движения сжимаемой жидкости — случай жидкости, находящейся во вращении («вращающаяся жидкость»). Этот случай представляет собой обобщение идеи вращающейся жидкости, развитой несколькими английскими метеорологами и гидромеханиками, главным образом Рэлеем (Rayleigh) и Шоу (Shaw) \*.

Выберем систему координат следующим образом: ось  $Oz$  направим вертикально вверх, ось  $Ox$  — на север (вдоль меридиана), ось  $Oy$  — на восток (вдоль параллели), а начало координат поместим в точку, где изучается движение. Предположим, что в каждой горизонтальной плоскости движение жидкости представляет собой вращение с постоянной угловой скоростью  $\zeta$  вокруг подвижного центра с координатами  $x = a$ ,  $y = b$ . Кроме того, подвижные центры этого вращения будут различными для различных горизонтальных плоскостей, а угловая скорость будет одной и той же

\* Rayleigh J. W. The Traveling Cyclone.— Philos. Mag. 1919, p. 420.

Shaw N. Proc. Roy. Soc. 1904, 94, p. 34.

Green. Some problems relating to rotation Fluid in the Atmosphere.— Philos. Mag., 1921, 665.

Shaw N. Manual of Meteorology, Cambridge, 1919, part IV.

на всех уровнях; это означает, что  $a$  и  $b$  будут функциями  $z$  и времени  $t$ , а  $\zeta$  — некоторая константа. Отметим также, что благодаря такому выбору системы координат движение будет циклоническим при отрицательных значениях  $\zeta$  и антициклоническим при положительных  $\zeta$ . Движение сведется к перемещению столба вращающейся жидкости; при этом ось вращения, вообще говоря, не вертикальна. Заметим, что Шоу и большинство английских метеорологов предполагают, что столб вращающейся жидкости вертикален, т. е.  $a$  и  $b$  не зависят от  $z$ , а являются функциями только времени  $t$ .

Принимая во внимание этот характер движений атмосферы, легко получим равенства

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial a}{\partial t} - \zeta (y - b), \\ v &= \frac{\partial b}{\partial t} + \zeta (x - a), \\ w &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Займемся прежде всего кинематическим изучением этого движения, а именно установим мгновенный центр вращения частиц жидкости, линии тока, траектории этих частиц и вихревые линии.

Обозначим координаты центра вращения через  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ; они определяются равенствами

$$x_1 = a(t, z), \quad y_1 = b(t, z), \quad z_1 = z. \quad (38)$$

Геометрическое место центров вращения (для всех высот) определяет понятие о с и в р а щ е н и я. Вообще говоря, это кривая — двоякой кривизны, со временем она меняет свое положение и форму. Для движений, изучаемых Рэлеем и Шоу, ось вращения — вертикальная прямая, которая перемещается со временем. Для некоторых движений, изучаемых Грином, ось вращения — фиксированная наклонная прямая.

В каждый данный момент во всех горизонтальных плоскостях можно представить изучаемое движение как вращение частиц жидкости вокруг мгновенного центра, который мы будем называть вместе с Шоу к и н е м а т и ч е с к и м ц е н т р о м.

Координаты кинематического центра определяются равенствами

$$x_c = a - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial b}{\partial t}, \quad y_c = b + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial a}{\partial t}, \quad z_c = z. \quad (39)$$

Разумеется, мы исключаем малоинтересный случай  $\zeta = 0$ , когда нет никакого вращения жидкости.

Кинематический центр перемещается вслед за центром вращения; но, вообще говоря, он отклоняется от центра вращения, и это отклонение зависит от скорости перемещения центра вращения и различно для раз-

личных горизонтальных плоскостей и для различных моментов времени. Отметим некоторые особенности этого движения, которые следуют непосредственно из формул (39). Если центр вращения движется на север, то кинематический центр отклоняется к востоку при антициклоническом вращении и к западу — при циклоническом. Если центр вращения движется на восток, то кинематический центр отклоняется к югу при антициклоническом вращении, и к северу — при циклоническом. Вообще отклонение кинематического центра вращения перпендикулярно направлению скорости перемещения центра вращения; кинематический центр отклоняется направо от этой скорости, если вращение антициклоническое, и налево, если оно циклоническое. Если в заданный момент скорость центра вращения резко меняет направление, то кинематический центр в этот момент совпадает с центром вращения.

Назовем кинематической осью движения геометрическое место кинематических центров для всех высот. Относительно кинематической оси можно повторить все, сказанное об оси вращения.

Достаточно ясное понятие о центре вращения и кинематическом центре можно получить, изучая линии тока и траектории частиц воздуха.

Из уравнений линий тока (34) после подстановки выражений (37) и интегрирования получаем равенства

$$\begin{aligned} z &= c_1 \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= c_2, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные для определенного значения  $t$ . Линии тока в каждой горизонтальной плоскости будут концентрическими окружностями, и их центр будет точно совпадать с кинематическим центром, лежащим в рассматриваемой плоскости. Итак, кинематический центр будет критической точкой линий тока изучаемого движения. Отсюда следует, что если атмосферное движение в некоторой области приближается к изучаемому движению, то линии тока в этой области подобны окружностям и их критическая точка будет близка к кинематическому центру. Располагая хорошими наблюдениями ветра, можно без больших трудностей провести линии тока и установить их критические точки\*.

Траектории каждой частицы определяются интегрированием уравнений (35) и исключением времени  $t$  из полученных интегралов. Выполнив вычисления (элементарного характера), найдем равенства

$$\begin{aligned} x &= a + A \cos(\xi t + \alpha), \\ y &= b + A \sin(\xi t + \alpha), \\ z &= B. \end{aligned} \quad (41)$$

\* См. Bjerknes V. Dynamische Meteorol. und Hydrographie, Bd. 2. Braunschweig, 1912.



где  $A$ ,  $B$  и  $\alpha$  — постоянные, не зависящие от  $t$  и определяемые начальным положением частицы. Кинематически легко представить себе траекторию частицы. Это траектория точки, находящейся на окружности, которая вращается вокруг своего центра с угловой скоростью  $\zeta$ , в то время как этот центр (совпадающий с центром вращения) перемещается вдоль траектории центра вращения. Построив параллельную траекторию, мы получим характерные петли и точки возврата, отмеченные Шоу и Лемпфертом при их экспериментальном изучении траекторий частиц воздуха\*. Это обстоятельство дает нам первое указание относительно того факта, что кинематическая форма изучаемого нами движения приближается к реальным атмосферным явлениям.

Осталось еще исследовать вид вихревых линий в изучаемом движении. Для составляющих вихря  $\Omega$  легко найти выражения

$$\Omega_x = \zeta \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial^2 b}{\partial t \partial z}, \quad \Omega_y = \zeta \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial^2 a}{\partial t \partial z}, \quad \Omega_z = 2\zeta. \quad (42)$$

Из этих формул следует, что горизонтальные составляющие вихрей зависят только от времени и высоты. Их величина определяется двумя факторами: перемещением центра вращения с высотой, изменением скорости перемещения центра вращения с высотой. В случае движений, изучаемых Шоу, горизонтальных вихрей совсем не будет, а поскольку величина этих вихрей (согласно наблюдениям, сделанным с помощью шаров-зондов)\*\* значительно превосходит величину вертикальных вихрей, то это обстоятельство вызывает сомнения в справедливости предположения о неизменности ветра с высотой в случае вращающейся жидкости.

Вертикальная составляющая будет в нашем движении постоянной и равна удвоенной угловой скорости вращения. Само собой разумеется, что в реальных атмосферных условиях редко встречается движение, аналогичное изучаемому движению вращающейся жидкости; понятно, что вертикальная составляющая вихря не будет постоянной, она изменится с координатами так же, как меняется в урагане.

Как мы увидим ниже, при изучении динамики рассматриваемого движения величина горизонтальных вихрей совершает два гармонических колебания с различными периодами около некоторого среднего значения. Это среднее значение зависит от угловой скорости вращающейся жидкости и

\* Shaw N. and Lempfert R. The Life History of Surface Air Currents. Cambridge, 1906.

\*\* Hesselberg Th. und Friedmann A. Die Größenordnung der Meteorologische Elemente. Veröff. Geophys. Inst. Univ. Leipzig, Ser. 2, H. 6, 1914. А. Фридман. Об атмосферных вихрях. Геофизический сборник, 3, 1916; О вертикальных и горизонтальных атмосферных вихрях, Журнал геофизики и метеорологии, 1929, № 3.

от высоты места, в котором изучается движение. От этих же параметров зависят и оба периода колебания величины горизонтальных вихрей. Отмечено, что такие «пульсирующие» вихри, по-видимому, частое явление в атмосфере.

Перейдем к изучению вихревых линий. Интегрирование уравнений (36) позволяет получить следующие уравнения для вихревых линий:

$$2\zeta x + \frac{\partial b}{\partial t} - \zeta a = c_1, \quad (43)$$

$$2\zeta y - \frac{\partial a}{\partial t} - \zeta b = c_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные для определенного значения времени  $t$ . Рассматривая горизонтальные вихревые линии на заданной высоте, мы получим семейство прямых, определяемых уравнениями

$$\Omega_y x - \Omega_x y = \text{const.}$$

Это означает, что в заданный момент и на заданной высоте вихревые линии будут параллельными прямыми, наклоненными к меридиану под углом, тангенс которого равен отношению

$$\frac{\Omega_y}{\Omega_x}.$$

Очевидно, что при изучении движения вращающейся жидкости можно значительно упростить формулы (37), выразив функции  $a'$  и  $b'$  через две другие функции высоты и времени —  $a$  и  $b$ , которые связаны с координатами центра вращения соотношениями

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\partial a}{\partial t} + \zeta b = \zeta y_c, \\ b' &= \frac{\partial b}{\partial t} - \zeta a = -\zeta x_c. \end{aligned} \quad (44)$$

Тогда уравнения (37) примут вид

$$\begin{aligned} u &= a' - \zeta y, \\ v &= b' + \zeta x, \\ w &= 0, \end{aligned} \quad (45)$$

где  $a'$  и  $b'$  — искомые функции  $z$  и  $t$ . Легко видеть, что, зная  $a'$  и  $b'$  как функции  $z$  и  $t$ , можно определить координаты центра вращения, т. е. найти функции  $a$  и  $b$ .

В самом деле, для этого достаточно проинтегрировать систему уравнений (41), разрешив ее относительно  $a$  и  $b$  и считая  $a$  и  $b$  заданными функциями.

Пусть  $a = a_0$ ,  $b = b_0$  — два частных решения системы (44), тогда общее решение этой системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} a &= a_0 + C_1(z) \sin \zeta t - C_2(z) \cos \zeta t, \\ b &= b_0 + C_1(z) \cos \zeta t + C_2(z) \sin \zeta t, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные функции своих аргументов. Формулы (46) показывают, что во всех горизонтальных плоскостях  $z = c$  центр вращения описывает с угловой скоростью  $\zeta$  окружности вокруг центров с координатами  $x = a_0$ ,  $y = b_0$ ,  $z = c$  и радиусом, равным  $C(c) = \sqrt{C_1(c)^2 + C_2(c)^2}$ . Назовем точку  $(a_0, b_0, c)$  характеристической. Определение характеристической точки и ее перемещений зависит только от вида функций  $a'$  и  $b'$  и может быть проведено при помощи динамического изучения движения вращающейся жидкости.

2. Переходя к условиям динамической возможности ортогонального движения сжимаемой жидкости, используем сначала условие незакручиваемости, которое должно выполняться и для нормальных движений и для полуконсервативных. Составляя для ортогонального движения динамический градиент и турбулизирующий вектор (с помощью формул (9), (10) и (33)), будем иметь

$$\begin{aligned} G_x &= 2\tau_3 v, & G_y &= -\frac{\partial v}{\partial t}, & G_z &= -g - 2\tau_1 v, \\ H_x &= -\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z}, & H_y &= -2\tau_3 \frac{\partial v}{\partial z}, & H_z &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Условие незакручиваемости дает равенство

$$2\tau_3 \left( v \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0; \quad (48)$$

изучая это равенство, мы опускаем случай  $\tau_3 = 0$ , т. е. случай, когда движение происходит по экватору\*.

Если  $\tau_3 \neq 0$ , то, интегрируя уравнение (48), получим следующее решение для  $v$ :

$$v = f(z) \psi(t), \quad (49)$$

где  $f$  и  $\psi$  — произвольные функции своих аргументов. Формула (49) показывает, что условие незакручиваемости значительно ограничивает произвол в выборе функции  $v(t, z)$ .

\* Разумеется, исследование этого случая не представляет никаких трудностей, и мы опускаем его только ради краткости.

Чтобы разделить ортогональное движение на нормальное и полуконсервативное, подсчитаем величину  $\mu$ ; формулы (12) и (33) дают следующее выражение для  $\mu$ :

$$\mu = -v \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (50)$$

Отсюда следует, что ортогональное движение будет нормальным, если  $\partial v / \partial t$  отлично от нуля, и полуконсервативным, если  $\partial v / \partial t = 0$ .

Составляя для случая нормального движения турбомомент, приведенный градиент и два тепловых вектора с помощью формул (15), (16) и (20), легко получим

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & a_y &= 0, & a_z &= \frac{f'}{f}, \\ b_x &= \frac{2\tau_3}{f\psi'}, & b_y &= -\frac{1}{f\psi}, & b_z &= -\frac{g}{f^2\psi\psi'} - \frac{2\tau_1}{f\psi'}, \\ c_x &= 0, & c_y &= 0, & c_z &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

и

$$\begin{aligned} d_x &= -\frac{f'}{f^2\psi} + \frac{g}{f^3} \frac{\psi''}{\psi^2\psi'^2} + \frac{2\tau_1}{f^2} \frac{1}{\psi} \left( \frac{\psi''}{\psi'^2} - \frac{1}{\psi} \right), \\ d_z &= +\frac{2\tau_3}{f^2\psi} \left( \frac{\psi''}{\psi'^2} - \frac{1}{\psi} \right), & d_y &= -\frac{2\tau_3 f'}{f^2\psi'} + \frac{2\tau_3 g}{f^3\psi^2\psi'}, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$f = f(z), \quad \psi = \psi(t), \quad f' = \frac{df}{dz}, \quad \psi' = \frac{d\psi}{dt}.$$

Перейдем к случаю общего нормального движения. Очевидно, что тепловое условие (b) выполняется благодаря равенству (51). Так как  $\mathfrak{z}$  отлично от нуля, то, определяя стереоскаляр  $\lambda$  при помощи формулы (22) и стереовектор  $\mathfrak{z}$  при помощи формулы (23), находим

$$\lambda = 0, \quad \mathfrak{z}_x = 0, \quad \mathfrak{z}_y = 0, \quad \mathfrak{z}_z = \frac{f'}{f}. \quad (53)$$

Из этих формул следует, что условия объема выполняются и, следовательно, каковы бы ни были функции  $f(z)$  и  $\psi(t)$ , динамически возможно ортогональное движение, для которого  $v$  определяется по формуле (49). Определяя с помощью формул (d) удельный объем и давление, получим следующую систему, которая определяет общее ортогональное нормальное движение:

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= f(z) \psi(t), & w &= 0, \\ \omega &= \omega_0 f(z), \end{aligned} \quad (54)$$

$$p = \frac{2\tau_3\psi(t)}{\omega_0} x - \frac{\psi'(t)}{\omega_0} y - \frac{g}{\omega_0} \int_0^z \frac{dz}{f(z)} - \frac{2\tau_1}{\omega_0} \psi(t) z + p_0(t),$$

где  $f$ ,  $\psi$ ,  $p_0$  — произвольные функции своих аргументов \*, а  $\omega_0$  — произвольная постоянная.

Нетрудно видеть, что в ортогональном движении изобары на поверхности Земли (говоря иными словами, линии пересечения изобарических поверхностей с плоскостью  $z = 0$ ) будут семейством параллельных прямых; угол  $\vartheta$  между этими прямыми и осью  $Oy$  (т. е. направлением ветра) определяется равенством

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\psi'(t)}{2\tau_3\psi(t)}.$$

Хотя  $2\tau_3$  — очень малая величина, из этого равенства нельзя заключить, что угол  $\vartheta$  близок к  $90^\circ$ , так как  $\psi'/\psi = \partial \ln \psi / \partial t$  — также малая величина того же порядка, что  $2\tau_3$  \*\*.

Для определения  $f(z)$  можно воспользоваться данными аэрологических наблюдений, проведенными в каком-нибудь месте Земли. В самом деле, эти наблюдения определяют  $\omega$  как функцию  $z$ , и следовательно, с помощью формулы (54) легко определить функцию  $f(z)$ . Для определения  $\psi(t)$  и  $p_0(t)$  нужно иметь барограммы в двух различных местах поверхности Земли. Действительно, предположим, что мы имеем барограммы в точке  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  и в  $\delta$  точке  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ ,  $z = 0$  на поверхности Земли. Первая барограмма даст  $p = P(t)$  для первой точки, вторая —  $p = P_1(t)$  для второй точки. Из уравнений (54) получаем

$$p_0(t) = P(t).$$

$$2\tau_3 x_1 \psi(t) - y_1 \psi'(t) = \omega_0 [P_1(t) - P(t)].$$

Из этих двух уравнений легко определить  $p_0(t)$  и  $\psi(t)$ .

Перейдем к рассмотрению специального нормального движения. Второе условие (е) дает в этом случае три равенства:

$$\delta_x = 0, \quad \delta_y = 0, \quad \delta_z = 0.$$

Комбинируя первое и третье из этих равенств, найдем

$$\psi \frac{g}{\psi(t)^2} = f'(z) f(z).$$

Это соотношение показывает, что в случае специального нормального движения функция  $\psi(t)$  не должна зависеть от  $t$ , что несовместимо с нашим предположением;  $\psi'(t)$  отлична от нуля. Итак, специальное нормальное ортогональное движение невозможно.

\* Кроме того, имеем  $\psi' \neq 0$ .

\*\* См. цитированную статью Хессельберга и Фридмана.

Условие полуконсервативности ортогонального движения состоит в том, что должно выполняться равенство  $\partial v / \partial t = 0$ , другими словами, в случае полуконсервативного движения мы имеем

$$v = f(z).$$

Легко проверить, что для изучаемого движения  $\partial G / \partial t = 0$  и  $G \neq 0$ . Таким образом, мы имеем специальное полуконсервативное движение; для рассматриваемого движения выполняются условия (g), так как  $s = v = \theta = 0$  и  $\partial H / \partial t = 0$ . Итак, специальное полуконсервативное движение возможно независимо от того, каков вид функции  $f(z)$ . Определяя удельный объем  $\omega$  интегрированием уравнения (30), а давление  $p$  при помощи второй из формул (d), найдем следующие равенства, которые и характеризуют специальное полуконсервативное ортогональное движение:

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= f(z), & w &= 0, \\ \omega &= f(z) F \left( x - \frac{g}{2\tau_3} \int_0^z \frac{dz}{f(z)} - \frac{\tau_1}{\tau_3} z \right), \\ p &= 2\tau_3 \Pi \left( x - \frac{g}{2\tau_3} \int_0^z \frac{dz}{f(z)} - \frac{\tau_1}{\tau_3} z \right) + p_0(t), \end{aligned} \quad (55)$$

где  $f$ ,  $p_0$  и  $F$  — произвольные функции своих аргументов, а  $\Pi(\sigma)$  определяется равенством

$$\Pi(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{F(\sigma)}. \quad (56)$$

В исследуемом случае изобары на поверхность Земли ( $z = 0$ ) будут прямыми, параллельными направлению ветра. Что же касается ветра, то он будет меняться по силе с высотой и не будет изменяться со временем.

Легко заметить в ходе нашего изучения ортогонального движения, что все наши выводы глубоко изменились, если бы мы пренебрегли силой девиации, вызванной вращением Земли, т. е. если бы мы положили  $\tau = 0^*$ . Причина состоит в том, что уравнения гидромеханики, рассматриваемые как функции  $\tau$ , будут иметь особенности в  $\tau = 0^{**}$ .

\* Случай  $\tau = 0$  исследован в моей заметке, опубликованной в Compt. rend. Acad. sci., 1916, p. 219; см. стр. 9 настоящей книги.

\*\* Аналогичное обстоятельство для коэффициентов вязкости отмечено в ряде работ Озеена.

3. Чтобы упростить и сократить вычисления, предположим в нашем изучении движения вращающейся жидкости, что  $\tau_2$  и  $\tau_1$  отличны от нуля. Напомним, что ось  $Ox$  направлена на север; легко увидеть, что предположение относительно  $\tau_2$  и  $\tau_1$  сводится к следующему утверждению: место, в котором изучается движение атмосферы, находится на значительном удалении от полюса и от экватора.

Исходя из этих гипотез, положим, что величина

$$m = \zeta + 2\tau_2 \quad (57)$$

отлична от нуля. Отсюда следует, что все эти исключительные случаи можно легко изучить с помощью специальных вычислений.

Более того, предположим, как и прежде, что  $\zeta$  отлично от нуля, т. е., что жидкость действительно вращается.

Составим при помощи формул (9), (10) и (45) динамический градиент и турбулизирующий вектор для движения вращающейся жидкости

$$\begin{aligned} G_x &= m(\zeta x + b)' - \frac{\partial a'}{\partial t}, & G_y &= m(\zeta y - a)' - \frac{\partial b'}{\partial t}, \\ G_z &= -g - 2\tau_1 b' - 2\tau_1 \zeta x, & & (58) \\ H_x &= -m \frac{\partial a'}{\partial z} - \frac{\partial^2 b'}{\partial t \partial z}, & H_y &= -2\tau_1 \zeta - m \frac{\partial b'}{\partial z} + \frac{\partial^2 a'}{\partial t \partial z}, & H_z &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в условие незакручиваемости (равенство а)) и сравнивая коэффициенты при  $x$  и  $y$  в этом равенстве, найдем

$$\begin{aligned} 2\tau_1 \zeta + m \frac{\partial b'}{\partial z} - \frac{\partial^2 a'}{\partial t \partial z} &= 0, & (59) \\ m \frac{\partial a'}{\partial z} + \frac{\partial^2 b'}{\partial t \partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Из этих неравенств непосредственно получаем

$$H_z = 0, \quad H_y = 0, \quad H_x = 0.$$

Это означает, что в силу условия незакручиваемости движение вращающейся жидкости будет баротропическим, и если движение баротропическое, то, очевидно, выполняется условие незакручиваемости.

Интегрируя равенства (59), найдем

$$\begin{aligned} mb' - \frac{\partial a'}{\partial t} &= q_1(t) - 2\tau_1 \zeta z, & (60) \\ ma' + \frac{\partial b'}{\partial t} &= -q_2(t), \end{aligned}$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — произвольные функции времени  $t$ . Легко видеть, что общее решение уравнений (60) можно записать в виде

$$\begin{aligned} a' &= k_1(t) + A_1(z) \sin mt - A_2(z) \cos mt, \\ b' &= -\frac{2\tau_1 \zeta z}{m} + k_2(t) + A_1(z) \cos mt + A_2(z) \sin mt, \end{aligned} \quad (61)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — функции  $t$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} mk_2 - \dot{k}_1 &= q_1(t), \\ mk_1 + \dot{k}_2 &= -q_2(t),^* \end{aligned} \quad (62)$$

а  $A_1$  и  $A_2$  — произвольные функции  $z$ . Комбинируя формулы (46) с формулами (61), найдем после простых вычислений следующие равенства, которые описывают перемещение центра вращения:

$$\begin{aligned} a &= l_1(t) + \frac{2\tau_1 z}{m} - \frac{A_1(z)}{2n} \cos mt - \frac{A_2(z)}{2n} \sin mt + C_1(z) \sin \zeta t - C_2(z) \cos \zeta t, \\ b &= l_2(t) + \frac{A_1(z)}{2n} \sin mt - \frac{A_2(z)}{2n} \cos mt + C_1(z) \cos \zeta t + C_2(z) \sin \zeta t, \end{aligned} \quad (63)$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — функции  $t$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\dot{l}_1 + \zeta l_2 = k_1(t), \quad \dot{l}_2 - \zeta l_1 = k_2(t), \quad (64)$$

а  $n = \zeta + \tau_3$ . Кроме того, чтобы упростить рассуждения, будем считать  $n$  отличным от нуля. В случае если  $n$  было бы равно нулю, то в движении центра вращения могло бы появиться явление резонанса, а в выражениях для  $a$  и  $b$  — так называемые вековые члены.

Рассмотрим теперь кинематический характер движения кинематического центра и центра вращения. Назовем **вторичным кинематическим центром** точку с координатами  $x_K, y_K, z_K$ , определяемыми равенствами

$$x_K = \frac{2\tau_1 z}{m} - \frac{k_2(t)}{\zeta}, \quad y_K = \frac{k_1(t)}{\zeta}, \quad z_K = z. \quad (65)$$

Вторичный кинематический центр перемещается в горизонтальной плоскости, и его движение определяется движением вращающейся жидкости. Формулы (44) и (61) показывают, что кинематический центр вращается вокруг вторичного кинематического центра угловой скоростью, рав-

\*  $\dot{k} = dk/dt$ .



ной  $m$ . Геометрическое место вторичных кинематических центров, соответствующих одному и тому же моменту и различным высотам, или в т о р и ч н а я к и н е м а т и ч е с к а я о с ь, есть прямая, лежащая в плоскости, параллельной плоскости меридиана, и образующая с вертикалью угол  $\vartheta_k$ , такой, что

$$\operatorname{tg} \vartheta_k = \frac{2\tau_1}{m}.$$

Назовем вторичным центром вращения точку с координатами  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ , определяемыми равенствами

$$x_2 = \frac{2\tau_1 z}{m} + l_1(t), \quad y_2 = l_2(t), \quad z_2 = z. \quad (66)$$

Очевидно, что центр вращения вращается вокруг некоторой точки с угловой скоростью  $\zeta$ , в то время как эта последняя в свою очередь вращается вокруг вторичного центра вращения с угловой скоростью  $m$ . Переходя к понятию вторичной оси вращения, легко видеть, что эта ось — прямая, параллельная вторичной кинематической оси.

Рассмотрим теперь, каковы должны быть движения вращающейся жидкости, чтобы они могли считаться нормальными.

Подсчитывая величину  $\mu$ , найдем

$$\mu = -\frac{\partial a'}{\partial t}(a' - \xi y) - \frac{\partial b'}{\partial t}(b' - \xi x), \quad (67)$$

откуда следует, что движение будет полуконсервативным, когда  $a'$  и  $b'$  зависят только от  $z$  и не зависят от  $t$  (а именно:  $\partial a'/\partial t = 0$ ,  $\partial b'/\partial t = 0$ ).

Перейдем сначала к общему нормальному движению.

В этом случае, составляя турбомомент и первый тепловой вектор, найдем

$$a = 0, \quad c = 0.$$

Отсюда следует, что тепловые условия выполняются и что стереоскаляр  $\lambda$ , а также стереовектор  $\mathfrak{z}$  обращаются в нуль (см. формулы (22) и (23)). Следовательно, выполняются также и объемные условия, а первое из равенств (d) показывает, что удельный объем будет постоянным:

$$\omega = \omega_0.$$

Итак, общее нормальное движение вращающейся жидкости будет движением несжимаемой жидкости.

Этот результат значительно уменьшает интерес к рассматриваемому движению. В атмосферных движениях мы имеем дело не с движениями неограниченной жидкости, но с движениями жидкости, ограниченной

с одной стороны поверхностью Земли, а с другой поверхностью разрывности атмосферы (например, поверхностью инверсии). Отсюда, очевидно, следует, что изучаемое движение может быть моделью только такого атмосферного движения, верхняя граница которого находится на некоторой средней высоте (нижняя инверсия), так как только в этом случае можно с достаточно хорошим приближением пренебречь изменением  $\omega$  с высотой и считать удельный объем постоянным. Давление в случае общего нормального движения определяется равенством

$$\omega_0 p = \frac{\xi m}{2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \frac{\xi m}{2} (x_0^2 + y_0^2) - gz - 2\tau_1 \int_0^z b' dz + p_0(t), \quad (68)$$

где

$$x_0 = \frac{2\tau_1 \xi z - q_1(t)}{m}, \quad y_0 = -\frac{q_2(t)}{m}, \quad (69)$$

$q_1, q_2, p_0$  — произвольные функции  $t$ ;  $b'$  определяется по второй формуле (61).

Назовем динамическим центром точку с координатами

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Динамический центр может двигаться произвольно. Динамическо й осью будет прямая, параллельная вторичной кинематической оси и вторичной оси вращения. Зная движение динамического центра, мы найдем функции  $q_1$  и  $q_2$  и, следовательно, общий характер перемещения кинематического центра и центра вращения. Формула (68) показывает, что изобары на поверхности Земли (для  $z = 0$ ) представляют concentрические окружности с общим центром в динамическом центре. Итак, изучаемое движение жидкости является подвижным циклоном или антициклоном; центр циклона или антициклона совпадает с динамическим центром и будет изменять свое положение со временем; радиус круговой изобары, соответствующей заданному давлению, изменяется со временем. Очень легко детально проанализировать различные случаи, когда динамический центр движется прямолинейно и равномерно или по окружности, или по параболе. Однако не будем этого делать, так как по нашему мнению полученное условие постоянства плотности не позволяет считать изучаемый случай моделью некоторого реального движения атмосферы. Заметим, что изучаемый случай дает циклон при отрицательных и положительных  $\xi$  больше чем  $-2\tau_3$ ; в интервале  $(0, -2\tau_3)$  имеет место антициклон. Мы докажем эти положения в следующем параграфе после подробного изучения стационарных циклонов или антициклонов.

Легко убедиться, проведя соответствующие вычисления, что случай специального нормального движения вращающейся жидкости невозможен; таким образом, мы рассмотрим только случай полуконсервативного

движения, для которого  $a'$  и  $b'$  зависят только от  $z$ . В этом случае уравнения (60) показывают, что  $q_1$  и  $q_2$  не зависят от  $t$  и, следовательно, они постоянны;  $a'$  и  $b'$  будут выражаться через эти постоянные следующим образом:

$$a' = -\frac{q_2}{m}, \quad b' = -\frac{2\tau_1 \xi z}{m} + \frac{q_1}{m}. \quad (70)$$

Изучаемое движение будет, очевидно, специальным полуконсервативным, так как  $\partial G/\partial t$  обращается в нуль.

А так как  $s = v = \theta = 0$  и  $\partial H/\partial t$  также обращается в нуль, то в этом случае, очевидно, выполняются все условия динамической возможности специального полуконсервативного движения (равенства (g)). Определяя обычным образом удельный объем и давление, получим после некоторых упрощений формулы

$$\begin{aligned} u &= -\xi(y - y_0), & v &= \xi(x - x_0), & w &= 0, \\ \omega &= F(\sigma), \end{aligned} \quad (71)$$

$$p = \frac{\xi + 2\tau_3}{2\xi} \Pi(\sigma) + p_0(t),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= \xi^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \frac{g}{\tau_1} \xi x_0, \\ x_0 &= \frac{2\tau_1}{\xi + 2\tau_3} z - \frac{q_1}{\xi(\xi + 2\tau_3)}, \\ y_0 &= -\frac{q_2}{\xi(\xi + 2\tau_3)}, \quad \Pi(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{F(\sigma)}, \end{aligned} \quad (72)$$

$F$  и  $p_0$  — произвольные функции своих аргументов, а  $\sigma_0$  — некоторая произвольная постоянная.

Легко непосредственно проверить, что кинематические и динамические элементы, определяемые формулами (71), действительно будут удовлетворять динамической группе уравнений гидромеханики.

Назовем и в этом случае динамическим центром точку с координатами  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ . Легко видеть, что изобарами в этом движении будут концентрические окружности с общим центром в динамическом центре, который будет в этом случае неподвижным. Таким образом, мы будем иметь так называемый стационарный циклон или антициклон. Удельный объем в рассматриваемом случае не будет постоянным; напротив, его изменение с высотой позволит нам определить вид произвольной функции  $F$ . Ввиду того, что по нашему мнению рассматриваемая картина распределения давлений может служить моделью некоторых атмосферных дви-

жений, последний параграф нашей работы мы посвящаем детальному анализу этого случая движения вращающейся жидкости.

В заключение сделаем еще одно замечание. Мы нашли, что во вращающейся жидкости динамически возможны только баротропические движения. Мы видели также, что подвижные циклоны и антициклоны, т. е. наиболее интересные случаи, могут существовать только в несжимаемой жидкости. В баротропических жидкостях, удельный объем которых изменяется с высотой, допустимы только стационарные циклоны и антициклоны. Причина этого ограничения состоит, очевидно, в том, что мы предположили  $\zeta$  постоянным, не зависящим от высоты и времени. Предположив, что  $\zeta$  — функция высоты  $z$ , мы увидим, что это — бароклинические движения вращающейся жидкости, которые динамически возможны. В этом случае можно построить циклоны и антициклоны с центром, перемещающимся некоторым произвольным образом, с криволинейными изобарами и, конечно, с переменным удельным объемом, зависящим от высоты.

Изменение удельного объема с высотой будет связано некоторым образом с изменением  $\zeta$  в зависимости от высоты \*. К сожалению, за недостатком места мы не можем входить в детали этого вопроса.

## § 4

1. Перейдем теперь к более подробному изучению движения вращающейся жидкости, полученного в конце предыдущего параграфа \*\*.

Из формул (71) следует, что давление есть некоторая функция удельного объема, и поэтому мы имеем случай движения баротропической жидкости, при котором изобарические и изостерические поверхности совпадают. Как мы уже сказали, изобары на высоте  $z$  будут в этом движении концентрическими окружностями, общий центр которых есть динамический центр, соответствующий заданной высоте.

Произвольную функцию  $F(\sigma)$ , которая входит в формулы (71), можно определить с помощью аэрологических наблюдений, которые дают удельный объем, как функцию  $z$ ; произвольную функцию  $p_0(t)$  можно определить, если есть барограмма в каком-нибудь месте области жидкости, охваченной рассматриваемым движением. Ввиду того, что эта функция не оказывает никакого влияния ни на барометрический градиент, ни на характер движения, мы для простоты будем считать ее равной константе, выбранной

\* Случай вращающейся жидкости, когда  $\zeta$  зависит от  $z$  и от  $t$ , подробно исследован Н. Кочиним, сотрудником Главной физической лаборатории в Петрограде, который получил бароклиническое движение (циклон или антициклон с подвижным центром). Статья Н. Е. К о ч и н а «Теоретическая модель подвижного циклона» опубликована в журнале Геофизики и метеорология, 1924, 1.

\*\* В дальнейшем мы пользуемся системой геофизических единиц — MTS.

соответствующим образом. Переносом начала координат всегда можно свести  $q_1$  и  $q_2$  к нулю. В дальнейшем мы используем это упрощение.

Принимая указанные упрощения, получим для  $\sigma$  выражение

$$\sigma = \zeta^2 (x^2 + y^2) + s^2 z^2 - 2\zeta s x z - \frac{g}{\tau_1} s z, \quad (73)$$

где

$$s = \frac{2\tau_1 \zeta}{\zeta + 2\tau_3}. \quad (74)$$

Придавая  $\sigma$  постоянное значение, мы получим некоторую изобарическую поверхность; пересекая ее плоскостью, параллельной горизонтальной поверхности Земли, мы получим некоторую определенную изобару. В частности, полагая  $z = 0$ , мы получим изобары на поверхности Земли; эти изобары определяются уравнением

$$\zeta^2 (x^2 + y^2) = \sigma$$

и представляют систему концентрических окружностей с центром в начале координат.

Посмотрим сначала, при каких условиях изучаемое движение образует циклон или антициклон. Так как изобары на поверхности Земли — концентрические окружности, то мы будем иметь циклон, если давление возрастает вместе с радиусом изобары, и антициклон — в противном случае. Обозначая через  $r$  радиус какой-нибудь изобары, найдем, что условие  $\partial p / \partial r > 0$  определяет циклон, а  $\partial p / \partial r < 0$  — антициклон. Так как  $r^2 = x^2 + y^2$ , то формулы (71) и (72) при  $z = 0$  (на поверхности Земли) дают

$$\left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{z=0} = \frac{\zeta + 2\tau_3}{2\zeta} \frac{1}{F(\sigma)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)_{z=0} = \zeta (\zeta + 2\tau_3) \frac{r}{\omega},$$

откуда следует, что циклон имеет место, если  $\zeta (\zeta + 2\tau_3) > 0$ , антициклон — если  $\zeta (\zeta + 2\tau_3) < 0$ .

При выбранной системе координат (ось  $Oz$  направлена вертикально вверх, ось  $Ox$  — на север вдоль меридиана, ось  $Oy$  — на восток вдоль параллели) будем иметь

$$\tau_1 = -\tau \cos \varphi, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = -\tau \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  — высота центра циклона. Другими словами, для северного полушария  $2\tau_3$  будет отрицательной величиной, и можно высказать следующее предположение.

Изучаемое движение будет циклоном при значениях  $\zeta$ , лежащих в интервале  $(-\infty, 0)$  и  $(-2\tau_3, \infty)$ , и антициклоном при  $\zeta$ , лежащих в интервале  $(0, -2\tau_3)$ .

График функции  $\psi = \zeta (\zeta + 2\tau_3)$  и интервалы изменения  $\zeta$ , соответствующие циклону и антициклону, изображены на рис. 1. В пункте наблюдения  $\varphi = 60^\circ$  с. ш., следовательно,  $2\tau_3 = -1,26 \cdot 10^{-4}$ .

Из сказанного следует, что циклон будет как при отрицательных  $\zeta$  (циклонное вращение), так и при некоторых положительных  $\zeta$  (антициклонное вращение).

Назовем нормальным циклоном циклон с отрицательным  $\zeta$  и аномальным — циклон с положительным  $\zeta$ , лежащим в интервале  $(-2\tau_3, \infty)$  \*.

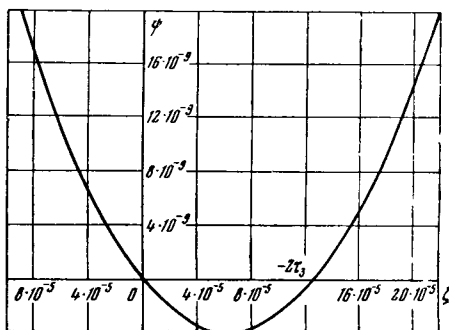


Рис. 1

В табл. 1 приведены значения  $\psi$ , соответствующие различным значениям  $\zeta$ .

Итак, как мы видели выше, линии тока в рассматриваемом движении — концентрические окружности с центром в динамическом центре. Движение частиц воздуха вдоль этих линий тока будет циклоническим при  $\zeta < 0$  и антициклоническим при  $\zeta > 0$  (рис. 2). Следовательно, в аномальном циклоне движение частиц воздуха антициклоническое. Более глубокий анализ аномальных циклонов показывает, что при приближении к их центру барометрический градиент очень мал. В дальнейшем мы не будем рассматривать случай аномальных циклонов.

Приведенная выше формула градиента  $(\partial p / \partial r)_{z=0}$  показывает, что числовые значения градиента для нормального циклона для одного и того же места (и при прочих равных условиях) убывают, когда возрастает  $\zeta$  или (при отрицательных  $\zeta$ ) убывают, когда убывает  $|\zeta|$ , т. е. когда убывает абсолютная величина угловой скорости вращения жидкости. Далее, в случае аномального циклона абсолютная величина градиента возрастает

\* В условиях реальной атмосферы аномальные циклоны представляют очень редкое явление; их величина должна быть совершенно незначительной.

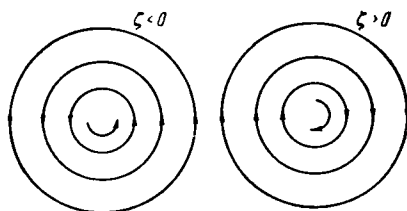


Рис. 2

вместе с  $\zeta$  ( $\zeta > -2\tau_3 > 0$ ). Наконец, в случае антициклона абсолютная величина градиента возрастает, когда  $\zeta$  возрастает от 0 до  $-\tau_3$  и убывает, когда  $\zeta$  продолжает изменяться от  $-\tau_3$  до  $-2\tau_3$ .

В рассматриваемом случае координаты динамического центра (для

Таблица 1

Значения  $\psi = \zeta(\zeta + 2\tau_3)$ 

| $\zeta \cdot 10^4$ | $(\zeta + 2\tau_3) \cdot 10^4$ | $\zeta(\zeta + 2\tau_3) \cdot 10^8$ | $\zeta \cdot 10^4$ | $(\zeta + 2\tau_3) \cdot 10^4$ | $\zeta(\zeta + 2\tau_3) \cdot 10^8$ |
|--------------------|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| 2,0                | 0,74                           | 1,48                                | -0,1               | -1,36                          | 0,14                                |
| 1,9                | 0,64                           | 1,22                                | -0,2               | -1,46                          | 0,29                                |
| 1,8                | 0,54                           | 0,97                                | -0,3               | -1,56                          | 0,47                                |
| 1,7                | 0,44                           | 0,75                                | -0,4               | -1,66                          | 0,66                                |
| 1,6                | 0,34                           | 0,54                                | -0,5               | -1,76                          | 0,88                                |
| 1,5                | 0,24                           | 0,36                                | -0,6               | -1,86                          | 1,12                                |
| 1,4                | 0,14                           | 0,20                                | -0,7               | -1,96                          | 1,37                                |
| 1,3                | 0,04                           | 0,052                               | -0,8               | -2,06                          | 1,65                                |
| 1,2                | -0,06                          | -0,072                              | -0,9               | -2,16                          | 1,94                                |
| 1,1                | -0,16                          | -0,18                               | -1,0               | -2,26                          | 2,26                                |
| 1,0                | -0,26                          | -0,26                               | -1,1               | -2,36                          | 2,60                                |
| 0,9                | -0,36                          | -0,32                               | -1,2               | -2,46                          | 2,95                                |
| 0,8                | -0,46                          | -0,37                               | -1,3               | -2,56                          | 3,33                                |
| 0,7                | -0,56                          | -0,39                               | -1,4               | -2,66                          | 3,72                                |
| 0,6                | -0,66                          | -0,40                               | -1,5               | -2,76                          | 4,14                                |
| 0,5                | -0,76                          | -0,38                               | -1,6               | -2,86                          | 4,58                                |
| 0,4                | -0,86                          | -0,34                               | -1,7               | -2,96                          | 5,03                                |
| 0,3                | -0,96                          | -0,29                               | -1,8               | -3,06                          | 5,51                                |
| 0,2                | -1,06                          | -0,21                               | -1,9               | -3,16                          | 6,00                                |
| 0,1                | -1,16                          | -0,12                               | -2,0               | -3,26                          | 6,52                                |
| 0,0                | -1,26                          | 0                                   |                    |                                |                                     |

высоты  $z$ ) выражаются формулами

$$x_0 = \frac{2\tau_1}{\zeta + 2\tau_3} z, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = z.$$

Динамическая ось будет прямой, совпадающей с меридианом и образующей с осью, направленной на север, угол  $j$ :

$$\operatorname{tg} j = \frac{\zeta + 2\tau_3}{2\tau_1}.$$

График  $\operatorname{tg} j$  как функции  $\zeta$  приведен на рис. 3. При построении этой кривой нужно помнить, что и  $\tau_1$  и  $\tau_3$  отрицательны и что  $\tau_3/\tau_1 = \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi$  — широта места наблюдения.

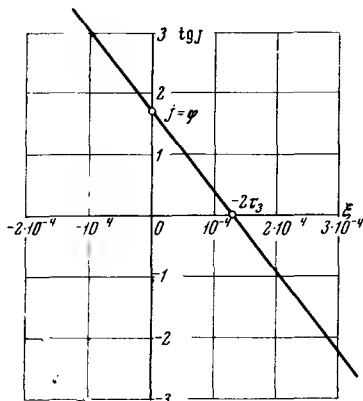


Рис. 3

Этот график показывает, что для нормального циклона или антициклона динамическая ось отклоняется в плоскости меридиана на север, а для аномального циклона — на юг.

Придавая в формулах (73) различные значения параметру  $\sigma$ , мы получим семейство изобарических поверхностей. Это поверхности второго порядка, а именно: эллиптические параболоиды (как показывает простой анализ). Сечения этих параболоидов плоскостями, параллельными горизонтальной поверхности Земли, будут или мнимыми кривыми (т. е. не будут существовать) или окружностями. Итак, для

каждого из рассматриваемых эллиптических параболоидов семейство плоскостей, которое доставляет круговые сечения, состоит из плоскостей, параллельных горизонтальной поверхности Земли.

Составляя уравнение горизонтальной касательной плоскости изобарической поверхности, найдем

$$z = -\frac{\zeta + 2\tau_3}{\zeta} \frac{\sigma}{2g} = z_\sigma; \quad (75)$$

точка касания совпадает с динамическим центром, соответствующим высоте плоскости.

Покажем теперь, что в случае циклона эллиптические параболоиды имеют вершину внизу и вогнуты вверх, а в случае антициклона, наоборот, вершина эллиптических параболоидов вверх.

Уравнение (73) можно записать следующим образом:

$$(\zeta x - sz)^2 + \zeta^2 y^2 = \frac{g}{\tau_1} sz + \sigma = 2g \frac{\zeta}{\zeta + 2\tau_3} (z - z_\sigma).$$



Пересекая эллиптический параболоид горизонтальной плоскостью при  $z > z_0$ , получим в случае циклона окружность (так как  $\frac{\xi}{\xi + 2\tau_3} > 0$ ) и в случае антициклона — мнимую кривую. Отсюда следует, что в случае циклона плоскость  $z = z_0$  касается эллиптического параболоида в его нижней точке, а в случае антициклона — в его верхней точке, что доказывает наше предположение. Изобарические поверхности для циклона и для антициклона представлены схематически на рис. 4.

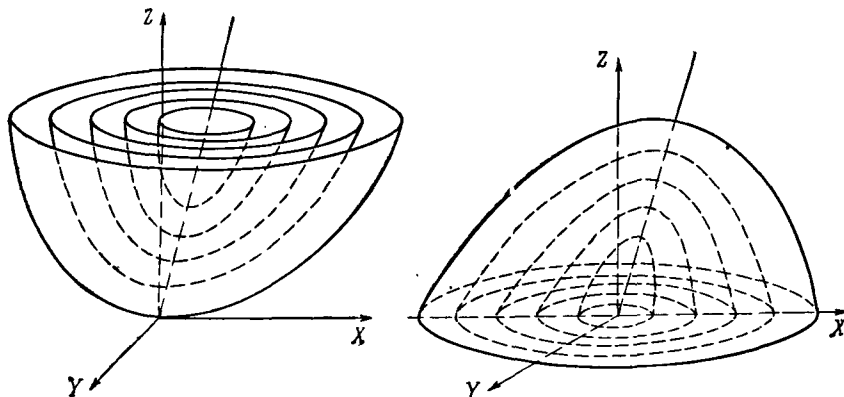


Рис. 4

Выражение для  $z_0$  показывает, что для циклона величина параметра  $\sigma$  уменьшается с высотой, а для антициклона возрастает. Для циклона и для антициклона изобарическая поверхность касается горизонтальной поверхности Земли, что соответствует значению  $\sigma = 0$ .

2. Рассматривая движение вращающейся жидкости с точки зрения гидродинамики, мы не можем наложить никаких ограничений на угловую скорость  $\xi$ . Но в действительности в атмосферных условиях  $\xi$  не может иметь сколь угодно больших значений, так как мы не наблюдаем ни достаточно больших скоростей в атмосфере, ни достаточно малых давлений на поверхности Земли. По этим соображениям к уравнениям гидродинамики (которым подчиняются атмосферные движения) нужно добавить еще ряд дополнительных условий, которые ограничивают произвол в выборе тех или иных констант, входящих в наши формулы. Если бы мы рассматривали движение в неограниченной массе жидкости, то было бы невозможно ввести какие-либо ограничения. Но подобное изучение было бы неточным и бесполезным; следовательно, мы рассмотрим только движение жидкости, которое имеет место в ограниченной области жидкости. Примем за такую область часть вертикального цилиндра, ось которого проходит через динами-

ческий центр на поверхности Земли, радиус цилиндра равен  $R$ , снизу он ограничен поверхностью Земли, а сверху горизонтальной плоскостью  $z = H$ . Будем называть соответственно радиусом циклона или антициклона и высотой циклона или антициклона радиус  $R$  и высоту  $H$ . Высота  $H$  будет как правило, высотой инверсии, в частности границей стратосферы. Конечно, не надо думать, что указанные пределы это реальные границы. Воздух не встречает никаких препятствий, просто мы рассматриваем движение только внутри этой области. Будем называть такую часть цилиндра областью циклона или антициклона.

Для того чтобы установить связь между угловой скоростью и размерами области циклона или антициклона, посмотрим, как выражается величина скорости ветра  $V$  в различных точках поверхности Земли, находящихся в области циклона или антициклона. Так как динамический центр на поверхности Земли совпадает с началом координат, то имеем  $x_0 = 0, y_0 = 0$  и из формулы (71) получаем следующие выражения для составляющих скорости ветра:

$$u = -\zeta y, \quad v = \zeta x, \quad w = 0,$$

откуда

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

будет определяться формулой

$$V = |\zeta| r,$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние между точкой, в которой определяется скорость ветра, и центром циклона или антициклона. Предположим, что во всей области, охваченной циклоном или антициклоном, скорость ветра не превышает величины  $A$ ; скорость будет максимальной на периферии, т. е. при  $r = R$ , где  $R$  — радиус циклона или антициклона. Следовательно, для того чтобы скорость ветра в области циклона или антициклона не превышала величины  $A$ , должно выполняться неравенство

$$|\zeta| R \leq A,$$

откуда

$$R \leq \frac{A}{|\zeta|}. \quad (76)$$

Пусть максимальная скорость ветра на поверхности земли  $10$  м/сек. Следовательно,  $A = 10$  и будем иметь для  $R$  неравенство

$$R \leq \frac{10}{|\zeta|}.$$

С помощью этого неравенства мы непосредственно определим максимальные размеры аномального циклона. В самом деле, при аномальном циклоне  $\zeta$  не может быть меньше чем  $-2\tau_3 = 0,126 \cdot 10^{-3}$ , т. е. радиус

аномального циклона не больше, чем 75 км, другими словами, аномальные циклоны очень малы по своим размерам. Добавим к этому, что будет мал и градиент этих аномальных циклонов, кроме тех случаев, когда размеры циклона будут сами очень малы (порядка 10 км). Эти два обстоятельства объясняют отсутствие аномальных циклонов в обычных атмосферных условиях. Ввиду малой важности этой категории движений мы не будем останавливаться на их изучении. Заметим, что возможность таких аномальных циклонов была отмечена Dines'ом \*.

3. Ниже мы рассмотрим подробно несколько примером циклонов или антициклонов при  $\zeta = -10^{-5}$ ,  $\zeta = -0,5 \cdot 10^{-4}$  и  $\zeta = 10^{-5}$ ,  $\zeta = 0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Остановимся на вопросе определения (с помощью аэрологических данных) произвольной функции  $F(\sigma)$ , входящей в формулы, которые выражают стационарный циклон, и дадим численные примеры стационарных циклонов и антициклонов.

Изучим сначала случай антициклона. Предположим, что в центре стационарного антициклона проведены аэрологические наблюдения, при помощи которых можно определить удельный объем  $\omega$  как функцию высоты  $z$ :  $\omega = f(z)$ .

В случае антициклона вертикаль, вдоль которой известно изменение  $\omega$ , будет пересекать все изобарические поверхности (см. рис. 4) вблизи поверхности Земли в области антициклона. Таким образом, мы будем знать значение  $\omega$  на каждой из этих изобарических поверхностей: иными словами, мы будем знать функцию  $F(\sigma)$ , входящую в наши формулы, для всех значений  $\sigma$ , которые определяют изобарические поверхности вблизи поверхности Земли в области антициклона. Наша задача определения  $F(\sigma)$ , по данным наблюдений, решена, по крайней мере принципиально.

Совершенно иначе дело обстоит с циклоном. Располагая аэрологическими наблюдениями, сделанным в центре циклона, мы согласно рис. 4 точно узнаем  $\omega$  для изобарических поверхностей, которые не пересекают поверхность Земли. Итак, аэрологические наблюдения в центре циклона не позволяют определить произвольную функцию  $F(\sigma)$ . Тем не менее легко видеть, что, проводя аэрологические наблюдения в каком-нибудь месте периферии циклона, мы узнаем значения  $F(\sigma)$  во всех точках вертикали, которая пересекает все изобарические поверхности вблизи поверхности Земли в области циклона. Используя аэрологические наблюдения, сделанные в каком-нибудь месте периферии циклона, мы узнаем удельный объем для каждой изобарической поверхности, пересекающей поверхность Земли в области циклона, другими словами, мы узнаем  $F(\sigma)$  для значений  $\sigma$ , соответствующих изобарическим поверхностям, которые пересекают поверхность Земли в области циклона.

Можно было бы поставить задачу: определить  $F(\sigma)$  из всех аэрологи-

\* Dines. Cyclonic Circulation.— Nature, 1922, 102, N 2563.

ческих наблюдений, выполненных в области циклона или антициклона, рассматривая  $F(\sigma)$  как среднее этих наблюдений. Определение  $F(\sigma)$  сведется в этом случае в решение некоторого интегрального уравнения. Предварительные вычисления, которые мы провели по этому последнему методу, дали тот же результат, что и при способе определения  $F(\sigma)$  при помощи аэрологических наблюдений в центре антициклона или на периферии циклона. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся методом отдельных наблюдений.

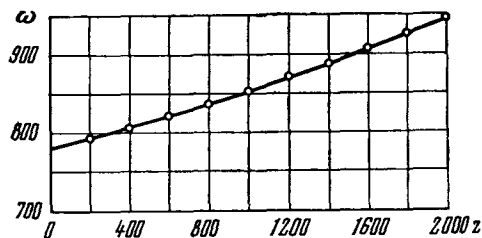


Рис. 5

Так как наша задача состоит в том, чтобы только дать общий обзор методов приближения модели стационарных циклонов или антициклонов к действительным атмосферным явлениям, мы ограничимся определенным идеальным случаем падения температуры с высотой. Предположим, что атмосфера находится в состоянии адиабатического равновесия, иными словами, температура, изменяясь с высотой, уменьшается на  $1^\circ$  на каждые 100 м. Случай, когда температура понижается на  $0,5^\circ$  на каждые 100 м, дает в конечном результате стационарные циклон и антициклон, мало отличающиеся от тех, которые получаются в случае адиабатического равновесия атмосферы. Зависимость удельного объема  $\omega$  от высоты  $z$  в случае адиабатического равновесия атмосферы представлена на рис. 5.

Посмотрим, как можно подсчитать распределение давления в циклоне или антициклоне. Возьмем для определенности случай антициклона, положив  $\zeta = 10^{-5}$ . При наших условиях относительно размеров антициклона мы получим для его радиуса значение 1000 км. Выражая с помощью формулы (76)  $\sigma$  как функцию  $z$  для вертикали, проходящей через центр антициклона ( $x = 0, y = 0$ ), получим кривую рис. 6. При помощи рис. 5 и 6 получаем соотношение между  $\omega$  и  $\tau$ , а именно,  $\omega = F(\sigma)$ , изображаемое кривой рис. 7. Затем, вычисляя  $1/\omega = 1/F(\sigma)$  и определяя давление  $p$ , с помощью графического интегрирования и формулы (71) мы получим кривую давления, данную на рис. 8, где мы полагаем  $p_0(t)$  постоянным и равным 100 сбар (750 мм рт. ст.). Конечно, давление в центре антициклона в действительности будет выше чем 100 сбар, а в центре циклона оно будет

Таблица 2

Радиусы различных изобар стационарных циклонов  
и антициклонов

| Характеристики циклона или антициклона | Обозначение изобар, см | Давление на изобаре, мм рт. ст. | Радиус изобары, км |
|----------------------------------------|------------------------|---------------------------------|--------------------|
| <b>Антициклон</b>                      |                        |                                 |                    |
| $\zeta = 10^{-5}$ ,                    | 100,0                  | 750,0                           | 0                  |
| радиус 1000 км,                        | 99,8                   | 748,5                           | 533                |
| максимальная скорость на               | 99,6                   | 747,0                           | 754                |
| периферии 10 м/сек                     | 99,4                   | 745,5                           | 923                |
|                                        | 99,2                   | 744,0                           | 1070               |
|                                        | 99,0                   | 742,5                           | 1190               |
| <b>Антициклон</b>                      |                        |                                 |                    |
| $\zeta = 0,5 \cdot 10^{-4}$            | 100,0                  | 750,0                           | 0                  |
| радиус 500 км,                         | 99,8                   | 748,5                           | 290                |
| максимальная скорость на               | 99,6                   | 747,0                           | 410                |
| периферии 25 м/сек                     | 99,4                   | 745,5                           | 502                |
|                                        | 99,2                   | 744,0                           | 578                |
|                                        | 99,0                   | 742,5                           | 648                |
| <b>Циклон</b>                          |                        |                                 |                    |
| $\zeta = -10^{-5}$ ,                   | 100,0                  | 750,0                           | 0                  |
| радиус 1000 км,                        | 100,2                  | 751,5                           | 482                |
| максимальная скорость на               | 100,4                  | 753,0                           | 681                |
| периферии 10 м/сек                     | 100,6                  | 754,5                           | 834                |
|                                        | 100,8                  | 756,0                           | 963                |
|                                        | 101,0                  | 757,5                           | 1080               |
| <b>Циклон</b>                          |                        |                                 |                    |
| $\zeta = 0,5 \cdot 10^{-4}$ ,          | 100,0                  | 750,0                           | 0                  |
| радиус 500 км,                         | 100,2                  | 751,5                           | 189                |
| максимальная скорость на               | 100,4                  | 753,0                           | 266                |
| периферии 25 м/сек                     | 100,6                  | 754,5                           | 328                |
|                                        | 100,8                  | 756,0                           | 378                |
|                                        | 101,0                  | 757,5                           | 422                |
|                                        | 101,2                  | 759,0                           | 462                |
|                                        | 101,4                  | 760,5                           | 500                |

Таблица 3

**Барометрические градиенты в стационарных циклонах  
и антициклонах**

| Характеристики циклона или антициклона                                                                                 | Зона циклона или антициклона, км | Барометрический градиент, мм рт. ст. на 1° меридиана |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------|
| <b>Антициклон</b><br>$\zeta = 10^{-5}$ ,<br>радиус 1000 км,<br>максимальная скорость на<br>периферии 10 м/сек          | 0— 100                           | 0,05                                                 |
|                                                                                                                        | 100— 200                         | 0,16                                                 |
|                                                                                                                        | 200— 300                         | 0,27                                                 |
|                                                                                                                        | 300— 400                         | 0,38                                                 |
|                                                                                                                        | 400— 500                         | 0,48                                                 |
|                                                                                                                        | 500— 600                         | 0,59                                                 |
|                                                                                                                        | 600— 700                         | 0,69                                                 |
|                                                                                                                        | 700— 800                         | 0,80                                                 |
|                                                                                                                        | 800— 900                         | 0,90                                                 |
|                                                                                                                        | 900—1000                         | 1,01                                                 |
| <b>Антициклон</b><br>$\zeta = 0,5 \cdot 10^{-4}$ ,<br>радиус 500 км,<br>максимальная скорость на<br>периферии 25 м/сек | 0— 100                           | 0,2                                                  |
|                                                                                                                        | 100— 200                         | 0,5                                                  |
|                                                                                                                        | 200— 300                         | 0,9                                                  |
|                                                                                                                        | 300— 400                         | 1,2                                                  |
|                                                                                                                        | 400— 500                         | 1,6                                                  |
| <b>Циклон</b><br>$\zeta = -10^{-5}$ ,<br>радиус 1000 км,<br>максимальная скорость на<br>периферии 10 м/сек             | 0— 100                           | —0,06                                                |
|                                                                                                                        | 100— 200                         | —0,19                                                |
|                                                                                                                        | 200— 300                         | —0,32                                                |
|                                                                                                                        | 300— 400                         | —0,45                                                |
|                                                                                                                        | 400— 500                         | —0,58                                                |
|                                                                                                                        | 500— 600                         | —0,71                                                |
|                                                                                                                        | 600— 700                         | —0,83                                                |
|                                                                                                                        | 700— 800                         | —0,97                                                |
|                                                                                                                        | 800— 900                         | —1,10                                                |
|                                                                                                                        | 900—1000                         | —1,22                                                |

Таблица 3 (окончание)

| Характеристики циклона или антициклона | Зона циклона или антициклона, км | Барометрический градиент, мм рт. ст. на 1° меридиана |
|----------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------|
| Циклон                                 |                                  |                                                      |
| $\zeta = -0,5 \cdot 10^{-4}$           | 0—100                            | —0,42                                                |
| радиус 500 км,                         | 100—200                          | —1,3                                                 |
| максимальная скорость на               | 200—300                          | —2,1                                                 |
| периферии 25 м/сек                     | 300—400                          | —2,9                                                 |
|                                        | 400—500                          | —3,8                                                 |

меньше этого значения. Однако ясно, что при циклоне или антициклоне изменение  $p_0(t)$  не влияет на барометрический градиент.

Анализируя аналогичным образом случай стационарного циклона, мы сможем составить две следующие таблицы. Первая таблица (табл. 2)

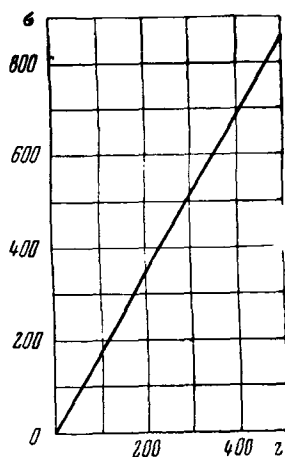


Рис. 6

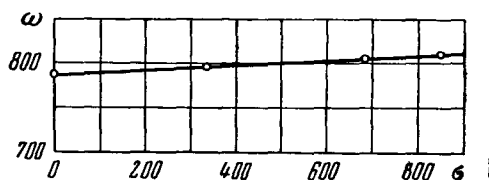


Рис. 7

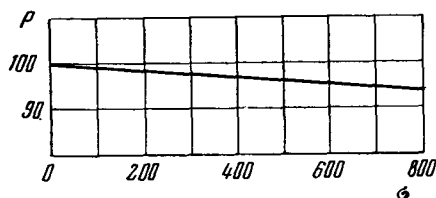


Рис. 8

приводит радиусы различных изобар циклонов или антициклонов, а вторая (табл. 3) — барометрические градиенты для различных областей циклона или антициклона.

Барометрический градиент  $B$  (т. е. изменение давления, выраженное в миллиметрах ртутного столба на градус меридиана) можно подсчитать с помощью формулы для  $(\partial p / \partial r)_{Z=0}$ , данной в начале § 4.

Из табл. 3, а также из предыдущей формулы для барометрического градиента  $B$  и табл. 1 следует, что (при всех прочих равных условиях) градиент для циклона больше, чем для антициклона.

Рис. 9 и 10 представляют сечения изобарических поверхностей горизонтальной плоскостью поверхности Земли и вертикальной плоскостью для циклона, имеющего радиус 1000 км и  $\zeta = -10^{-5}$ . Температура  $t$  выражается в наших сечениях в градусах Цельсия.

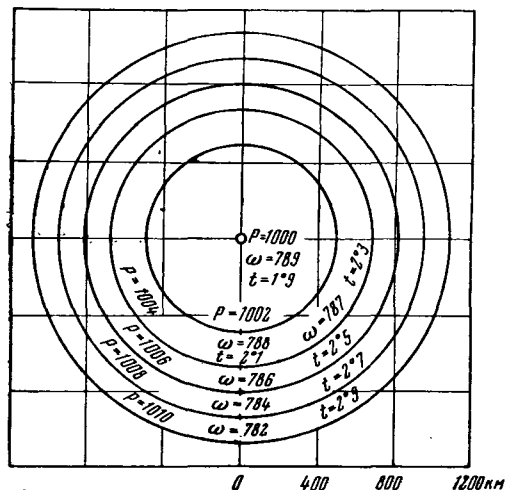


Рис. 9

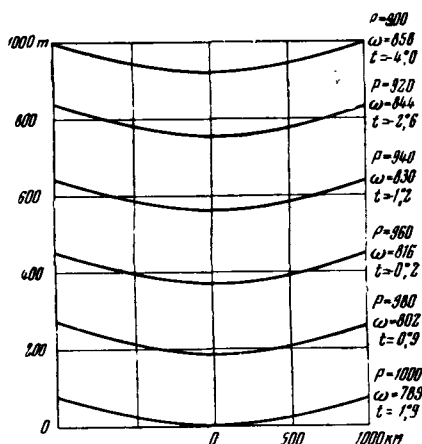


Рис. 10

Методом, совершенно аналогичным описанному выше, можно было бы также исследовать стационарный циклон или антициклон в случае, когда изменение температуры с высотой не обладает постоянным градиентом и когда в атмосфере имеют место инверсии температуры. Существование подобных поверхностей разрывности оказывает влияние на структуру стационарного циклона или антициклона.

Тем не менее мы не имеем возможности останавливаться в настоящей работе на этом очень интересном вопросе.

Петроград, сентябрь 1922 г.



# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КОСМОЛОГИЯ





## О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА <sup>18</sup>

1. В своих известных работах, посвященных общим космологическим вопросам, Эйнштейн \* и Де-Ситтер \*\* приходят к двум мыслимым типам вселенной; Эйнштейн получает так называемый цилиндрический мир, в котором пространство \*\*\* обладает постоянной, не меняющейся с течением времени кривизной, причем радиус кривизны связывается с общей массой материи, расположенной в пространстве; Де-Ситтер получает шаровой мир, в котором уже не только пространство, но и весь мир обладает до известной степени характером мира постоянной кривизны \*\*\*\*. При этом и Эйнштейн и Де-Ситтер предполагают определенных характер тензора материи, отвечающей гипотезе несвязанности материи и ее относительному покою, иначе говоря, достаточной малости скоростей материи по сравнению с фундаментальной скоростью \*\*\*\*\*, т. е. со скоростью света.

Настоящая заметка имеет целью получить цилиндрический и сферический мир как частные типы, вытекающие из некоторых общих положений, а затем указать возможность получения особого мира, кривизна пространства которого, постоянная относительно трех принятых за пространственные координат, меняется с течением времени, т. е. зависит от четвертой координаты, принятой за временную; этот новый тип вселенной в остальных своих свойствах напоминает цилиндрический мир Эйнштейна.

-----  
\* Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. Dtsch. Akad. Berlin, 1917.

\*\* De-Sitter. On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1916—1917.

\*\*\* Под пространством будем подразумевать пространство, описываемое многообразием трех измерений, относя термин «мир» к пространству, описываемому многообразием четырех измерений.

\*\*\*\* Klein F. Ueber die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlichgeschlossenen Welt. Göttinger Nach., 1918.

\*\*\*\*\* См. этот термин у Эддингтона в книге «Espace, Temps et Gravitation», 2 Partie. Paris, 1921, p. 10 (см. перевод «Пространство, время, тяготение». Одесса, 1923).

2. Предположения, которые мы положим в основу наших соображений, распадутся на два класса. К первому классу относятся предположения, одинаковые с теми, которые делают Эйнштейн и Де-Ситтер и которые относятся к уравнениям, управляющим гравитационными потенциалами, и к характеру состояния и движения материи в пространстве. Ко второму классу относятся предположения об общем, так сказать, геометрическом характере нашего мира; из принятой нами гипотезы в виде частных случаев могут быть получены как цилиндрический мир Эйнштейна, так и шаровой мир Де-Ситтера.

Предположения первого класса следующие:

1) гравитационные потенциалы удовлетворяют системе уравнений Эйнштейна с так называемым «космологическим» членом, который может быть, в частности, равен нулю:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \pm \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (A)$$

где  $g_{ik}$  — гравитационные потенциалы,  $T_{ik}$  — тензор материи,  $\kappa$  — некоторая постоянная,  $R = g^{ik} R_{ik}$ , а тензор  $R_{ik}$  определяется равенством

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i\alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\}, \quad (B)$$

причем  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — суть мировые координаты, а  $\left\{ \begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix} \right\}$  — символ Кристоффеля второго рода \*;

2) материя находится в несвязанном состоянии и обладает взаимно относительным покоем; говоря менее строго, относительные скорости материи ничтожны сравнительно со скоростью света. При таких предположениях тензор материи  $T_{ik}$  определится равенствами

$$T_{ik} = 0, \text{ если } i \text{ и } k \text{ одновременно не равны } 4, \quad (C)$$

$$T_{44} = c^2 \rho g_{44},$$

где  $\rho$  — плотность материи и  $c$  — фундаментальная скорость; при этом, конечно, мировые координаты разделены на две группы:  $x_1, x_2, x_3$  названы пространственными координатами, а  $x_4$  — временной координатой.

3. Предположения второго класса, сводятся к следующему:

1) по выделении из четырех мировых координат трех пространственных ( $x_1, x_2, x_3$ ) мы будем иметь пространство постоянной кривизны, могущей, однако, меняться с течением четвертой временной координаты  $x_4$ . Интервал  $ds$  \*\*, определяемый равенством  $ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$ , может быть на-

\* Знак  $R_{ik}$  и скалярной кривизны  $R$  изменен на обратный сравнительно с обычными обозначениями этой величины.

\*\* A. E d d i n g t o n. Espace, Temps et Gravitation, 2 partie, Paris, 1921.

писан при помощи соответствующего изменения пространственных координат в следующем виде:

$$ds^2 = R^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + 2g_{14} dx_1 dx_4 + 2g_{24} dx_2 dx_4 + 2g_{34} dx_3 dx_4 + g_{44} dx_4^2,$$

где  $R$  есть функция только от  $x_4$ ,  $R$  пропорционален радиусу кривизны пространства; таким образом, радиус кривизны пространства может меняться с течением времени;

2) в выражении интервала  $g_{14}$ ,  $g_{24}$ ,  $g_{34}$  обращаются в нуль при соответствующим выборе временной координаты, иначе, кратко выражаясь, время ортогонально пространству. Это второе предположение не имеет, как мне кажется, в основе своей каких-либо физических или философских соображений и вводится исключительно в целях упрощения вычислений. Необходимо заметить, что миры Эйнштейна и Де-Ситтера являются частными случаями рассматриваемого предположения.

Предположения 1) и 2) дают нам возможность написать  $ds^2$  в виде

$$ds^2 = R^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + M^2 dx_4^2, \quad (D)$$

где  $R$  зависит только от  $x_4$ , а  $M$  является, вообще говоря, функцией всех четырех мировых координат. Вселенная Эйнштейна — частный случай, получаемый из формулы (D) заменой  $R^2$  на  $-R^2/c^2$  и  $M$  на 1, где  $R$  — постоянный (не зависящий от  $x_4$ ) радиус кривизны пространства. Вселенная Де-Ситтера получается, когда в формуле (D) заменим  $R^2$  на  $-R^2/c^2$ , а  $M$  на  $\cos x_4$ :

$$d\tau^2 = -\frac{R}{c^2} (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2, \quad (D_1)$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2} (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + \cos^2 x_1 dx_4^2. \quad (D_2)$$

4. Необходимо сказать еще несколько слов о тех интервалах, в которых заключены мировые координаты; иначе говоря, необходимо условиться, какие точки многообразия четырех измерений мы будем считать за различные. Не входя в более подробные пояснения, условимся пространственные координаты изменять в следующих интервалах:  $x_1$  — в интервале  $(0, \pi)$ ,  $x_2$  — в интервале  $(0, \pi)$ ,  $x_3$  — в интервале  $(0, 2\pi)$ ; что же касается временной координаты, то вопрос об интервале изменения ее оставим открытым, к нему мы вернемся в дальнейшем.

\* Придавая интервалу  $ds$  размер времени, мы обозначим его через  $d\tau$ ; в этом случае постоянная  $\kappa$  будет иметь размерностью длину, деленную на массу и в единицах CGS будет равна  $1,87 \cdot 10^{-27}$ . См. L a u e M. Die Relativität ästhetheorie, Bd. II, Braunschweig, 1921, S. 185.

## § 2

1. Пользуясь уравнениями (А) и (С) в предположении, что гравитационные потенциалы определяются равенством (D), и полагая, в уравнениях (А), что  $i = 1, 2, 3, k = 4$ , найдем

$$R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Эти равенства дают два случая: 1)  $R'(x_4) = 0$ ,  $R$  не зависит от  $x_4$  и является постоянной; назовем этот случай **стационарным миром** и 2)  $R'(x_4) \neq 0$ ,  $M$  зависит только от  $x_4$ ; назовем этот случай **нестационарным миром**.

Обращаясь сначала с стационарному миру, выпишем уравнения (А) для  $i, k = 1, 2, 3$  в предположении различных индексов; уравнения эти дадут нам такую систему формул:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} - \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} - \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} - \operatorname{ctg} x_2 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, найдем

$$M = A(x_3, x_4) \sin x_1 \sin x_2 + B(x_3, x_4) \sin x_1 + C(x_1, x_4), \quad (1)$$

где  $A, B, C$  — произвольные функции своих аргументов. Разрешая обычными приемами уравнения (А) относительно тензора  $R_{ik}$ , исключая из полученных и неиспользованных еще уравнений неизвестную плотность  $\rho$  и подставляя выражение (1) для  $M$  в эти уравнения, мы после длинных, но элементарных вычислений найдем, что для  $M$  возможны следующие два выражения:

$$M = M_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$M = (A_0 x_4 + B_0) \cos x_1, \quad (3)$$

где  $M_0, A_0, B_0$  — постоянные величины.

В случае, когда  $M$  равно постоянному числу, мы имеем для стационарного мира случай цилиндрического мира. При этом удобнее оперировать гравитационными потенциалами, получаемыми из формулы (D); определяя плотность и величину  $\lambda$ , получим известный результат Эйнштейна:

$$\lambda = \frac{c^2}{R^2}, \quad \rho = \frac{2}{\kappa R^2}, \quad M = \frac{4\pi^2}{\kappa} R,$$

где  $M$  — общая масса всего пространства.

\* Плотность  $\rho$  является у нас неизвестной функцией мировых координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

В другом возможном случае, когда  $M$  определяется из формулы (3), мы при помощи рационального изменения  $x_4$  \* приходим к шаровому миру Де-Ситтера, в котором  $M = \cos x_1$ ; пользуясь формулой  $(D_2)$ , найдем следующие соотношения Де-Ситтера:

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2}, \quad \rho = 0, \quad M = 0.$$

Таким образом, стационарный мир может быть или цилиндрическим миром Эйнштейна или сферическим миром Де-Ситтера.

2. Обратимся теперь к изучению другого возможного мира — нестационарного. В этом случае  $M$  есть функция только  $x_4$ ; соответственно изменяя  $x_4$ , мы можем без ограничения общности положить  $M = 1$ ; имея в виду большие удобства наших обычных представлений, напишем  $ds^2$  в форме, аналогичной  $(D_1)$  и  $(D_2)$ :

$$ds^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2. \quad (D_3)$$

Нашей задачей является определение  $R$  и  $\rho$  из уравнений (А). Очевидно, что уравнения (А), в которых значки различны, ничего не дадут; уравнения (А), в которых  $i = k = 1, 2, 3$ , дадут одно соотношение:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \quad (4)$$

а уравнение (А), в котором  $i = k = 4$ , даст равенство

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \kappa c^2 \rho, \quad (5)$$

причем

$$R' = \frac{dR}{dx_4}, \quad R'' = \frac{d^2R}{dx_4^2}.$$

Так как  $R' \neq 0$ , то интегрирование уравнения (4) после замены для удобства  $x_4$  на  $t$  даст нам уравнение

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{A - R + \frac{\lambda}{3c^3} R^3}{R}, \quad (6)$$

где  $A$  — произвольная постоянная. Из этого уравнения  $R$  получится путем обращения некоторого эллиптического интеграла, т. е. путем решения

\* Указанное изменение производится с помощью формулы:  $d\bar{x}_4 = \sqrt{A_0 x_4 + B_0} dx_4$ .

относительно  $R$  уравнения

$$t = \frac{1}{c} \int_a^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}} dx + B, \quad (7)$$

где  $B$  и  $a$  — постоянные; при этом, конечно, надо помнить об обычных условиях изменения знака у квадратного корня.

Уравнение (5) дает нам возможность определить  $\rho$  :

$$\rho = \frac{3A}{\kappa R^3} \quad (8)$$

через всю массу  $M$  пространства; постоянная  $A$  выразится равенством

$$A = \frac{\kappa M}{6\pi^2}, \quad (9)$$

принимая, что масса  $M$  — величина положительная, мы и для  $A$  получим положительное значение.

3. Изучение нестационарного мира основано на изучении уравнений (6) и (7); при этом, конечно, величина  $\lambda$  не определяется сама собой, и мы при изучении уравнений (6) и (7) будем предполагать, что  $\lambda$  может принимать любое значение. Определим те значения переменной  $x$ , при которых квадратный корень, входящий в формулу (7), может изменить свой знак. Ограничиваясь случаем положительного радиуса кривизны, нам достаточно рассмотреть значения для  $x$ , при которых подкоренное выражение обращается в нуль или бесконечность в интервале  $(0, \infty)$  для  $x$ , т. е. для положительных  $x$ .

Одно из значений  $x$ , при котором квадратный корень в формуле (7) обращается в нуль, есть значение  $x = 0$ ; другие значения  $x$ , при которых квадратный корень в формуле (7) может изменять свой знак, определяются при изучении положительных корней уравнения

$$A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3 = 0.$$

Обозначая  $\lambda/3c^3$  через  $y$ , построим семейство кривых третьего порядка в плоскости  $(x, y)$ , определяемое уравнением

$$yx^3 - x + A = 0, \quad (10)$$

где  $A$  — параметр семейства, меняющийся в интервале  $(0, \infty)$ . Кривые нашего семейства, показанные на рисунке, пересекают ось  $x$  в точке  $x = A$ ,  $y = 0$  и имеют максимум в точке

$$x = \frac{3A}{2}, \quad y = \frac{4}{27A^2}.$$

Рассмотрение чертежа показывает, что при отрицательных  $\lambda$  уравнение



$A - x + (\lambda/3c^3)x^3 = 0$  имеет один положительный корень  $x_0$ , лежащий в интервале  $(0, A)$ ; рассматривая  $x_0$  как функцию  $\lambda$  и  $A$ :

$$x_0 = \theta(\lambda, A),$$

найдем, что  $\theta$  — возрастающая функция от  $\lambda$  и возрастающая функция от  $A$ . Далее, если  $\lambda$  лежит в интервале  $(0, \frac{4}{9}(c^2/A^2))$ , то уравнение наше будет иметь два положительных корня:  $x_0 = \theta(\lambda, A)$  и  $x'_0 = \vartheta(\lambda, A)$ , причем  $x_0$  лежит в интервале  $(A, \frac{3}{2}A)$ , а  $x'_0$  — в интервале  $(\frac{3}{2}A, \infty)$ ;  $\theta(\lambda, A)$  будет возрастающей функцией как от  $\lambda$ , так и от  $A$ ;  $\vartheta(\lambda, A)$  будет убывающей функцией от  $\lambda$  и от  $A$ . Наконец, если  $\lambda$  больше  $\frac{4}{9}(c^2/A^2)$ , то наше уравнение не будет иметь положительных корней.

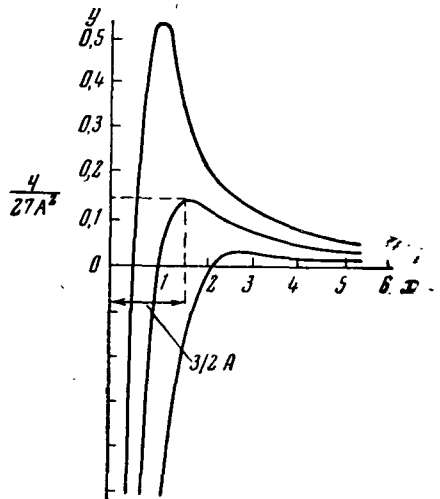
Приступая к исследованию формулы (7), сделаем одно замечание: пусть в начальный момент, т. е. при  $t = t_0$ , радиус кривизны равен  $R_0$ . В этот начальный момент квадратный корень, стоящий в формуле (7), будет иметь знак плюс или минус, смотря по тому, возрастает ли радиус кривизны с течением времени при  $t = t_0$  или нет. Изменяя время  $t$  на  $-t$ , мы всегда можем приписать этому квадратному корню знак плюс, иначе говоря, без ограничения общности, можем время выбрать так, чтобы радиус кривизны в рассматриваемый начальный момент  $t = t_0$  возрастал с течением времени.

4. Рассмотрим случай, когда  $\lambda > \frac{4}{9}(c^2/A^2)$ , когда, следовательно, уравнение  $A - x + (\lambda/3c^3)x^3 = 0$  не имеет положительных корней. В этом случае уравнение (7) переписывается следующим образом:

$$t - t_0 = \frac{1}{c} \int_{R_0}^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3}} dx, \quad (11)$$

причем, согласно замечанию, сделанному в конце предыдущего пункта, квадратный корень будет всегда положителен. Отсюда следует, что  $R$  будет возрастающей функцией от  $t$ ; на начальное значение радиуса кривизны  $R_0$  никаких в этом случае ограничений не налагается.

Так как радиус кривизны не может быть меньше нуля, то, уменьшаясь от  $R_0$  с уменьшением  $t$  согласно формуле (11), радиус кривизны через



некоторый промежуток времени  $t'$  дойдет до нуля. Пользуясь очевидной аналогией, будем называть промежуток времени, понадобившийся, чтобы радиус кривизны от 0 дошел до  $R_0$ , в р е м е н е м , п р о ш е д ш и м о т с о т в о р е н и я м и р а \*; этот промежуток  $t'$  определяется равенством

$$t' = \frac{1}{c} \int_0^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A-x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}} dx. \quad (12)$$

Условимся в дальнейшем рассматриваемый мир называть **мо н о т о н н ы м м и р о м п е р в о г о р о д а**.

Время, прошедшее от сотворения монотонного мира первого рода, рассматриваемое как функция  $R_0$ ,  $A$ ,  $\lambda$ , обладает следующими свойствами: 1) оно возрастает с увеличением  $R_0$ ; 2) оно убывает с увеличением  $A$ , т. е. с увеличением массы материи пространства; 3) оно убывает с увеличением  $\lambda$ . Если  $A > \frac{2}{3}R_0$ , то при любых  $\lambda$  время, протекшее от «сотворения мира», конечно, если  $A \leq \frac{2}{3}R_0$ , то всегда найдется такое характеристическое значение  $\lambda = \lambda_1 = \frac{4}{9}(c^2/A^2)$ , что с приближением  $\lambda$  к этой величине, время, прошедшее от «сотворения мира», будет беспрестанно возрастать.

5. Положим далее, что  $\lambda$  заключено в интервале  $(0, \frac{4}{9}(c^2/A^2))$ ; тогда начальное значение радиуса кривизны  $R_0$  может лежать в одном из трех интервалов:  $(0, x_0)$ ,  $(x_0, x'_0)$ ,  $(x'_0, \infty)$ . Если  $R_0$  лежит в интервале  $(x_0, x'_0)$ , то квадратный корень в формуле (7) имеет мнимое значение и пространство с такой начальной кривизной не может существовать. Случай, когда  $R_0$  лежит в интервале  $(0, x_0)$ , мы рассмотрим в следующем пункте, теперь же остановимся на третьем случае, когда  $R_0 > x'_0$  или  $R_0 > \vartheta(\lambda, A)$ . В этом случае рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем пункте, можно показать, что  $R$  будет **в о з р а с т а ю щ е й** **ф у н к ц и е й** **в р е м е н и**, причем  $R$  может меняться, начиная с  $x'_0 = \vartheta(\lambda, A)$ ; промежуток времени, прошедший с момента, когда  $R = x'_0$  до момента  $R = R_0$ , назовем временем, протекшим от «сотворения мира», и обозначим через  $t'$ ;

$$t' = \frac{1}{c} \int_{x'_0}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A-x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}} dx. \quad (13)$$

Условимся рассматриваемый мир называть **мо н о т о н н ы м м и р о м в т о р о г о р о д а**.

---

\* Время, прошедшее от сотворения мира, характеризует время, прошедшее от момента, когда пространство было точкой ( $R = 0$ ) до нынешнего его состояния ( $R = R_0$ ); это время может быть бесконечным.

6. Рассмотрим, наконец, случай, когда  $\lambda$  заключено в интервале  $(-\infty, 0)$ . В этом случае, если  $R_0 > x_0 = \theta(\lambda, A)$ , то квадратный корень в формуле (7) становится мнимым, и, следовательно, пространство с указанным радиусом кривизны не может существовать. Если  $R_0 < x_0$ , то рассматриваемый случай будет совершенно одинаков со случаем, опущенным при рассмотрении в предыдущем пункте. Итак, положим, что  $\lambda$  лежит в интервале  $(-\infty, \frac{4}{9}(c^2/A^2))$ , а  $R_0 < x_0$ . Обычными рассуждениями \* можно в этом случае показать, что  $R$  будет периодической функцией от  $t$  с периодом  $t_{\pi}$ , который мы назовем п е р и о д о м м и р а и который будет определен равенством

$$t_{\pi} = \frac{3}{c} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3}} dx, \quad (14)$$

причем радиус кривизны будет меняться от нуля до  $x_0$ . Условимся такого рода мир называть п е р и о д и ч е с к и м. Период периодического мира возрастает с возрастанием  $\lambda$ , стремясь к бесконечности, когда  $\lambda$  стремится к  $\lambda_1 = \frac{4}{9}(c^2/A^2)$ .

При малых  $\lambda$  период  $t_{\pi}$  определяется приближительной формулой

$$t_{\pi} = \frac{\pi A}{c}. \quad (15)$$

На периодический мир можно смотреть с двух точек зрения. Если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают пространственные координаты, а временные отличаются на целое число периодов, то радиус кривизны мира, увеличиваясь сначала от 0 до  $x_0$ , будет затем уменьшаться до нуля: тогда время существования мира будет конечным.

С другой стороны, если изменять время от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е. если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают не только их пространственные координаты, но и их временные координаты, то мы придем к действительной периодичности кривизны пространства.

7. Данные, которыми мы располагаем, совершенно недостаточны для каких-либо численных подсчетов и для решения вопроса о том, каким миром является наша вселенная; быть может, проблема причинности и проблема центробежной силы прольют свет на рассматриваемые здесь вопросы. Следует отметить, что в полученных нами формулах «космологическая» величина  $\lambda$  не определяется, являясь лишней константой задачи; быть

\* См., например, Weierstrass K. Ueber eine Gattung der reel periodischer Functionen. — Monatsber. Königl. Akad. Wiss., 1866, а также, Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen. — Z. Math. und Phys., 1902, 47. В нашем случае необходимо, конечно, внести некоторые видоизменения в рассуждения цитированных авторов; впрочем, периодичность в нашем случае устанавливается путем элементарного рассмотрения.

может, электродинамические соображения смогут определить эту величину. Полагая  $\lambda = 0$  и считая  $M$  равной массе  $5 \cdot 10^{21}$  наших Солнц, будем для периода мира иметь величину порядка 10 миллиардов лет.

Эти цифры могут иметь, конечно, лишь иллюстративное значение.

[Петроград, 29 мая 1922 г.]

## О ВОЗМОЖНОСТИ МИРА С ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ ПРОСТРАНСТВА <sup>19</sup>

### § 1

1. В заметке «О кривизне пространства» \* мы рассмотрели те решения космологических уравнений Эйнштейна, которые приводят к типам мира, обладающим в качестве общего признака постоянной положительной кривизной; при этом мы обсудили все возможные случаи. Однако возможность получить из космологических уравнений мир постоянной положительной кривизны находится в тесной связи с вопросом о конечности пространства. Поэтому представляет интерес посмотреть, можно ли получить из тех же уравнений мир с постоянной отрицательной кривизной, о конечности которого едва ли можно говорить даже при некоторых дополнительных предположениях.

В настоящей заметке будет показано, что из космологических уравнений Эйнштейна действительно можно получить мир с постоянной отрицательной кривизной. Как в упомянутой работе, так и здесь мы должны различать два случая, а именно: 1) случай стационарного мира, кривизна которого постоянна во времени, и 2) случай нестационарного мира, кривизна которого хотя и постоянна в пространстве, но меняется со временем. Между стационарными мирами с постоянной отрицательной и с постоянной положительной кривизной имеется существенное различие. Именно миры с отрицательной стационарной кривизной не допускают положительной плотности вещества; она должна быть или отрицательной, или нулевой. В соответствии с этим аналогом физически возможных стационарных миров (т. е. миров с неотрицательной плотностью вещества) является не мир Эйнштейна, а мир Де-Ситтера \*\*.

\* Friedman A. Z. Phys., 1922, 10, Lief., 6, 376; то же на русском языке: ЖРФХО, часть физич., 1924, 56, вып. 1, 59. См. стр. 229 настоящей книги.

\*\* На то, что возможность мира с отрицательной кривизной пространства требует особого исследования, мне указал мой друг проф. Я. Д. Тамаркин.

В заключение этой заметки мы коснемся вопроса о том, можно ли вообще судить о конечности или бесконечности пространства по его кривизне.

2. Обратимся к общим предположениям, которые мы будем разделять на те же два класса, что и в упомянутой выше работе; при этом мы сохраним наши старые обозначения. Предположения первого класса заключаются в том, что в качестве космологических уравнений Эйнштейна мы возьмем за основу уравнения (A), (B), (C) упомянутой работы. Второй класс предположений будет теперь отличаться от старого. Предположив, что одну из мировых координат  $x_4$  можно рассматривать как временную координату, мы можем придать (для рассматриваемого случая мира с отрицательной постоянной кривизной пространства) второму классу гипотез следующую формулировку: интервал  $ds^2$  должен иметь вид

$$ds^2 = \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2, \quad (D')$$

где  $R$  есть функция времени, а  $M$  — функция всех четырех мировых координат. Постоянная отрицательная кривизна пространства в нашем мире при этом пропорциональна  $-1/R^2$  \*.

Учитывая, что для нашего мира  $ds^2$  образует неопределенную форму, можно, изменив обозначения записать, формулу  $(D_1)$  в виде

$$d\tau^2 = - \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{c^2 x_3^2} + M^2 dx_4^2. \quad (D'')$$

Разумеется, пространственная кривизна нашего мира остается отрицательной и пропорциональной  $-1/R^2$ .

Наша задача состоит в том, чтобы найти две функции  $R$  и  $M$ , удовлетворяющие космологическим уравнениям Эйнштейна, т. е. уравнениям (A), (B) и (C) упомянутой заметки.

Полагая в (A)  $i = 1, 2, 3$  и  $k = 4$ , получим следующие три уравнения

$$R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Эти уравнения показывают, что рассматриваемые миры могут принадлежать одному из двух типов:

Тип 1. Стационарные миры,  $R' = 0$ ,  $R$  не зависит от времени.

Тип 2. Нестационарные миры,  $R' \neq 0$ ,  $M$  зависит только от времени.

Рассмотрим сперва случай стационарного мира; решение для нестационарного мира отрицательной кривизны имеет большое сходство с решением

---

\* Относительно линейного элемента см., например, Bianchi B. *Lezioni di geometria differenziale*, v. 1. Bologna, 1923, p. 345.

для нестационарного мира постоянной положительной пространственной кривизны; поэтому мы коснемся нестационарного случая совсем кратко.

## § 2

1. Уравнения (А) для индексов  $i, k = 1, 2, 3$  дают

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{x_3} \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{x_3} \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$M = \frac{P(x_1, x_4) + Q(x_2, x_4)}{x_3} + L(x_3, x_4), \quad (1)$$

где  $P, Q, L$  — произвольные пока функции своих аргументов.

Для определения  $P, Q$  и  $L$  воспользуемся уравнениями (А), полагая  $i, k = 1, 2, 3$ .

Вычисление дает

$$\begin{aligned} -\frac{1}{M} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\ -\frac{1}{M} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\ -\frac{1}{M} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} \right) + \frac{2}{x_3} \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial x_3} &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вычитая первое уравнение этой системы из второго, получаем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}.$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} P &= n(x_4)x_1^2 + a_1(x_4)x_1 + b_1(x_4), \\ Q &= n(x_4)x_2^2 + a_2(x_4)x_2 + b_2(x_4). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Учитывая (1) и (3), можно записать последнее из уравнений (2) в виде

$$-\frac{3 - \lambda R^2}{x_3^2} (P + Q) = \frac{4n}{x_3} + \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2} - \frac{2}{x_3} \frac{\partial L}{\partial x_3}. \quad (4)$$

Итак, если  $P + Q$  действительно содержит одну из величин  $x_1$  или  $x_2$ , т. е. если один из коэффициентов  $n, a_1, a_2$  отличен от нуля, то вследствие того, что правая сторона этого уравнения не зависит ни от  $x_1$ , ни от  $x_2$ , множитель при  $P + Q$  в уравнении (4) должен обращаться в нуль. Случай, когда обращаются в нуль все три величины  $n, a_1, a_2$ , следует рассматривать особо.

Таким образом, в случае, когда не все величины  $n$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  равны нулю, между  $\lambda$  и кривизной пространства существует соотношение

$$\lambda R^3 = 3. \quad (5)$$

С учетом (5) уравнения (2) сводятся к одному-единственному уравнению, определяющему функцию  $L$ , а именно:

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{L}{x_3} = 2n. \quad (6)$$

2. Ниже мы должны различать два случая: 1)  $n \neq 0$  и 2)  $n = 0$ . В первом случае, как показывают формулы (D<sub>1</sub>), (1), (3), можно без ограничения общности принять величину  $n$  равной единице; именно, применяя подстановку  $x_4 = \varphi(x_4)$ , всегда можно сделать  $n = 1$ . Учитывая это, получаем из (6)

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3} + x_3. \quad (7)$$

Чтобы определить  $\rho$ , положим в уравнениях (A)  $i = k = 4$ ; простое вычисление показывает, что в нашем случае  $\rho$  становится равным нулю. Следовательно, первый случай характеризуется нулевой плотностью вещества и интервалом

$$ds^2 = \frac{R^2}{x_3^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left[ \frac{(x_1^2 + x_2^2 + a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4) + x_3^2)}{x_3} \right]^2 dx_4^2. \quad (D_1^*)$$

Переходя ко второму случаю ( $n = 0$ ), находим для  $L$  уравнение

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3}. \quad (8)$$

И в этом случае вычисление дает для  $\rho$  нулевое значение. Таким образом, второй случай также характеризуется нулевой плотностью вещества и интервалом

$$ds^2 = \frac{R}{x_3^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left[ \frac{a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4)}{x_3} \right]^2 dx_4^2. \quad (D_2')$$

Наконец, рассмотрим случай, когда все три коэффициента  $n$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  обращаются в нуль, так что  $M$  не зависит от  $x_1$  и  $x_2$ .

Интегрируя (2), мы снова приходим к двум случаям:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lambda R^2 &= 3, & M &= \frac{M_0(x_4)}{x_3}, \\ 2) \quad \lambda R^2 &= 1, & M &= M(x_4), \end{aligned}$$

где  $M_0$  и  $M$  — произвольные функции своих аргументов. Интервал для первого случая есть частный случай формулы (D<sub>2</sub>); предыдущее вычисление показывает, что плотность вещества здесь равна нулю.

Второй случай \* приводит, как нетрудно убедиться, к плотности вещества, отличной от нуля. Чтобы решить, будет ли при этом плотность положительной или отрицательной, необходимо использовать тот вид интервала, который соответствует индефинитной квадратичной форме и выражается формулой (D"). Проводя вычисления с гравитационными потенциалами формулы (D"), убеждаемся, что в рассматриваемом случае  $M$  является функцией только  $x_4$ ; следовательно, можно, не нарушая общности, положить  $M = 1$  (для этого нужно лишь ввести вместо  $x_4$  координату  $x'_4 = \varphi(x_4)$ ). Вычисляя в этом предположении плотность  $\rho$ , находим

$$\lambda = -\frac{c^2}{R^2}, \quad \rho = -\frac{2}{\kappa R^2},$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2} \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2} + dx_4^2. \quad (D_3')$$

Таким образом, этот случай дает отрицательное значение  $\rho$ .

Резюмируя, можно сказать, что стационарный мир с постоянной отрицательной кривизной пространства возможен только при нулевой или отрицательной плотности вещества: интервал, соответствующий этому миру, выражается приведенными выше формулами (D<sub>1</sub>'), (D<sub>2</sub>') и (D<sub>3</sub>').

3. Обратимся теперь к случаю нестационарного мира. Заметим прежде всего, что  $M$  здесь есть функция только от  $x_4$ ; соображения, не раз проводившиеся ранее, показывают, что  $M$  можно приравнять единице. При этих предположениях мы без труда находим, что уравнения (A) для  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 4$  и для  $i \neq k$ ,  $i, k = 1, 2, 3$  удовлетворяются сами собой. Полагая в них  $i = k = 1, 2, 3$ , мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка, определяющее функцию  $R(x_4)$ , а именно:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^3} + \frac{1}{R^2} - \lambda = 0. \quad (9)$$

Это уравнение совершенно аналогично нашему прежнему уравнению (уравнение (4) цитированной работы); последнее переходит точно в (9), если положить  $c = 1$ . Следовательно, всю дискуссию уравнения (4) можно перенести на только что написанное уравнение. Поэтому мы не будем приводить подробностей, а вычислим лишь плотность вещества  $\rho$  для нестационарного мира.

Записывая для случая нестационарного мира интервал в виде (D"), мы получаем для  $R$  дифференциальное уравнение

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^3} - \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0.$$

\* На возможность этого случая мне указал В. Фок.



Интегрирование этого уравнения дает нам соотношение

$$\frac{R^2}{c^2} = \frac{A + R + \frac{\lambda}{3c^2} R^3}{R},$$

где  $A$  — произвольная постоянная. Вычисляя плотность вещества, получаем

$$\rho = \frac{3A}{\kappa R^3}. \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что при положительной постоянной  $A$  плотность вещества также положительна.

Отсюда следует возможность нестационарных миров с постоянной отрицательной кривизной пространства и с положительной плотностью вещества.

### § 3

1. Обратимся к обсуждению физического смысла результата, полученного в предшествующих параграфах. Мы убедились, что космологические уравнения Эйнштейна обладают решениями, соответствующими миру с постоянной отрицательной кривизной пространства. Этот факт указывает на то, что одних только космологических уравнений еще недостаточно, чтобы решить вопрос о конечности нашего мира. Знание кривизны пространства еще не дает нам непосредственных указаний на его конечность или бесконечность. Чтобы прийти к определенному заключению о конечности пространства, необходимо сделать некоторые дополнительные уточнения. В самом деле, мы называем пространство конечным, если расстояние между двумя произвольными несовпадающими точками не превышает некоторого положительного постоянного числа, какова бы ни была эта пара точек. Следовательно, прежде чем рассматривать проблему конечности пространства, мы должны еще условиться, какие точки этого пространства следует считать разными. Например, если мы будем рассматривать шар как поверхность трехмерного евклидова пространства, то точки, лежащие на одной параллели с разностью долгот в  $360^\circ$ , мы сочтем совпадающими; напротив, если бы мы рассматривали эти точки как различные, то получили бы многолистную сферическую поверхность в евклидовом пространстве. Расстояние между двумя произвольными точками на сфере не превосходит некоторого конечного числа; если же эту сферу понимать как бесконечно многолистную поверхность, то это расстояние можно сделать как угодно большим (сопоставляя соответствующим образом точки разным листам). Отсюда ясно, что прежде чем приступать к рассуждениям о конечности мира, необходимо уточнить, какие точки следует считать совпадающими и какие — различными.

2. В качестве критерия для несовпадения точек может служить наряду с прочими принцип «боязни привидений». Под этим мы подразумеваем аксиому: между двумя разными точками можно провести одну и только одну прямую (геодезическую) линию. Принимая этот принцип, уже нельзя считать разными две точки, соединяемые более чем одной прямой линией. Например, вследствие этого принципа два конца одного диаметра сферы не будут отличаться друг от друга. Разумеется, этот принцип исключает возможность привидений, так как привидение появляется в той же точке, что и производящий его прообраз.

Только что рассмотренная формулировка понятия совпадающих и несовпадающих точек приводит к представлению о том, что пространства с положительной постоянной кривизной являются конечными. Однако упомянутый критерий не позволяет сделать вывод о конечности пространств отрицательной постоянной кривизны. Это дает основание утверждать, что одних только космологических уравнений Эйнштейна, без дополнительных предположений, еще недостаточно для того, чтобы сделать вывод о конечности нашего мира.

*Петроград, ноябрь 1924 г.*

## МИР КАК ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ <sup>20</sup>

*«Однажды, когда ночь покрыла небеса своею епанчою, знаменитый французский философ Декарт, у ступенек домашней лестницы своей сидевший и на мрачный горизонт с превеликим вниманием смотрящий, — некий прохожий подступил к нему с вопросом: «Скажи, мудрец, сколько звезд на сем небе?» — «Мерзавец, — отвечивал сей, — никто необъятного обнять не может».*

*Сии с превеликим огнем произнесенные слова возымали на прохожего желаемое действие.*

[Гисторические материалы Федота Кузьмича Пруткова (деда)]

1. В только что приведенном разговоре Декарта с прохожим прохожий «вразумился» и успокоился. Но на самом деле в человеческой истории стремление «счесть звезды», иначе говоря, построить картину мира, никогда не давало людям покоя, и, как бы ничтожна ни была сумма людских знаний, всегда находились среди мыслящего человечества и любопытные прохожие и более, нежели Декарт, обходительные мудрецы, пытающиеся на

основании постоянно ничтожных научных данных воссоздать картину мира.

В XX в. человек попытался снова, на основании тех сведений о мире, которые естествознание ко времени нашей эпохи накопило, создать общую картину мира, правда, мира чрезвычайно схематизированного и упрощенного, напоминающего настоящий мир лишь постольку, поскольку тусклое отражение в зеркале схематического рисунка Кельнского собора может напомнить нам сам собор. Эта попытка «счесть звезды» и создать общую картину мира носит мало соответствующее название принципа относительности.

2. Мир, схематическая картина которого создается принципом относительности, есть мир естествоиспытателя, есть совокупность лишь таких объектов, которые могут быть измерены или оценены числами, поэтому этот мир бесконечно уже и меньше мира — вселенной философа; а раз это так, то, конечно, и значение принципа относительности для философии не должно быть переоцениваемо. Вероятнее всего, что значение принципа относительности для философии не больше, чем значение для нее космогонических гипотез современной астрономии. Но из сказанного не следует делать и другого крайнего вывода и отрицать начисто для философии схемы мира, даваемой принципом относительности. Грандиозный и смелый размах мысли, характеризующий общие концепции и идеи принципа относительности, затрагивающие такие объекты, как пространство и время (правда, измеримое), несомненно, должен произвести известное впечатление, если даже не влияние, на развитие идей современных философов, часто стоящих выше «измеримой» вселенной естествоиспытателя.

3. Указанное побуждает меня считать, что действительное ознакомление с идеями принципа относительности на страницах философского журнала \* быть может и не явится излишним; говоря о действительном ознакомлении, я противопоставляю подобное ознакомление разнообразным попыткам популяризовать совершенно не поддающийся популяризации принцип относительности; эта популяризация достигается или ценой полного затемнения идей, лежащих в основе принципа относительности, или же, что, пожалуй, еще хуже, ценой извращения этих идей. Из сказанного видно, что изложение настоящей статьи ни в каком случае не претендует быть популярным и требует, что совершенно необходимо по существу дела, основательного знания, по крайней мере элементов высшей математики.

4. Я разделил настоящую статью на три главы. Первая глава посвящена учению об общих свойствах пространства. Для простоты рассматривается пространство трех и даже часто двух измерений, но все выводы могут быть путем простых, хотя иногда и не строгих аналогий, распространены

\* Эта статья предназначалась для журнала «Мысль».

на пространство любого числа измерений, в том числе и на пространство четырехмерное. Эту главу я начинаю с разбора вопроса об оценке и измерении, вопроса, весьма важного для правильного понимания многих концепций теории относительности. Излагая далее основные свойства геометрического пространства (метрика, направление, угол, параллельное перемещение, прямая, вектор кривизны и т. п.), я подробно останавливаюсь на вопросе интерпретации геометрического пространства с помощью пространства физического; указывая на произвольность этой интерпретации, я устанавливаю вместе с тем, какой смысл приобретает вопрос экспериментального исследования свойств нашего пространства; следует отметить, что этот вопрос не имеет, конечно, никакого смысла, раз упомянутая интерпретация не установлена.

Вторая глава трактует об одном из труднейших вопросов теории относительности, а именно о вопросе времени: о невозможности самостоятельного существования времени и пространства в отдельности и об объединении их в четырехмерный физический мир, который может определенным способом интерпретировать мир геометрический. Само собой разумеется, что в указанной главе рассматривается не время философов, а скромное «измеримое» время естествоиспытателей. Особое внимание обращено на подробное выяснение полного произвола установления этого «измеримого» времени.

Мир, т. е. соединение пространства и времени, разобран во второй главе с достаточной подробностью; большое внимание уделено мною вопросу о постулате инвариантности, дающем правильную идею при установлении физических законов нашего мира. Постулат вещественности и связанные с ним вопросы причинности тоже подвергнуты достаточно подробному рассмотрению. Не меньшее внимание уделено разнице физического и геометрического мира и произвольности интерпретации одного мира другим. Заметим, что историческое соединение пространства и времени в четырехмерный мир произошло при помощи так называемого специального принципа относительности; логически специальный принцип относительности можно без особого ущерба для дела оставить почти целиком в стороне. Я так и поступлю, имея в виду, что этот принцип относительности не раз с достаточной подробностью освещался как в общей, так и в специальной научной литературе.

Третья глава будет содержать в себе описание методов, при помощи которых принцип относительности пытается построить картину мира. Эту главу я начинаю с изложения общих основ старой и новой механики и главным образом с установления закона инерции, имеющего место в новой общей механике. Затем я перехожу к изложению ряда гипотез, при помощи которых Эйнштейн связал вопрос о силе тяготения с вопросом геометрии мира; экспериментальные подтверждения этих гипотез служат свидетельством правильности их, по крайней мере в общих чертах.

Связь тяготения со свойствами нашего мира является одной из блестя-

щих идей Эйнштейна, хотя генезис этой идеи восходит к более отдаленным временам, а именно, ко времени появления известной работы Римана. Германский математик Weyl, исходя из концепций Римана, пользуясь идеями Hilbert'a и обобщая и расширяя идеи Эйнштейна, предположил, что между свойствами материи, заполняющей мир, и свойствами мира точно так же имеет место теснейшая связь, позволяющая, экспериментируя с материей, установить более детально свойства нашего мира; идеям Weyl'a я считаю нужным отвести соответствующее место в третьей главе.

Конец третьей главы будет посвящен вопросу об общем устройстве нашей (само собою разумеется, материальной) вселенной. Как бы ни были шатки наши соображения, касающиеся этой области, но обширность задачи заставляет отнестись к ним с необычайным интересом. Этот вопрос о вселенной я считаю особо необходимым осветить с должной подробностью, так как, благодаря «моде» на принцип относительности и большому количеству популярных книг и лекций, трактующих об этом принципе, не только в «обществе», но и в более узких специальных кругах распространены совершенно превратные сведения о конечности, замкнутости, кривизне и т. п. свойствах нашего пространства, которые будто бы устанавливаются принципом относительности.

5. Дабы избежать образования у читателя неправильного представления о настоящей статье, автор ее должен предупредить, что он ни в какой мере не философ и к изложению принципа относительности приступает с чисто математической точки зрения. Весьма возможно, что это единственная точка зрения, с которой можно более или менее ясно представить себе основания принципа относительности.

Бесполезно подробно указывать литературу по тем или иным вопросам принципа относительности, так как популярная литература ничего не разъясняет, а специальная требует для правильного понимания своего огромного математического аппарата. Укажу все же несколько специальных книг и статей, посвященных принципу относительности\*.

---

\* Weyl H. Raum — Zeit — Materie. Berlin, 1921.

Zauе M. Die Relativitätstheorie, Zweites Band. Braunschweig, 1921.

Eddington A. Espace, Temps et Gravitation. Paris, 1921.

Hilbert D. Die Grundlagen der Physik. — Göttingen Nachrichten, 1916.

## Глава I

## ПРОСТРАНСТВО

«Вся мерок и числом сотвори еси».

(Книга Премудрости Соломоновой.  
гл. XI, стих 21)

## § 1. Измерение величин

1. Рассматривая различные свойства, присущие объектам материального мира, мы можем сгруппировать эти свойства в особые классы, относя к одному классу свойства, обладающие каким-либо общим признаком. Свойства, отнесенные к одному классу, образуют *многообразие*, которое может обладать той или иной мощностью, иначе говоря, может быть в большинстве случаев приведено в одно-однозначное соответствие или с многообразием целых чисел, или с многообразием всех чисел, или с многообразием пар, троек и т. п. всех чисел. Каждому свойству данного класса будет отвечать одно и только одно число (или одна и только одна пара чисел, или одна и только одна тройка чисел и т. п.) числового многообразия и обратно. Установление правил, пользуясь коими можно по данному свойству класса отыскивать соответствующее ему число (или пару или тройку чисел) и по данному числу (или по данной паре или тройке и т. п. чисел) отыскивать отвечающее ему (им) свойство класса, назовем ради краткости *арифметизацией* данного класса.

Приведем пару простейших примеров. Люди обладают свойством иметь пол; сопоставим свойству человека быть женщиной число 0, а свойству человека быть мужчиной число 1; установление этого правила дает нам арифметизацию данного класса свойств. Все материальные тела обладают свойством иметь объем; определяя объем обычными приемами в кубических метрах, найдем правило сопоставления чисел с объемами данных объектов, иначе говоря, получим арифметизацию класса объемов.

2. Арифметизация данного класса свойств может производиться всегда совершенно произвольно. Пусть, однако, свойства данного класса будут таковы, что к ним можно будет применить понятие больше или меньше (соответственно, конечно, определенные); свойства такого класса условимся называть *интенсивностями*. Если арифметизация данного класса произведена так, что большей интенсивности отвечает большее число, то такая арифметизация называется *оценкой*. Степень познания учащихся есть интенсивность (предполагается, что мы умеем определять большую или меньшую степень познания); пяти- или двенадцатибалльная система отметок есть арифметизация класса *степени познания учащихся*, названная нами *оценкой*.

Само собой разумеется, что всякий класс свойств станет классом интенсивностей, коль скоро мы определим, так или иначе, понятие больше

или меньше в приложении к свойствам данного класса. Большинство свойств, нами изучаемых, относится непосредственно к разряду интенсивностей, так как при самом определении данного класса свойств уже устанавливается понятие больше или меньше в приложении к свойствам этого класса. Иногда, однако, свойства представляются в таком виде, что перевод их в разряд интенсивности требует дополнительных определений; примером может служить свойство монохроматического луча иметь цвет; с первого взгляда кажется явно бессмысленным считать цвет интенсивностью, однако введя дополнительное определение, мы можем считать, что тот цвет больше, который имеет большую длину волны; коль скоро определение это будет введено, цвет станет интенсивностью и нетрудно будет арифметизировать этот класс свойств так, чтобы арифметизация стала бы оценкой. Итак, перевод класса свойств в разряд класса интенсивностей целиком зависит от наших определений и, следовательно, от нашего произвола. Вопросов целесообразности применения термина интенсивности к тому или иному свойству я, конечно, не касаюсь.

3. Среди интенсивностей выделяется исключительная группа, обладающая характерными свойствами, позволяющими производить особую оценку (арифметизацию), называемую *измерением*. Пусть  $A_1, A_2, A_3, \dots$  будут интенсивностями данного класса  $A$ ; так как мы имеем дело с интенсивностями, то у нас имеется определение того, что означает суждение:  $A_1$  меньше  $A_2$ . Положим, что для интенсивностей класса  $A$  мы так или иначе определим понятие о трех равноотстоящих интенсивностях; при этом под тремя равноотстоящими интенсивностями будем подразумевать такие интенсивности  $A_1, A_2, A_3$ , что  $A_1$  настолько меньше  $A_2$ , насколько  $A_2$  меньше  $A_3$ . Условимся интенсивности класса  $A$ , к которым применимо понятие о равноотстоящих интенсивностях (так или иначе нами определенное), называть *измеримыми интенсивностями*.

Само собой разумеется, что введением соответствующего определения можно любой класс интенсивностей сделать классом измеримых интенсивностей; подобно тому, как это имело место для перевода свойств в разряд интенсивностей, и в настоящем случае могут представиться две возможности: или, при самом установлении какого-либо класса интенсивностей, будет дано определение понятия о равноотстоящих интенсивностях, и тогда мы с самого начала будем иметь дело с измеримыми интенсивностями; или при установлении класса интенсивностей понятие о равноотстоящих интенсивностях определено не будет; в таком случае данный класс интенсивностей мы можем перевести в разряд измеримых лишь после дополнительного введения упомянутого понятия о равноотстоящих интенсивностях. Примером интенсивности, с самого установления своего являющейся интенсивностью измеримой, может служить объем материального тела или длина отрезка прямой; в самом деле, устанавливая понятие об объеме или о длине отрезка прямой, мы с самого начала даем

определение того, что́ следует понимать под бoльшим объемом или бoльшей длиной, а также что́ следует понимать под тремя равноотстоящими длинами трех отрезков. Наоборот, интенсивность степени познания учащихся с самого установления своего не является измеримой, и до сего времени определение понятия равноотстоящих степеней познания учащихся не установлено.

4. Произведем арифметизацию (оценку) класса измеримых интенсивностей, но эту оценку произведем таким образом, чтобы последовательные разности чисел, отвечающих любым трем равноотстоящим интенсивностям, были бы равны между собой; иначе говоря, если  $a_1, a_2, a_3$  суть числа, отвечающие при оценке трем равноотстоящим и увеличивающимся интенсивностям  $A_1, A_2, A_3$ , то  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ .

Подобного рода оценку класса измеримых интенсивностей будем называть измерением. Мы видели, что арифметизацию данного класса свойств можно произвести совершенно произвольным образом; в оценке данного класса интенсивностей произвол несколько меньше, но все же еще чрезвычайно значителен. Посмотрим, какой произвол может быть допущен при измерении данного класса измеримых интенсивностей. Пусть данный класс  $A$  измеримых интенсивностей измерен двумя различными способами: при первом способе измерения интенсивностям  $A_1, A_2, A_3 \dots$  отвечают числа  $a_1, a_2, a_3 \dots$ , при втором — числа  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \dots$ . Из свойств арифметизации следует, что  $\bar{a} = f(a)$ , где  $f$  — определенная однозначная функция  $a$ . Если  $A_1, A_2, A_3$  — три какие-либо равноотстоящие величины, то по основному свойству  $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$  и одновременно  $\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = \bar{a}_2 - \bar{a}_1$ ; таким образом, при  $a_2 = (a_3 + a_1)/2$  имеет место равенство  $\bar{a}_2 = (\bar{a}_3 + \bar{a}_1)/2$ , но так как  $\bar{a} = f(a)$ , то мы будем иметь

$$f(a_2) = \frac{f(a_3) + f(a_1)}{2}$$

или

$$f\left(\frac{a_3 + a_1}{2}\right) = \frac{f(a_3) + f(a_1)}{2}$$

при всех  $a_1, a_3$ ; заменяя  $a_1$  на  $x$ ,  $a_3$  на  $y$ , найдем, что при всех  $x$  и  $y$  будет иметь место функциональное соотношение

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}. \quad (1)$$

Можно доказать, что решение функционального уравнения (1) представится в виде

$$f(a) = \mu a + h,$$

где  $\mu$  и  $h$  — постоянные числа.



Найденное выражение для  $f(a)$ , очевидно, удовлетворяет уравнению (1):

$$\mu \frac{x+y}{2} + h = \frac{1}{2} (\mu x + h + \mu y + h) = \frac{1}{2} \mu (x+y) + h.$$

Таким образом, мы нашли общий вид  $f(a)$ , позволяющий от одного способа измерения переходить к другому:

$$\bar{a} = f(a) = \mu a + h. \quad (2)$$

Эта общая формула перехода от одного способа измерения к другому содержит в себе две постоянные. Постоянная  $h$  характеризует собой произвольность начального значения, иначе говоря, произвольность той интенсивности, которая отвечает нулевому значению измеряющего ее числа.

Постоянная  $\mu$  характеризует собой произвольность *единицы измерения*, иначе говоря, произвольность тех двух интенсивностей, разность чисел, измеряющих которые, равняется единице. Задав начальное значение и единицу измерения, мы, как легко видеть, определим вполне и единственным образом обе постоянные  $\mu$  и  $h$ , входящие в формулу (2), иначе говоря, определим единственным образом измерение интенсивностей данного класса. В самом деле, пусть интенсивность  $A_0$  класса  $A$  есть начальное значение (т.е. при измерении должна отвечать нулю) и пусть интенсивности  $A_1$  и  $A_2$  определяют собой единицу измерения (т.е. пусть при измерении разность чисел, измеряющих  $A_1$  и  $A_2$ , будем равна единице). Произведем каким-либо образом измерение класса  $A$ ; положим, что при этом измерения интенсивностям  $A_0, A_1, A_2$  будут отвечать числа  $a_0, a_1, a_2$ , тогда искомое измерение дает нам числа  $\bar{a}$ , связанные с полученными при введенном измерении числами  $a$  соотношением (2). Нам остается подобрать  $\mu$  и  $h$  так, чтобы  $\bar{a}_0 = 0, \bar{a}_2 - \bar{a}_1 = 1$ , иначе говоря, так, чтобы удовлетворялись равенства

$$\mu a_0 + h = 0, \quad \mu (a_2 - a_1) = 1,$$

откуда

$$\mu = \frac{1}{a_2 - a_1}, \quad h = -\frac{a_0}{a_2 - a_1}.$$

5. В обычной практике измерений мы чрезвычайно часто сталкиваемся с произволом единицы измерений и гораздо реже с произволом начального значения, что проистекает вследствие практического удобства выбирать за начальное значение такую интенсивность данного класса, которая обладает некоторыми особыми свойствами. Так, например, при измерении длины отрезка за начальное значение всегда берут длину отрезка прямой между совпадающими точками (длину точки), тогда как за единицу измерения берут самые разнообразные разности длин (аршины, футы, метры и т. п.).

Существует, однако, интенсивность, в которой практикой узаконено большое разнообразие начальных значений; эта интенсивность — температура. В самом деле, для измерения температуры в градусах Цельсия и Реомюра за начальное значение мы берем температуру тающего льда, тогда как при измерении температуры в градусах Фаренгейта мы приписываем температуре тающего льда число 32, а при измерении температуры в градусах абсолютной шкалы — число 273. Само собой разумеется, что и единица измерения температуры меняется: так, для градусов Цельсия мы имеем, что разность чисел, отвечающих температурам паров кипящей воды и тающего льда, будет равна 100, а для градусов Реомюра это число определяется всего в 80.

6. Я остановился столь подробно на вопросе об измерении по двум причинам. С одной стороны, нам непрерывно в дальнейшем придется противопоставлять процесс простой арифметизации процессу измерения, а с другой стороны, в вопросе измерения, столь простом по существу, замечается значительная недоговоренность во многих курсах механики и физики, ставших классическими; установить большую определенность в этом вопросе и вместе с тем показать, сколь большой произвол имеет место при установлении измерения, и было моей задачей \*.

Итак, всякий класс свойств может быть арифметизирован. Если свойства эти делаются (путем нашего определения) интенсивностями, то мы можем не только арифметизировать их, но и оценить их числами; наконец, если интенсивности данного класса делаются (опять таки путем нашего определения) измеримыми интенсивностями, то мы можем не только оценить их числами, но измерить; измерение будет включать в себя известный произвол, который устраняется, если мы установим начальное значение и единицу измерения.

## § 2. Арифметизация пространства

1. Геометрическое пространство, или просто пространство, есть совокупность вещей, называемых точками, линиями, поверхностями, углами, расстояниями и т. п., стоящих между собой в определенных отношениях, устанавливаемых системой аксиом и вытекающими из этих аксиом теоремами\*\*. Геометрическому пространству может отвечать физическое материальное пространство в том смысле, что каждой вещи геометрического пространства может соответствовать какой-либо образ пространства физического; соответствие физического пространства геометрическому может быть осуществлено весьма многообразными и часто фантастическими способами —

\* См. прекрасную статью R u n g e. Maass und Messen. — *Encycl. Math. Wissenschaften*, Bd. 5, 1904.

\*\* Hilbert D. Grundlagen der Geometrie. 1912.

достаточно вспомнить многообразные интерпретации так называемых неевклидовых геометрий, интерпретации, оперирующие с простейшими физическими образами. Мы увидим ниже, что и теория относительности есть тоже грандиозная интерпретация геометрического пространства четырех измерений, интерпретация, оперирующая уже не с простыми, а с весьма сложными физическими образами. Необходимо здесь же указать, что физическое пространство есть пространство материальное, что все образы пространства геометрического интерпретируются в физическом пространстве или материальными объектами, или же материальными действиями с ними.

Точки нашего (трехмерного) пространства обладают все свойством иметь определенное положение в пространстве, иначе говоря, могут отличаться друг от друга. Арифметизируем этот класс свойств, приписав каждой точке пространства определенную тройку чисел; каждой тройке чисел будет отвечать одна и только одна точка пространства. Подобную арифметизацию назовем ради краткости арифметизацией пространства. Процесс арифметизации пространства совершенно произволен; выбор упомянутых троек чисел ничем наперед неограничен. Установим, каким образом, выбрав один способ арифметизации пространства, мы можем перейти к какому-либо другому способу арифметизации. Пусть в первом случае точке  $P$  пространства отвечала тройка чисел  $x_1, x_2, x_3$ ; пусть во втором способе той же точке  $P$  пространства будет отвечать другая тройка чисел  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ; тогда, очевидно, что по первой тройке можно будет определить вторую тройку. Сделав подобное определение для всех точек  $P$ , будем иметь соотношения

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}\tag{3}$$

Тройки чисел, при помощи которых мы арифметизируем пространство, называются координатами (обобщенными); переход от одного способа арифметизации пространства к другому называется преобразованием координат.

2. Весьма важно с должной ясностью представить себе полный произвол арифметизации пространства и не связывать арифметизацию пространства с установлением определенной обычной системы координат, например прямоугольных, прямолинейных, полярных или вообще криволинейных координат. В самом деле, установление той или иной системы координат требует уже знания известных свойств вещей, составляющих пространство; так, например, установление прямоугольных прямолинейных координат требует знания прямой линии, свойств перпендикулярности и длины прямолинейного отрезка, следовательно, требует целого ряда аксиом

и вытекающих из них свойств. Между тем арифметизация пространства не требует детального знания его свойств и может быть произведена без того, чтобы наперед установить характер пространства. На прилагаемых рисунках (рис. 1 и 2) произведена арифметизация пространства (для простоты пространство взято двумерным) двумя разными способами, причем около каждой точки написана пара цифр, ей отвечающих (для первого и второго способов арифметизации); нетрудно путем испытания установить,

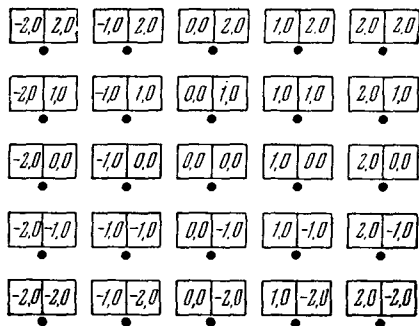


Рис. 1

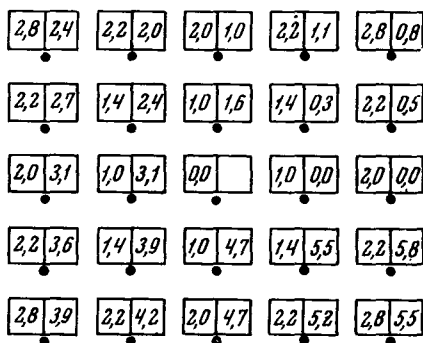


Рис. 2

что переход от первой арифметизации  $(x_1, x_2)$  ко второй  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  совершается по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & x_1 &= \bar{x}_1 \cos \bar{x}_2, \\ \bar{x}_2 &= \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & x_2 &= \bar{x}_1 \sin \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Формулы эти характеризуют обычный переход от прямоугольных прямолинейных координат к полярным на плоскости\*.

3. Физическое пространство, отвечающее геометрическому, становится арифметизированным вместе с этим последним. По выполнении арифметизации около каждой «точки» физического пространства выставляется

\* Следует отметить, что вводимый нами способ арифметизации плоскости, сводящийся к применению полярных координат, имеет в одной из точек (именно, в так называемом начале координат) особенность. Действительно, в точке  $x_1 = 0, x_2 = 0$  формулы, определяющие переход от  $x_1, x_2$  к  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , не дают определенного значения для  $\bar{x}_2$ ; предположение, которое мы сделали на рис. 2, положив (в целях большей определенности) для указанной точки  $\bar{x}_2 = 0$ , имеет весьма существенные недостатки, связанные с понятием непрерывности. Подробнее на этом обстоятельстве останавливаться здесь не представляется возможным.

«доска» с написанными на ней тремя числами, отвечающими этой точке. Мы так свыклись с этой арифметизацией физического пространства, что совершенно не вдумываемся и не замечаем ни ее сущности, ни ее произвола. Между тем названия или нумерация улиц, домов, этажей, квартир являет собой пример арифметизации физического пространства, поражающий своим произволом (особенно в наших уездных городах и в Москве); точно так же верстовые столбы и межевые или триангуляционные знаки также являются арифметизацией части физического пространства нашей Земли; еще более полно арифметизация отражается на градусной системе географических карт.

Следует отметить, что арифметизация пространства не имеет ничего общего ни с измерением, ни даже с оценкой, так как мы не определяем, что означает понятие больше или меньше в приложении к положению точки в пространстве.

4. Устанавливая вещи, составляющие пространство, и выясняя их взаимные отношения, мы можем разделить свойства вещей пространства на два разряда. Одни будут целиком зависеть от избранной (всегда по нашему произволу!) арифметизации пространства, другие останутся неизменными, как бы мы ни арифметизировали пространство. Первые вещи и свойства условимся называть *несобственными*, вторые — *собственными*. Изучая в геометрическом или физическом пространстве несобственные его свойства, мы, в сущности говоря, будем исследовать данный способ арифметизации пространства, и только когда мы перейдем к собственным свойствам, только тогда мы будем изучать пространство, как таковое, вне зависимости от произвольно установленной нами его арифметизации. Из сказанного понятно, насколько важно для нас установление собственных вещей и их свойств в пространстве. Не следует, однако, думать, что изучение несобственных вещей и свойств есть ненужный балласт и ошибка; без знания сферической астрономии невозможно было бы устанавливать законы движения небесных тел, а между тем сферическая астрономия имеет предметом своим как раз несобственные свойства физического звездного пространства, определенным образом арифметизированного.

Собственные свойства пространства могут быть выражены суждениями, форма которых не изменяется при переходе от одной арифметизации пространства к другой, по формулам (3). Этого рода обстоятельство выражают словами, что собственные свойства пространства *инвариантны* по отношению к преобразованиям координат по формулам (3). Мы увидим в дальнейшем, каким образом на наших формулах и рассуждениях отразится указанная инвариантность собственных свойств пространства.

5. После того как пространство тем или иным способом арифметизировано, нетрудно аналитически определить кривую или поверхность

пространства. Кривой будет называться совокупность точек, для которых координаты определяются равенствами

$$x_1 = \varphi_1(u), \quad x_2 = \varphi_2(u), \quad x_3 = \varphi_3(u), \quad (4)$$

поверхностью будет называться совокупность точек, для которых координаты определяются равенствами

$$x_1 = \psi_1(u, v), \quad x_2 = \psi_2(u, v), \quad x_3 = \psi_3(u, v), \quad (5)$$

причем  $u, v$  являются произвольными параметрами (переменными). Исключая из равенства (4) параметр  $u$ , получим уравнения кривой в виде двух равенств:

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Исключая из равенств (5) параметры  $u, v$ , получим уравнение поверхности в виде равенства  $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ ; из только что сказанного ясно, что две поверхности пересекаются по кривой и что всякая кривая есть пересечение двух поверхностей.

Таким образом, установление понятий о кривой и о поверхности требует лишь арифметизации пространства, но не требует знания никаких свойств пространства; вместе с тем очевидно, что вид уравнений (4) и (5) существеннейшим образом зависит от способа арифметизации пространства. Возвращаясь к арифметизации пространства, указанной на рис. 1 и 2, мы видим, что кривая

$$x_1 = 1, \quad x_2 = u$$

и кривая

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = u$$

различны (первая в обычной геометрии — прямая, вторая — окружность). Нетрудно видеть, что свойство кривой содержать в себе некоторую точку пространства (проходить через точку) есть свойство собственное, точно так же свойство поверхности содержать в себе некоторую кривую (проходить через кривую) есть свойство собственное, инвариантное по отношению к преобразованию координат.

### § 3. Метрика пространства

1. Двум любым точкам пространства  $P$  и  $P'$  сопоставляется особое число, называемое расстоянием этих точек. Так как это число вполне определяется, коль скоро дано положение точек  $P$  и  $P'$ , т. е. их координаты:

$$(x_1, x_2, x_3) \text{ и } (x'_1, x'_2, x'_3),$$

то расстояние двух точек  $P$  и  $P'$  будет функцией указанных шести чисел (двух троек чисел); обозначая число, выражающее расстояние двух точек  $P$  и  $P'$  символом  $(P, P')$ , будем иметь

$$(P, P') = D(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3), \quad (6)$$

при этом мы будем считать расстояние инвариантным свойством двух точек; функция  $D$  будет, само собой разумеется, зависеть от выбора координат, т. е. от способа арифметизации пространства. Если при выбранной арифметизации пространства нами устанавливается функция  $D$ , то мы говорим, что метрика пространства определена; само собой ясно, что, определив метрику для одной системы координат, нетрудно уже при помощи формул (3) определить метрику для любого другого способа арифметизации пространства.

Обращаясь к рис. 1 и 2, определим для первого способа арифметизации двумерного пространства расстояние точек

$$P(x_1, x_2) \text{ и } P'(x'_1, x'_2)$$

следующим образом:

$$(P, P') = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2},$$

тогда для второго способа арифметизации двумерного пространства будем иметь

$$(P, P') = \sqrt{\bar{x}'^2_1 + \bar{x}^2_1 - 2\bar{x}'_1 \bar{x}_1 \cos(\bar{x}'_2 - \bar{x}_2)}.$$

Обе эти формулы дают нам наше обычное (евклидово) расстояние двух точек в прямоугольных прямолинейных и в полярных координатах.

2. Трудность изучения расстояния двух точек зависит прежде всего от большого числа переменных, входящих в функцию  $D$ . Чтобы упростить изучение расстояний, рассмотрим расстояния точек  $P'$ , близких к точке  $P$ , от этой самой точки и посмотрим, как в этом случае выразится функция  $D$ ; мы увидим, что в рассматриваемом случае, когда  $P'$  близко к  $P$ , выражение расстояния этих точек будет как-то зависеть от координат точки  $P$  и весьма просто \* зависеть от очень малых (бесконечных малых) разностей координат точек  $P'$  и  $P$ . Предварительно, однако, введем в рассмотрение не расстояние точек  $P'$  и  $P$ , а квадрат этого расстояния и ограничимся не тремя, а всего лишь двумя координатами \*\*:

$$(P, P')^2 = D^2 = \Delta(x_1, x_2; x'_1, x'_2).$$

\* В первом приближении, конечно.

\*\* Этот переход к двумерному пространству делается нами исключительно в целях упрощения.

Чтобы определить функцию  $D$  или  $\Delta$ , нам, конечно, необходимо установить известные ограничения, которые мы наложим на понятие расстояния; ограничения эти, само собой разумеется, будут играть роль аксиом в той системе геометрии, которую мы развиваем. Итак, положим, что расстояние точек  $(P, P')$  будет обладать следующими свойствами:

1) расстояние не зависит от порядка следования точек:

$$(P, P') = (P', P), \quad \Delta(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = \Delta(x'_1, x'_2; x_1, x_2);$$

2) расстояние двух совпадающих точек (точек с одинаковыми координатами) равно нулю:

$$(P, P) = 0, \quad \Delta(x_1, x_2; x_1, x_2) = 0;$$

3) квадрат расстояния двух достаточно близких точек разлагается в ряд Тейлора по степеням разностей координат этих точек:

$$\Delta(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = g_0 + g_1(x'_1 - x_1) + g_2(x'_2 - x_2) + g_{11}(x'_1 - x_1)^2 + \\ + g_{12}(x'_1 - x_1)(x'_2 - x_2) + g_{21}(x'_2 - x_2)(x'_1 - x_1) + g_{22}(x'_2 - x_2)^2 + \dots, \quad (7)$$

где

$$g_0, g_1, \dots, g_{11}, g_{12}, \dots$$

зависят, конечно, от  $x_1, x_2$ , как это полагается в ряде Тейлора.

Так как

$$\Delta(x_1, x_2; x_1, x_2) = g_0$$

по формуле (7), то на основании свойства 2)  $g_0$  обратится в нуль. С другой стороны, при очень малых разностях

$$x'_1 - x_1, \quad x'_2 - x_2$$

члены с первыми степенями этих величин в формуле (7) будут играть главную роль, коль скоро  $g_1, g_2$  не будут одновременно обращаться в нуль, но члены с первыми степенями изменяют свой знак, когда мы координаты поменяем местами. Таким образом,  $(P, P')$  и  $(P', P)$  для достаточно близких между собой точек будут различны по знаку, что будет противоречить свойству 1) расстояний; значит непременно мы должны предположить, что

$$g_1 = g_2 = 0.$$

Полагая, что

$$x'_1 = x_1 + \Delta x_1, \quad x'_2 = x_2 + \Delta x_2,$$

и считая, что

$$\Delta x_1, \quad \Delta x_2$$



достаточно малы, будем иметь

$$\Delta = g_{11} \Delta x_1^2 + g_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 + g_{21} \Delta x_2 \Delta x_1 + g_{22} \Delta x_2^2 + \dots$$

Полученная формула для квадрата расстояний содержит четыре члена, но в этой формуле есть подобные члены; приводя их и заменяя  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  на  $dx_1$ ,  $dx_2$  (величины бесконечно малые), будем иметь окончательно

$$\Delta = ds^2 = g_{11} dx_1^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2, \quad (8)$$

где  $2g_{12}$  заменяет выражение  $g_{12} + g_{21}$ ; следовательно,  $g_{ik}$  симметрично по отношению к своим значкам, т. е.  $g_{ik} = g_{ki}$ . Очевидно, что  $g_{ik}$  зависит от  $x_1$ ,  $x_2$ . Величину  $\Delta$  мы обозначаем через  $ds^2$ ; таким образом  $ds$  будет расстоянием (в первом приближении) двух бесконечно близких точек.

Итак, квадрат расстояния двух бесконечно близких точек является квадратной функцией от бесконечно малых разностей координат этих точек с коэффициентами, зависящими от координат основной точки. Знание этих трех коэффициентов для любой из точек двумерного пространства вполне определит метрику расстояний в нашем пространстве в непосредственной близости к данной точке; можно показать\*, что знание этих коэффициентов даст возможность так определить квадрат расстояния любых двух точек, чтобы выражение (8) давало расстояние двух бесконечно близких точек. Заметив, что изучение расстояний в физическом пространстве в свою очередь будет базироваться на расстояниях весьма близких друг к другу точек; условимся считать метрику расстояний пространства определенной, коль скоро нам при данной арифметизации пространства заданы  $g_{ik}$  как функции координат точек нашего пространства.

Совокупность  $g_{ik}$  как функций координат точки  $P$  называется фундаментальным метрическим тензором.

Для трехмерного пространства будем иметь не три, а шесть коэффициентов  $g_{ik}$ , и формула (8) переписется по аналогии так:

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + g_{33} dx_3^2 + 2g_{23} dx_2 dx_3 + 2g_{13} dx_3 dx_1 + 2g_{12} dx_1 dx_2; \quad (9)$$

следовательно, для трехмерного пространства фундаментальный метрический тензор будет состоять из шести функций координат нашей точки.

3. Ввиду чрезвычайной важности для всего дальнейшего понятия о фундаментальном метрическом тензоре рассмотрим определенные выше расстояния в двух указанных ранее способах арифметизации двумерного пространства.

\* На доказательстве этого утверждения мы останавливаться здесь не имеем возможности.

В первом способе имеем

$$\Delta = (x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2,$$

иначе говоря,

$$g_0 = 0, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1;$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2;$$

мы получаем обычные формулы аналитической геометрии для квадрата расстояния и для квадрата элемента дуги.

Несколько более сложны вычисления для арифметизации по второму способу; не приводя этих вычислений, заметим, что для второго способа арифметизации

$$\bar{g}_0 = 0, \quad \bar{g}_1 = 0, \quad \bar{g}_2 = 0, \quad \bar{g}_{11} = 1, \quad \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0, \quad \bar{g}_{22} = x_1^2,$$

$$ds^2 = dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2.$$

В этой формуле мы узнаем элемент дуги в полярных координатах.

4. Совершенно ясно, что, зная  $\Delta$  или  $ds$  для любых точек, бесконечно мало разнящихся от точки  $P$ , мы будем знать фундаментальный метрический тензор в точке  $P$ ; в то же время мы можем с помощью фундаментального метрического тензора определить длину дуги заданной кривой между двумя точками  $P_1$  и  $P_2$ . Поместим между  $P_1$  и  $P_2$  на кривой бесчисленное множество точек и просуммируем взаимные их расстояния; в результате получим число, которое и назовем длиной дуги нашей кривой между точками  $P_1$  и  $P_2$ . Пользуясь обычными формулами интегрального исчисления, будем для длины дуги кривой  $SP_1, P_2$  между точками  $P_1$  и  $P_2$  иметь выражение

$$SP_1, P_2 = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{11} \left( \frac{dx_1}{du} \right)^2 + g_{22} \left( \frac{dx_2}{du} \right)^2 + \dots} du, \quad (10)$$

где  $u_1, u_2$  — значения параметра  $u$  нашей кривой для точек  $P_1$  и  $P_2$ .

5. Посмотрим, каким образом изучение физического пространства может нам указать (по крайней мере, принципиально), какова зависимость фундаментального метрического тензора от координат точек и какова, следовательно, метрика расстояний того геометрического пространства, в соответствии которому приведено наше физическое пространство и для которого, следовательно, наше физическое пространство является интерпретацией. Положим, что мы устанавливаем для наших физических «точек», лежащих на физической кривой, особое свойство иметь физическое расстояние по кривой. Положим, что с помощью определенных физических манипуляций мы переводим это свойство в разряд сначала интен-

сивностей, а затем и измеримых интенсивностей; напомним, что для этого надо установить по отношению к этому физическому расстоянию по кривой понятия больше или меньше и понятие равноотстоящих интенсивностей. Положим далее, что путем определенного выбора начального значения и единицы измерений мы измеряем введенную нами интенсивность. Результатом измерения будет некоторое число, которое мы будем называть физической длиной дуги по данной кривой между точками  $P_1$  и  $P_2$ . Если физическая длина дуги является интерпретацией определенной выше в п. 4 геометрической длины дуги (или просто длины дуги), то, очевидно, оба числа, дающие геометрическую и физическую длины дуг, должны (по крайней мере при некотором выборе начального значения и единицы измерения) совпасть между собой. Так как геометрическая длина дуги между двумя совпадающими точками равна нулю (по свойству интеграла (10)), то, очевидно, что за начальное значение должна быть выбрана физическая длина дуги между двумя совпадающими точками; выбор единицы измерения ничем не должен быть ограничиваем \*.

Положим, теперь, что через данную физическую точку  $P$  мы проводим ряд кривых и на каждой из этих кривых берем очень близкую к  $P$  точку  $P'$ ; измеряя физическую длину дуги по каждой из этих кривых между точками  $P$  и бесконечно к ней близкой, мы получим ряд чисел  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ , которые можно будет отождествить с соответствующими геометрическими длинами дуг. А так как дуги очень малы, то их длины можно отождествить с расстояниями очень близких точек и эти расстояния вычислить по формуле (9), заменяя в ней  $dx_1, dx_2, dx_3$  на очень малые величины  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ , представляющие разности координат точек  $P'$  и  $P$ . В формуле (9) величины  $g_{ik}$  нам неизвестны, но зато  $\Delta x_1, \dots$ , а также левые части полученных равенств будут нам известны; сделав достаточное число промеров, мы в состоянии будем установить достаточное число уравнений, из которых и определим  $g_{ik}$ ; для трехмерного пространства нам нужно, очевидно, не менее шести промеров, а для двумерного — не менее трех.

\* Этот произвол единицы измерения чрезвычайно характерен. Weyl использует его для установления особого понятия произвольности масштаба. Измеряя физическую длину, мы можем пользоваться произвольной и притом меняющейся от точки к точке единицей измерения; спрашивается, при какой же единице измерения наша физическая длина будет идентична длине геометрической? Если этот вопрос оставить не определенным (а так и приходится в сущности делать, ибо единица измерения зависит от нашего произвола), то физическая длина определит нам не  $ds$ , а  $\mu(x_1, x_2, x_3) ds$ , где  $\mu$  — неопределенная функция координат. Существуют свойства пространства, на которые производ  $\mu$  не влияет; эти свойства называются обладающими масштабно инвариантностью. Они играют большую роль в теории Weyl'я. Мы, однако, не будем останавливаться на вопросе о масштабной инвариантности, так как это перегрузит нашу статью новыми понятиями и терминами, которые будут лишены какого-либо конкретного содержания, ибо ни математическим аппаратом, ни примерами они подкреплены не будут.

6. Чтобы сделать яснее процесс физического исследования метрики, разберем его подробнее для случая двумерного пространства. Только что мы видели, что нам нужны три промера. Таким образом, выберем, кроме точки  $P$ , еще три точки  $P_1, P_2, P_3$ , весьма к ней близкие; сделав промеры, определим три расстояния (очень малые длины дуг кривых)  $s_1, s_2, s_3$  точки  $P$  до точек  $P_1, P_2, P_3$ . Для выяснения метрики пространства нам нужно будет так или иначе пространство арифметизировать; выберем какой-либо способ арифметизации. Пусть при этом способе точка  $P$  имеет координаты  $(x_1, x_2)$ , а точки  $P_1, P_2, P_3$  пусть имеют координаты  $(x_1 + h_1, x_2 + k_1), (x_1 + h_2, x_2 + k_2), (x_1 + h_3, x_2 + k_3)$ ; тогда формула (8) даст нам три равенства:

$$s_1 = g_{11}h_1^2 + 2g_{12}h_1k_1 + g_{22}k_1^2,$$

$$s_2 = g_{11}h_2^2 + 2g_{12}h_2k_2 + g_{22}k_2^2,$$

$$s_3 = g_{11}h_3^2 + 2g_{12}h_3k_3 + g_{22}k_3^2.$$

Решая эту систему уравнений относительно  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$ , определим метрику пространства. Решить эту систему уравнений всегда возможно, если точки не совпадают друг с другом; на этом детальном пункте я, к сожалению, подробнее остановиться не могу. То, что было сейчас с достаточным педантизмом описано, происходило в Египте, когда практическая жизнь и религиозные потребности устанавливали основания нашей евклидовой метрики. Вообразим на минуту, что мы неестественно сплюснулись и подобно поверхностным теням живем на большом шаре\*; положим, что, перейдя в двумерное существование теней, мы все же умеем измерять физические длины дуг; положим, что для арифметизации нашего двумерного пространства (шаровой поверхности) мы применяем числа следующим образом: вводим обычными приемами дополнение до  $90^\circ$  широты  $\varphi$  и долготу  $\lambda$  на нашем шаре радиуса  $R$ , затем для любой точки  $P$  выбираем два числа  $x_1$  и  $x_2$  по формулам  $x_1 = R\varphi, x_2 = R\sin\varphi\lambda$ , где  $\varphi_0$  есть дополнение  $90^\circ$  широты некоторой точки  $P_0(x_{10} = R\varphi_0)$ , в окрестности которой мы производим свои наблюдения. Положим, что весьма большой ряд тщательно произведенных промеров дал нам следующее выражение для  $ds^2$ :

$$ds^2 = dx_1^2 + \frac{\sin^2(x_1/R)}{\sin^2(x_{10}/R)} dx_2^2.$$

Формула эта, как легко видеть, является обычной формулой, выражающей длину бесконечно малой дуги на сфере:  $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \sin^2\varphi d\lambda^2$ . Если радиус сферы невелик по сравнению с областью, населенной тенями, то полученная формула вскоре, при достаточно большом числе промеров в разных точках мира теней, даст тамошним геометрам возмож-

\* Это сравнение привел в одной из своих по обыкновению блестящих популярных лекций по принципу относительности профессор О. Д. Хвольсон.

ность определить  $R$ , т. е. радиус сферы, и, таким образом, значительно подвинуться в изучении того двумерного пространства, которое эти тени занимают. Но дело для наших теней значительно ухудшается, если занимаемая ими область будет очень мала по отношению к радиусу  $R$  сферы, того отношения:  $\sin^2 \frac{x_1}{R} : \sin^2 \frac{x_{10}}{R}$  будет близко к единице, ибо  $x_1$  будет близко к  $x_{10}$ , т. е.  $x_1 - x_{10}$  будет очень мало по сравнению с  $R$ ; значит все будет происходить так, как будто  $R = \infty$  и сфера превращается в плоскость. Наши сферические тени склонны будут подвергать гонению вольнодумцев, которые усомнятся в том, что их пространство не есть плоскость, а является сферой, только сферой весьма большого радиуса, и понадобится много сферических веков, чтобы тени толпы поняли бы сферичность своего мира. Мы — трехмерные существа — находимся в положении, аналогичном двумерным теням, живущим на сфере очень большого радиуса, ибо все наши промеры непрестанно убеждают нас в превосходном согласии метрики нашего пространства с евклидовой метрикой, и нужны были огромные астрономические расстояния или те идеи, которые внесла с собой теория относительности, чтобы мы поставили под сомнение вопрос о метрике нашего пространства.

7. Итак, с первого взгляда кажется, что, исследуя наше физическое пространство и физическую длину, мы имеем возможность без какого-либо произвола однозначно судить о метрике того геометрического пространства, картиной которого (интерпретацией) является изучаемое нами физическое пространство. Но не следует упускать из вида целый ряд произвольных условностей, вводимых нами, когда мы, с одной стороны, интерпретируем геометрическое пространство и его образы при помощи образов физического пространства, а с другой стороны, когда мы отождествляем физическую длину с геометрической.

В физическом материальном пространстве мы интерпретируем геометрические точки с помощью тех или иных материальных объектов; довольствуясь грубой интерпретацией, мы «изображаем» точки при помощи малых материальных тел, расположенных в нашем физическом пространстве (сравним точки на бумаге, геодезические знаки на земной поверхности и, наконец, для больших областей пространства, небесные тела). Интерпретируя более тонко, мы определяем точки как места пересечения двух достаточно узких световых пучков, т. е. тоже при помощи более тонких, но все же материальных объектов. Мы можем, однако, интерпретировать геометрические точки совершенно иными образами материального мира и при такой интерпретации получить даже в узких, нам доступных областях нашего физического пространства совершенно иные представления о его геометрических свойствах, правильное, о свойствах геометрического пространства, которое интерпретируется пространством физическим.

Еще больший произвол заключается в установлении физической длины. Здесь, если не вставать на точку зрения целесообразности, возможны самые разнообразные методы установления физической длины, а тем самым возможны и разнообразные определения метрики того пространства, интерпретацией которого является наше физическое пространство. Интерпретируя геометрическую точку не обычным образом в нашем физическом пространстве, устанавливая особое понятие о физической длине, мы экспериментально придем без всякого затруднения к тому, что метрика нашего пространства не есть метрика евклидова, а есть метрика Лобачевского или какая-либо иная.

Таким образом, приходится отбросить возможность однозначного и не зависящего от нашего произвола ответа на вопрос о метрике (а равно, конечно, и о других свойствах) геометрического пространства, отвечающего нашему физическому. Этот вопрос вообще приобретает смысл лишь после того, как установлена интерпретация вещей геометрического пространства, при помощи физических материальных образов, а равным образом после того, как определена физическая длина и сделано предположение об идентичности ее с длиной геометрической. Раз это уже установлено, возникает вопрос об определении метрики пространства; задача геометра-естествоиспытателя заключается в установлении более точных методов исследования метрики пространства, позволяющих менее грубыми приемами, чем это описано в предыдущих пунктах, установить его метрику. Мы увидим, как принцип относительности, введя в рассмотрение всемирное тяготение, позволил по столь тонким явлениям, как незначительное, оставшееся необъясненным движение перигелия Меркурия или как ничтожное отклонение солнечного луча, проходящего вблизи солнечной поверхности, сделать ряд заключений о метрике нашего пространства.

Естественно возникает вопрос, чем же обусловлена та или иная физическая интерпретация геометрического пространства и вещей, в нем находящихся? Здесь, вероятно, темные принципы целесообразности или экономия мышления играют первостепенную роль — я не буду и пытаться разбираться в этих сверхнатуральных вопросах, да и для темы настоящей статьи разбираться в них не представляется необходимым. Мы принимаем как нечто готовое ту интерпретацию геометрии, с которой свыклись физики \*. Коснувшись вопроса о физическом пространстве, мне представляется полезным обратить внимание на то обстоятельство, что физическое пространство как пространство материальное по самому существу своему немислимо без материи; пустое физическое пространство есть просто *nonsens*, ибо в таком пространстве нельзя будет изобразить, интер-

-----  
\* Так, например, очень малое материальное тело интерпретирует (с известным приближением) точку геометрического пространства, луч света интерпретирует прямую и т. п.

претировать ни одну из вещей геометрического пространства — ведь в физическом пространстве мы условились интерпретировать вещи геометрического пространства материальными образами.

#### § 4. Кривизна пространства

1. Приступая к изложению одного из наиболее трудных геометрических представлений, а именно представления о кривизне пространства, считаю необходимым предупредить, что в настоящем параграфе будут изложены лишь самые элементарные начала учения о кривизне, так как более основательное знакомство с теорией кривизны пространства требует гораздо более тяжеловесного математического аппарата, нежели тот, которым мы пользуемся в настоящей статье.

Проводя через данную точку  $P$  трехмерного пространства различные кривые, мы каждой кривой сопоставляем особое понятие о направлении этой кривой в точке  $P$ . Выбрав на кривой точку  $P'$ , бесконечно близкую к точке  $P$ , мы определим направление нашей кривой двумя числами, характеризующими отношение бесконечно малых приращений координат, которое эти последние испытывают, когда мы переходим от точки  $P$  к бесконечно ей близкой точке  $P'$ . Ограничиваясь в целях простоты примером двумерного пространства и приписывая точке  $P$  координаты  $x_1, x_2$ , а точке  $P'$  координаты  $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2$ , мы в этом случае определим направление нашей кривой единственным отношением  $\frac{dx_2}{dx_1}$ .

Очевидно, что направление будет нами определено, коль скоро нам будут заданы точка  $P$  и ей бесконечно близкая точка  $P'$ , т. е. будут заданы разности координат этих точек. В трехмерном пространстве таких разностей будет три:  $dx_1, dx_2, dx_3$ ; в двумерном две:  $dx_1, dx_2$ . Условимся называть вещь, вполне определенную указанными двумя точками или разностями их координат, бесконечно малым вектором в точке  $P$ , сами разности будем называть составляющими бесконечно малого вектора в точке  $P$ . В случае обычной нашей геометрии бесконечно малый вектор можно интерпретировать как отрезок прямой от  $P$  до  $P'$ , а его составляющие будут тогда проекциями этого отрезка на оси прямоугольных, прямолинейных координат.

Из сказанного выше ясно, что направление какой-либо кривой в точке  $P$  вполне определится, раз мы зададим соответствующий бесконечно малый вектор в точке  $P$ . Таким образом, вместо того чтобы говорить о направлении кривой в точке  $P$ , мы можем теперь говорить о направлении бесконечно малого вектора в точке  $P$ .

2. Направления двух каких-либо кривых, проходящих через точку  $P$ , определяют собою новое понятие об угле этих направлений. Так как направления кривых совпадают с направлениями двух соответствующих бе-

сконечно малых векторов, то можно говорить об угле двух бесконечно малых векторов в точке  $P$ . Этот угол будет некоторым числом, которое определяется по составляющим обоих бесконечно малых векторов и по значениям фундаментального метрического тензора в точке  $P$ . Чтобы пояснить, каким образом определяется указанное число, обратимся опять к двумерному пространству. Положим сначала, что двумерное наше пространство есть обычная евклидова плоскость, причем арифметизация ее произведена с помощью введения прямоугольных, прямолинейных координат (как на рис. 1). Тогда расстояние двух бесконечно близких точек  $P$  и  $P'$  определится по формуле

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2,$$

иначе говоря, для фундаментального метрического тензора в этом случае мы будем иметь

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1.$$

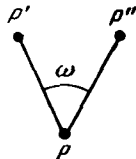


Рис. 3

Возьмем теперь (см. рис. 3) два бесконечно малых вектора  $(dx_1, dx_2)$  и  $(\delta x_1, \delta x_2)$ , изображаемые двумя отрезками  $PP'$  и  $PP''$ ; по правилам аналитической геометрии угол  $\omega$  между этими двумя векторами определится как некоторое число по формуле

$$\cos \omega = \frac{dx_1 \delta x_1 + dx_2 \delta x_2}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}}.$$

Переходя к иной арифметизации нашей евклидовой плоскости или рассматривая с более общей точки зрения двумерное пространство с иными, нежели евклидова плоскость, свойствами, определим угол двух векторов  $(dx_1, dx_2)$ ,  $(\delta x_1, \delta x_2)$  как число, получаемое по формуле

$$\cos \omega = \frac{g_{11} dx_1 \delta x_1 + g_{12} (dx_1 \delta x_2 + dx_2 \delta x_1) + g_{22} dx_2 \delta x_2}{\sqrt{g_{11} dx_1^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2} \sqrt{g_{11} \delta x_1^2 + 2g_{12} \delta x_1 \delta x_2 + g_{22} \delta x_2^2}}.$$

Из этой формулы видно, что два вектора в точке  $P$  будут составлять угол, отличный от того угла, который эти же самые вектора (с прежними составляющими) имеют в другой точке  $P_0$ , ибо  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ , ... зависят, вообще говоря, от координат точки  $P$  и, значит, меняются, когда от точки  $P$  переходим к точке  $P_0$ . Из этого замечания видно, что пространство с иными свойствами, нежели евклидово (с иной метрикой), отличаются коренным образом от того пространства, с которым мы привыкли оперировать. Можно доказать, что определенный нами угол двух бесконечно малых векторов совершенно не зависит от способа арифметизации пространства.

3. Общеизвестна роль евклидова постулата о параллельных в развитии геометрических идей, особенно в XIX и XX столетиях. Понятие о параллельности играет огромную роль в пространствах, отличных по своим



метрическим свойствам от пространства евклидова; оно должно быть, однако, соответствующим образом обобщено и определено. Такое обобщение понятия параллельности мы имеем в идее параллельного перемещения, развитой итальянским математиком Levi Civita.

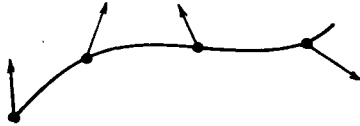


Рис. 4

Представим себе, что по некоторой кривой перемещается (рис. 4) бесконечно малый вектор, изменяясь по некоторому закону. Закон этого изменения должен быть таков, что, задав бесконечно малый вектор в некоторой точке кривой, мы сможем определить вектор, соответствующий заданному в любой другой точке нашей кривой; далее, закон этого изменения должен давать нам возможность произвести указанное перемещение вектора по любой кривой нашего пространства. Условимся только что описанную манипуляцию с вектором называть сопряжением. Параллельным перемещением вектора мы назовем определенным образом выбранное сопряжение. Смотря по тому, каким образом мы выберем это сопряжение, мы будем иметь те или иные геометрические свойства нашего пространства, иначе говоря, определенное параллельное перемещение определит собой особый класс пространства.

Можно, как я уже сказал, произвольным образом выбирать параллельное перемещение; мы, однако, остановимся на параллельном перемещении, наиболее близком к нашим обычным представлениям, а именно на таком параллельном перемещении, которое оставляет неизменным угол двух параллельно перемещающихся по одной и той же кривой векторов (рис. 5)\*.

Расстояние двух бесконечно близких точек  $P$  и  $P'$ , определяющих вектор, зависит, как мы видели, от фундаментального метрического тензора и от составляющих нашего вектора; условимся это расстояние называть величиной вектора. Величина вектора при параллельном его перемещении, вообще говоря, меняется и лишь в особо исключительных случаях остается неизменной. Условимся называть пространства, в которых величина вектора не меняется при параллельном перемещении, пространствами

\* Рассматривая пространство, мы должны определенным образом выбрать параллельное перемещение; тот или иной выбор определенного параллельного перемещения обусловит собой целый ряд свойств нашего пространства.

Римана \*; те же пространства, в которых величина вектора меняется при его параллельном перемещении — пространствами Weyl'я. Пространства Римана обладают чрезвычайно любопытной особенностью: в них параллельное перемещение определяется вполне знанием метрики

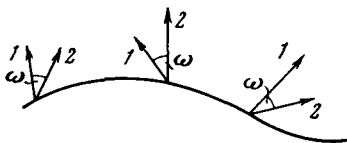


Рис. 5

пространства (т. е. знанием фундаментального метрического тензора). С пространствами Weyl'я дело обстоит сложнее: для них установление параллельного перемещения требует помимо знания фундаментального метрического тензора знания еще некоторых величин; совокупность этих величин называется масштабным вектором. Для трехмерного пространства масштабный вектор состоит из трех величин, для двумерного — из двух \*\*.

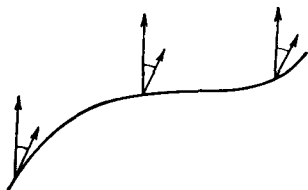


Рис. 6

Чтобы дать более ясное представление о параллельном перемещении, рассмотрим это понятие для обычной евклидовой плоскости, определив параллельное перемещение вектора как обычный параллельный перенос вектора из одной точки в другую (рис. 6), перенос, при котором величина вектора не меняется, а прямые линии, на которых лежит вектор до и после перемещения, остаются параллельными (в обычном смысле). Само

\* От пространства Римана следует отличать пространства постоянной римановой кривизны, являющиеся лишь весьма частным видом пространств Римана.

\*\* Мы не имели здесь возможности входить в подробности относительно структуры понятия о масштабном векторе.

собой разумеется, что указанное параллельное перемещение вектора можно определить аналитически следующим способом: вектор  $(dx_1, dx_2)$  перемещается параллельно, если вектор  $(\delta x_1, \delta x_2)$ , в который он перейдет, определится равенствами

$$\delta x_1 = dx_1, \quad \delta x_2 = dx_2;$$

из этого определения параллельности перемещения можно будет определить понятие параллельности и вывести ряд свойств, присущих этому понятию в евклидовой геометрии. Нетрудно видеть, что при только что установленном определении параллельного перемещения угол для двух

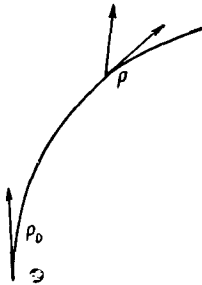


Рис. 7

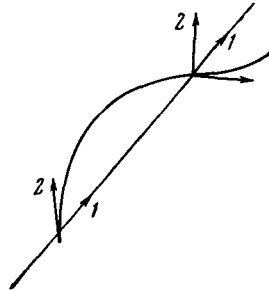


Рис. 8

параллельно перемещающихся векторов не меняется, равно как не меняется и величина параллельно перемещающегося вектора; таким образом, евклидово параллельное перемещение характеризует пространство, являющееся частным случаем пространства Римана.

4. Параллельное перемещение может дать возможность ввести понятие о прямой линии. В каждой своей точке эта кривая имеет определенное направление, характеризуемое направлением бесконечно малого вектора. Возьмем в некоторой точке  $P_0$  нашей кривой бесконечно малый вектор, определяющий направление в этой точке кривой (рис. 7), переместим параллельно этот бесконечно малый вектор в какую-либо точку  $P$  кривой, тогда в большинстве случаев направление перемещенного в точке  $P$  вектора не будет совпадать с направлением нашей кривой в этой точке. Кривую, обладающую тем исключительным свойством, что направление, параллельно перемещенного в любую точку  $P$ , указанного только что вектора совпадает с направлением кривой в этой точке, условимся называть прямой линией; прямая линия отличается от всех других кривых тем исключительным свойством, что направление ее вдоль по самой линии параллельно перемещается. Само собой разумеется, что для различных

определений параллельного перемещения мы будем иметь и разное определение прямых линий. Обратимся теперь к евклидовой плоскости. В ней, очевидно, будут кривые, не обладающие тем свойством, что их направление вдоль по кривой перемещается параллельно (рис. 8), но будут и определенные выше прямые линии, каковые совпадут с обычным определением евклидовой прямой.

Прямая, определенная при помощи параллельного перемещения, обладает для пространств Римана характерным свойством быть кратчайшей линией, соединяющей две какие-либо расположенные на ней точки, иначе говоря, длина дуги по прямой от  $P_1$  до  $P_2$  короче, чем длина дуги по любой другой кривой.

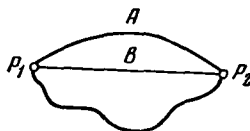


Рис. 9

На рис. 9 я нарочно изобразил «прямую» не обычной прямой, имея в виду, что этот чертеж изображает неевклидову плоскость, а, следовательно, метрика в нем настолько отлична от евклидовой, что длина дуги  $P_1P_2$  по «прямой»  $A$  короче, чем длина дуги  $P_1P_2$  (в новом мероопределении) по евклидовой прямой  $B$ .

Итак, прямые римановых пространств суть линии кратчайших расстояний (геодезические); этим свойством не обладают прямые пространств Weyl'а.

При помощи определения прямой нетрудно осуществить параллельное перемещение какого-либо вектора вдоль по прямой, по крайней мере в пространстве Римана; бесконечно малый вектор направления, по определению, перемещается вдоль по параллельной прямой; угол между двумя параллельно перемещающимися векторами, как мы знаем, не меняется, значит для осуществления параллельного перемещения по прямой нашего вектора достаточно следить за тем, чтобы он составлял всегда одинаковый угол с направлением нашей прямой линии и не менялся бы по величине. На рис. 10 и 11 осуществлено параллельное перемещение вектора, причем в одном случае взята за прямую обычная прямая, а в другом—некоторая кривая линия.

На евклидовой плоскости параллельное перемещение по обычной прямой характеризуется тем, что переместившийся вектор будет в обычном смысле параллелен исходному своему положению (см. рис. 11). На сфере кратчайшей линией служит, как известно, дуга большого круга; на

рис. 12 изображено параллельное перемещение бесконечно малого вектора по дуге большого круга; отметим еще раз, что угол  $\omega_1$ , составляемый вектором с дугой в начальной точке, одинаков с углом  $\omega_2$ , составляемым параллельно переместившимся вектором с дугой в конечной точке.

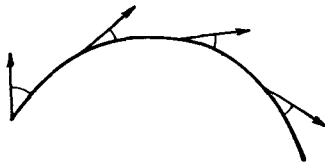


Рис. 10



Рис. 11

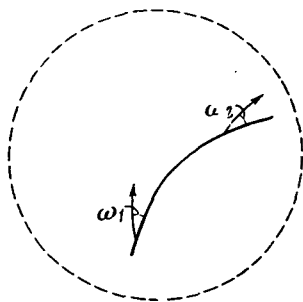


Рис. 12

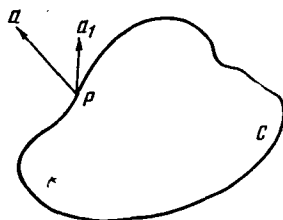


Рис. 13

5. Проведем через заданную точку  $P$  какую-либо замкнутую линию — контур  $C$  (рис. 13), возьмем некоторый бесконечно малый вектор  $a$  в точке  $P$  и будем параллельно перемещать его вдоль по линии  $C$ , пока снова не вернемся в исходную точку  $P$ ; наш вектор превратится в вектор  $a'$ , причем и по величине (в пространствах Вейля), и по направлению (как в пространстве Вейля, так и в пространстве Римана) вектор  $a$ , вообще говоря, не должен совпасть с вектором  $a'$ . Случай, когда  $a'$  совпадает с  $a$  и по величине и по направлению, будет случаем исключительным.

Обозначим через  $\alpha$  угол, который  $a'$  будет образовывать с  $a$ . От каких величин может, вообще говоря, зависеть этот угол? Само собой разумеется, что угол этот будет зависеть от свойств рассматриваемого пространства (ибо само параллельное перемещение характеризует пространство) и от вида замкнутой линии  $C$ . Проводя через точки  $P$  суживающиеся замкнутые линии, мы можем заметить, что вид сужившейся линии будет влиять все меньше и меньше на угол  $\alpha$ ; для двумерного пространства этот угол

$\alpha$  окажется пропорциональным площади  $S^*$ , ограниченной замкнутой кривой, причем множитель пропорциональности будет меняться в зависимости от положения точки  $P$ . Этот множитель пропорциональности и называется векторной кривизной или просто кривизной двумерного пространства в точке  $P$ ; обозначая кривизну буквой  $K$ , будем иметь

$$K = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\alpha}{S}. \quad (11)$$

Аналогично определяется кривизна и для трехмерного пространства, было бы слишком сложно останавливаться на этом определении кривизны в трехмерном пространстве по-

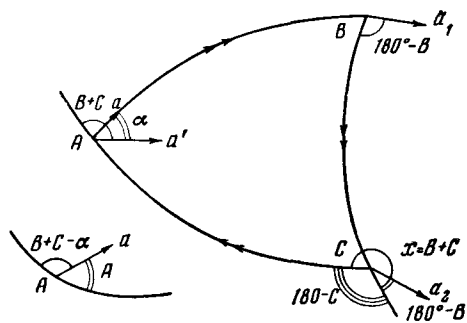


Рис. 14

дробно. Для нас достаточно будет знать, что угол  $\alpha$ , который вектор, возвратившийся в исходную точку после параллельного перемещения, образует с вектором исходным, характеризует среднюю кривизну той области пространства, где расположена наша замкнутая кривая. Чем этот угол будет больше, тем больше будет упомянутая средняя кривизна. Равенство нулю этого угла будет означать, что средняя кривизна пространства в рассматриваемой его части будет равна нулю.

Чтобы дать наглядное представление о кривизне, вообразим себя снова в виде двумерных теней, живущих на сфере радиуса  $R$ . На этой сфере образуем сферический треугольник  $ABC$  из трех «прямых» линий (рис. 14), т. е. из дуг большого круга (пространство на сфере относится нами к пространствам Римана); пусть  $A, B, C$  означают три внутренних угла нашего треугольника. Возьмем в точке  $A$  бесконечно малый вектор  $a$ , совпадающий по направлению с направлением дуги  $AB$  (прямой!), переместим параллельно этот вектор по замкнутой линии, образующей треугольник

\* Понятие «площади» нуждается, конечно, в определении. Не входя в детальные подробности, отметим, что для двумерного пространства площадью части этого пространства, ограниченной замкнутой кривой, будем называть число, определенное с помощью интеграла  $\iint \sqrt{g} \, dx_1 dx_2$ , где  $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ , а интеграл распространен на область, ограниченную нашей замкнутой кривой. Для евклидовой плоскости понятие площади, т. о. определенное, совпадает с обычным; то же будет и для площади фигуры на сфере.

$ABC$ ; в точку  $A$  наш вектор вернется в виде вектора  $a'$  с уже изменившимся направлением. Вычислим угол  $\alpha$  между векторами  $a$  и  $a'$ . Для этого произведем последовательно параллельное перемещение вектора  $a$  по дугам  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ . Так как  $AB$  — прямая, то вектор  $a$ , переместившись в точку  $B$  в виде вектора  $a_1$ , будет иметь направление дуги  $AB$  в той же точке  $B$  и, значит, с дугой  $BC$  будет образовывать угол в  $180^\circ - B$ . Перемещая параллельно вектор  $a_1$  по прямой  $BC$ , мы, согласно уже сказанному, должны сохранять неизменным угол между вектором  $a_1$  и прямой  $BC$ ; таким образом, угол вектора  $a_2$ , в который превратился после параллельного перемещения вектор  $a_1$ , с дугой  $BC$  будет тот же, что и угол вектора  $a_1$ , с этой дугой, т. е. будет равен  $180^\circ - B$ . Определим угол  $x$  вектора  $a_2$  с дугой  $CA$ , по которой ему предстоит параллельно перемещаться; из рис. 14 видно, что сумма

$$x + (180^\circ - B) + (180^\circ - C)$$

образует угол в  $360^\circ$ , откуда

$$x - B - C + 360^\circ = 360^\circ \text{ и } x = B + C;$$

таким образом, угол вектора  $a_2$  с дугой  $CA$  будет  $B + C$ ; этот угол сохранится, когда  $a_2$  параллельно переместится по дуге «прямой»  $CA$  и займет положение вектора  $a_1$ . Таким образом,  $a'$  с дугой  $CA$  будет иметь угол, равный  $B + C$ ; если  $\alpha$  будет углом между  $a$  и  $a'$ , то из рис. 14 следует, что  $B + C - \alpha$  будет угол, который  $a$  образует с дугой  $CA$ ; с другой стороны,  $a$  с дугой  $AC$  образует угол  $A$ . Сумма этих углов равна  $180^\circ$ ; таким образом

$$B + C - \alpha + A = 180^\circ,$$

$$\alpha = A + B + C - 180^\circ,$$

иначе говоря, угол  $\alpha$  есть так называемый сферический избыток, равный, как известно из сферической тригонометрии, отношению площади  $S$  сферического треугольника  $ABC$  к квадрату радиуса  $R$  сферы:

$$\alpha = \frac{S}{R^2}, \quad \frac{\alpha}{S} = \frac{1}{R^2}.$$

Следовательно, по определению кривизны  $K$  будем иметь

$$K := \frac{1}{R^2},$$

т. е. кривизна нашего сферического двумерного пространства обратно пропорциональна квадрату радиуса сферы. Прodelывая то же самое построение с плоским треугольником, мы нашли бы, что угол  $\alpha = 0$ , ибо сумма углов в плоском треугольнике равна двум прямым ( $180^\circ$ ); в соответствии с этим мы получили бы, что кривизна плоскости равна нулю.

Только что произведенное построение показывает большую связь кривизны с вопросом о сумме углов треугольника, а как известно, сумма углов треугольника теснейшим образом связана с постулатом Евклида; к сожалению, однако, я не могу остановиться более подробно на этом обстоятельстве. Исследование, которое только что выполнили сферические двумерные существа, дало бы им возможность определить кривизну их пространства, а следовательно, и радиус той сферы, при помощи которой они могли бы интерпретировать свою геометрию. К этому замечанию мы еще вернемся ниже.

6. Когда вектор, параллельно перемещаясь из точки  $P$  по замкнутой кривой  $C$ , вернется в виде вектора  $a'$  в ту же точку, то величина его, вообще говоря, изменится. Для Римановых пространств, как уже было указано выше, величина вектора при параллельном его перемещении не изменится, поэтому величина  $a'$  будет равна величине  $a$ ; иначе будет обстоять дело с пространствами Weyl'я, там величина  $a'$  будет отлична от величины  $a$ . Исследуем это изменение величины параллельно перемещающегося вектора. Оно будет зависеть от трех причин: во-первых, от первоначальной величины вектора  $a$ , во-вторых, от вида замкнутой кривой  $C$  и, в-третьих, от свойств нашего пространства. Пусть  $l$ ,  $l'$  будут величинами векторов  $a$  и  $a'$ ,  $\Delta l = l' - l$  будет изменением величины вектора  $a$  при параллельном перемещении его по замкнутой кривой,  $\lambda = \Delta l / l$  будет относительным изменением величины вектора и при параллельном перемещении его по замкнутой кривой  $C$ .

Обратимся снова к двумерному пространству; относительное изменение  $\lambda$  величины вектора  $a$  будет при достаточно малом  $C$  пропорционально площади  $S$ , ограничиваемой кривой  $C$ , причем множитель пропорциональности будет меняться в зависимости от положения исходной точки  $P$ . Этот множитель пропорциональности называется Weyl'ем метрической кривизны двумерного пространства в точке  $P$ ; обозначая метрическую кривизну буквой  $L$ , будем иметь

$$L = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\lambda}{S}. \quad (12)$$

Для трехмерного пространства метрическая кривизна определяется вполне аналогичным манером. Для нас достаточно знать, что относительное удлинение характеризует среднюю метрическую кривизну той области пространства, в которой расположена замкнутая линия  $C$ . Само собой разумеется, что метрическая кривизна Риманова пространства равна нулю, но следует тут же отметить, что метрическая кривизна может быть нулем и для пространств, отличных от Римановых.

Как векторная, так и метрическая кривизна пространства не меняются от точки к точке в пространстве. Векторная кривизна вполне



определяется по фундаментальному метрическому тензору и по масштабному вектору, тогда как метрическая кривизна требует для своего вычисления знания лишь одного масштабного вектора. Само собой разумеется, что и векторная и метрическая кривизна суть собственные свойства пространства и не зависят от способа его арифметизации. Мы, все время говоря о пространстве, имели в виду трехмерное пространство и обращались к двумерному пространству лишь в целях иллюстрации. Нетрудно, однако, обобщить определения наших понятий и их свойств на пространство любого числа измерений. Формально мы не встретимся ни с какими затруднениями, за исключением лишь увеличения числа  $g_{ik}$  для фундаментального метрического тензора и числа величин, определяющих масштабный вектор. Для двумерного пространства мы имеем три величины для определения фундаментального метрического тензора и две величины для определения масштабного вектора; в трехмерном (обычном) пространстве мы будем иметь шесть величин для определения фундаментального метрического тензора и три для определения масштабного вектора; наконец, в четырехмерном пространстве число величин, нужных для определения метрического тензора, увеличится до десяти (число различных комбинаций значков 1, 2, 3, 4 по два), а число величин, необходимых для определения масштабного вектора, дойдет до четырех.

7. Обратимся теперь снова к физическому пространству и посмотрим, как можем мы с помощью физических манипуляций установить кривизну того геометрического пространства, ксего физическое пространство служит интерпретацией. Для этого необходимо прежде всего установить те вещи физического пространства, которые соответствуют понятиям направления, вектора, угла в геометрическом пространстве. Так как физическое пространство есть пространство материальное, то указанные вещи должны быть связаны с определенными материальными объектами, иначе говоря, направление должно осуществляться с помощью материальных тел или процессов (например, при помощи светового луча), угол должен получаться в результате определенной манипуляции с материальными телами (физическое измерение угла). Далее, для установления кривизны необходимо определить процесс в физическом пространстве, отвечающий параллельному перемещению вектора; установив этот процесс, мы можем при помощи действий с материальными телами осуществить параллельное перемещение вектора, и, кроме того, определить его величину и углы, составляемые им с какими-либо иными векторами или направлениями. Установив указанные понятия и действия в физическом пространстве, мы сможем произвести ряд экспериментов для изучения кривизны нашего пространства. Наметим целый ряд замкнутых путей и станем производить (на самом деле — материально) параллельное перемещение векторов по этим путям; вернувшись в исходную точку, измерим угол  $\alpha$ , на который отклонился наш материальный вектор от своего исходного положения,

и определим относительное удлинение  $\lambda$  нашего вектора. Зная эти величины для большого числа замкнутых линий, мы можем определить среднюю векторную и метрическую кривизны пространства в различных его местах.

Положим, что мы смогли бы выполнить (по крайней мере принципиально) этот эксперимент; ниже я укажу, что этот эксперимент, равно как и определение фундаментального метрического тензора в трехмерном пространстве, выполнить нельзя (даже мысленно). Для малых сомкнутых линий результат в нашем пространстве получился бы весьма сомнительный, углы  $\alpha$  и величины  $\lambda$  были бы очень малы и измерить их не было бы никакой возможности. Знаменитое измерение Гаусса суммы углов треугольника и является, как мы выше видели, производством только что указанного эксперимента для определения угла  $\alpha$ . Треугольник был взят на земной поверхности, значит, имел сравнительно малую площадь, и результатом явилась столь малая величина  $\alpha$ , что ее нельзя было измерить. Дело, конечно, могло бы измениться, если бы за замкнутую линию мы взяли бы контур, простирающийся от нашей солнечной системы до туманности Андромеды; площадь такого контура была бы очень велика, и, как бы малы ни были кривизны нашего пространства, угол  $\alpha$  и величина  $\lambda$  оказались бы настолько значительными, что их легко было бы измерить. Произведя эти измерения, соединяя их с измерениями, нужными для определения метрики пространства, мы смогли бы без труда установить свойства того геометрического пространства, интерпретацией которого при некоторых соглашениях и произвольных (не с точки зрения целесообразности, конечно) условиях является наше физическое пространство. Имея в виду целесообразность выбранной нами интерпретации, мы могли бы сказать попросту, что наше физическое пространство обладает такими-то и такими свойствами. Иначе говоря, мы бы создали физику пространства или, если угодно, физическую геометрию.

Однако как я уже упомянул выше, выполнение подобных экспериментов совершенно немыслимо, а причиной этого является то обстоятельство, что никаких физических действий в трехмерном пространстве мы производить не можем, ибо все эти действия нам приходится производить еще во времени, ибо все живущее и могущее производить физические действия живет во времени:

*παντα ρει καὶ οὐδεν μῦνει.*

Нет ни одного физического явления, могущего произойти мгновенно; мы не можем перемещать вектор по кривой с бесконечно большой скоростью (мгновенно), а значит, когда вектор вернется в исходную точку и мы смерим угол между ним и исходным вектором, то это не наш старый угол  $\alpha$ , а нечто совершенно новое, ибо за то время, пока наш вектор путешествовал до Андромеды и обратно, прошло много десятков тысяч лет, как бы

быстро, хотя бы так же быстро, как свет, ни перемещался наш вектор  $\mathbf{i}$ , следовательно, оба наши вектора — исходный и вернувшийся — успели порядком постареть.

Против указанного можно возразить, что, уменьшая длину пути для путешествующего вектора, мы при большой его скорости уменьшим его постарение. Совершенно верно; так и было сделано в опыте Гаусса с измерением углов треугольника: углы измерялись (принципиально, конечно) почти мгновенно, ибо при измерении пользовались световым лучом, обегавшим весь треугольник в малые доли секунды. Но уменьшение длины пути сейчас же скажется на уменьшении охватываемой замкнутым контуром площади, а это в свою очередь уменьшит  $\alpha$  и  $\lambda$  настолько, что их нельзя будет измерить.

Итак, мы совершенно не можем производить физические действия, нужные для экспериментального установления физической геометрии в трехмерном пространстве; для нас эти действия столь же невозможны, сколь невозможны для нас физические действия в двумерном пространстве, где нельзя поместить наших приборов и где мы не можем поместиться сами. Причина этих затруднений — время, без которого нет пространства и которое обуславливает не физическое трехмерное пространство, а физическое четырехмерное пространство, мир. К изучению времени мы сейчас и обратимся.

## Глава II

### ВРЕМЯ И МИР

*«Время есть число движения»*  
(Аристотель)

*«Von Stund an sollen Raum für sich und  
Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken  
und nur noch eine Art Union der beiden  
soll Selbstständigkeit bewahren».*

(H. Minkovski, Raum und Zeit)

### § 5. Время

1. Главу о пространстве мы начали с определения абстрактного пространства; мы могли бы также поступить и со временем, сказав, что время есть совокупность вещей, называемых моментами и стоящих в определенных отношениях между собой и с трехмерным пространством. Я предпочитаю, однако, другой путь, начав с рассмотрения физического времени; делаю я это потому, то у нас гораздо более ясны представления о пространстве, нежели представления о времени. В физическом пространстве мы

встречаемся с особым явлением, называемым движением, которое заключается в том, что физическая (материальная) точка меняет свое положение в трехмерном пространстве, иначе говоря, меняет те три числа  $x_1, x_2, x_3$ , которые при арифметизации трехмерного пространства служат ей координатами. Геометрическое место положений материальной точки будет некоторая кривая, называемая траекторией материальной точки. Если точка движется по прямой линии, мы будем иметь прямолинейную траекторию, если точка движется по дуге круга, будем иметь круговую траекторию. Задав траекторию, мы еще не устанавливаем положение материальной точки на ней, но если на траектории выбрать определенную начальную точку и от нее по траектории измерять

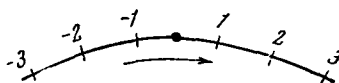


Рис. 15

длины дуг положительными числами в одну сторону, отрицательными в другую (рис. 15), то, задав траекторию и задав число  $t$ , отвечающее длине дуги, мы вполне определим положение материальной точки, движущейся по траектории. Сопоставим теперь каждой физической точке  $M$  пространства определенное основное движение и назовем часами данной точки  $M$  инструмент, показывающий длины дуг  $t$ , проходимых материальной точкой по траектории в основном движении. Следует все время иметь в виду, что выбор основного движения совершенно произволен, равно как совершенно произволен выбор начальной точки на траектории основного движения, т. е. число, показываемое часами данной точки  $M$ , есть совершенно произвольная, зависящая от нашего выбора величина. С другой стороны, следует помнить, что мы оперируем все время с физическим пространством и с физическими явлениями, в нем совершающимися, так что часы, нами установленные, могут быть (по крайней мере, в идее) действительно построены с помощью материальных объектов.

Величину  $t$ , показываемую часами данной точки  $M$ , назовем физическим местным временем точки  $M$ .

2. Прежде чем отвечать на естественное и всегда делаемое возражение о неравномерности введенного нами движения и о непригодности его для наших часов, покажем несколько примеров установления физического местного времени.

Рассмотрим прежде всего звездное время \*. Для всех точек трехмерного пространства выберем одно основное движение; таким обра-

\* Термин «звездное время» употребляется нами не в том смысле, в каком он применяется в астрономии.

зом, часы для всех точек пространства будут одни и те же. За основное движение примем движение конца стрелки определенной длины, направленной из центра Земли на какую-либо звезду. Звездное время  $t_*$  — длина пути, описываемого концом указанной стрелки. Звездное время  $t_*$  одно и то же во всех точках пространства, это универсальное время. Кроме того, это очень удобное время, ибо весьма большое число движений будет совершаться так, что длины дуг, проходимых точкой по траектории, будут пропорциональны разности звездных времен:

$$s = at_* + b,$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные. Такие движения будем называть равномерными по отношению к звездному времени. Повторяю, очень большое число движений будет или равномерно или практически равномерно по отношению к звездному времени. Поэтому исследование движений значительно упрощается, когда за время выбрано звездное время. Как раз это время и было впервые избрано человеком, и выбор именно этого времени был исторически, конечно, совершенно необходим и естественен уже по одному тому громадному религиозно-мистическому впечатлению, которое звездное время и его величавое движение производило, да и сейчас еще производит, на человеческую душу. Выбор звездного времени за время универсальное оказал громадное влияние на всю историю культуры и, конечно, на создание основных законов механики, как об этом сказано будет ниже. Этот выбор, с нашей точки зрения совершенно произвольный, казался единственно истинным и священным, а звездное время, наделенное рядом мистических свойств, сделалось временем вообще таинственным и мало постижимым. Конечно, не всякое движение является равномерным по отношению к звездному времени; падение тел около земной поверхности или, лучше сказать, падение тел в постоянном поле тяготения является примером неравномерного (равноускоренного) по отношению к звездному времени движения. Длина дуги, проходимая точкой в этом движении, выражается в зависимости от звездного времени формулой

$$s = at_*^2 + b,$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, причем  $a$  зависит от ускорения силы тяжести:  $a = g/2$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести в нашем постоянном поле тяготения.

3. Рассмотрим теперь другое время, которое мы для краткости назовем гравитационным временем. Основное движение и для этого выбора времени будет одним и тем же для всех точек, а, значит, часы — одни и те же, и гравитационное время будет универсальным. Положим, что материальная точка падает в постоянном поле тяготения. Выберем это движение за основное, часы покажут длину пути  $t_g$ , пройденную этой точкой. Эта величина и будет гравитационным временем. Срав-

ним гравитационное время со звездным; для этого достаточно будет поставить в предыдущую формулу вместо  $s$  величину  $t_g$ :

$$t_g = at_* + b,$$

откуда

$$t_* = \sqrt{\frac{t_g - b}{a}},$$

значит, если  $s$  есть путь, проходимый концом стрелки наших часов, меряющих звездное время, то

$$s = \sqrt{\frac{t_g - b}{a}}.$$

Таким образом, по отношению к гравитационному времени звезды движутся не равномерно, стрелки наших часов также движутся неравномерно, зато тяжелый снаряд падает равномерно, хотя различно под разными широтами Земли. Само собой разумеется, что, приняв гравитационное время за истинное время, нам пришлось бы коренным образом перестроить всю механику; механика сделалась бы от этой переделки значительно сложнее, ибо масса простейших и чаще всего встречающихся движений оказалась бы движениями неравномерными и происходящими по сравнительно сложным законам. Конечно, введение гравитационного времени явилось бы действием нецелесообразным, но помимо принципа целесообразности и удобства гравитационное время могло бы с тем же правом служить временем, как и время звездное.

Введем, наконец, еще третий сорт времени, время маятниковое. Построим значительное количество одинаковых часов с маятником и примем за основное движение для любой точки земной поверхности движение конца секундной стрелки часов с маятником, помещенных в этой точке. Путь, пройденный концом секундной стрелки наших часов с маятником от некоторой начальной точки, обозначим через  $t_m$  и назовем маятниковым временем. Для каждой точки земной поверхности маятниковое время будет пропорционально звездному времени, так что движение, равномерное по отношению к звездному времени, будет равномерным и по отношению к маятниковому времени и обратно. Но в отличие от универсального звездного времени или гравитационного времени, маятниковое время будет местным и на разных широтах будет разным.

4. Из сказанного выше вытекает вместе с тем и ответ на всегда делаемое указание о преимуществах звездного времени, так как звездное время якобы основано на движении равномерном. В самом деле, понятие равномерности движения уже предполагает наличие времени, а выражение «движение звезд совершается равномерно» означает только то, что мы называем движение звезд равномерным. Равномерность движения есть по-

нятие совершенно относительное; можно говорить о равномерности одного движения по отношению к другому, и когда мы говорим о равномерном движении, то подразумеваем под этим движение равномерное относительно движения звезд или, что звучит еще более одиозно, равномерное относительно вращения Земли. В признании за звездным временем особого мистического значения кроется нежелание человека понять всю нецентральность и скромность положения планеты, на которой, волею судеб, ему пришлось жить. Идея произвольности времени была установлена еще Блаженным Августином в следующих поразительных словах:

«*Audivi a quodam homine docto, quod solis et lunae ac siderum motus ipsa sint tempora, et nil annui. Cur enim non potius omnim corporum motus sint tempora? An vero si cessarent coeli lumina, et moveretur rota figuli, non esset tempus, quo metiremur eos gyros, et diceremus, aut aequalibus morulis agi, aut si alios tardius, alios velocius moveretur alios magis diutur nos esse, alios minus?... Sunt et sidera et luminaria coeli in signis et in temporibus et annis et in diebus. Sunt vero; sed nec ego dixerim circuitum illius ligneonale rotae diem esse; nec tamen ideo tempus non esse, ille dixerit... Nemo ergo mihi dicat coelestium corporum motus esse tempora, quia et cuiusdam voto cum sol stetisset, ut victoriosum proelium perageret, sol stabat, sed tempus ibat*»\*

(S. Aurelii Augustini. Confessiones, L.XI.C. XXIII)

Мы, конечно, не касаемся здесь, как и всюду в настоящей статье, вопроса целесообразности звездного времени, вопроса о преимущественности этого времени как следствия целесообразности его введения. Эти вопросы стоят вне рамок тех методов, коими мы в настоящей статье пользуемся.

Установив тем или иным способом физическое местное время (выбрав движение), нам уже будет нетрудно определить любое движение как изменение координат движущейся точки с течением времени. Совершенно ясно, что перемена одного времени на другое будет соответствовать замене числа  $t$ , являющегося первым временем, на число  $t'$ , являющееся вторым временем, причем замена эта будет, конечно, совершаться разными

\* «Я слышал, как говорили одному ученому: «Движение луны, солнца и звезд — вот время». Я, однако, не согласен. Почему в самом деле движения других тел не могли бы быть также временем? Если бы действительно все светила небесные остановились, а какое-либо колесо гончара продолжало бы вращаться, разве тогда не было бы времени, при помощи которого мы стали бы измерять обороты этого колеса? Мы бы сказали, что обороты происходят или в одинаковые промежутки времени, или, если бы одни из них были быстрее, а другие медленнее, что одни длятся дольше, а другие меньше? Светила небесные — это знаки, определяющие время, годы, дни; это правда, но, остерегаясь сказать, что оборот деревянного колеса и есть день, я все-таки не стал бы спорить, что это не время.

Пусть же не говорят мне: время — это движение небесных тел. Когда по молитве Солнце было остановлено, чтобы человек мог одержать победу, то Солнце стояло, но время шло».

способами в разных точках пространства. Иначе говоря, формула для замены  $t$  на  $\bar{t}$  должна быть написана следующим образом:

$$\bar{t} := f(x_1, x_2, x_3; t), \quad (13)$$

эта формула дает первое указание на значительно большую близость времени к пространству, чем это обычно предполагается. Очевидно, что физическое местное время в данной точке арифметизируется при помощи многообразия чисел; таким образом, физическое время в данной точке может служить интерпретацией одномерного пространства. Так как выбор физического местного времени в данной точке произволен, что соответствует произвольности арифметизации того «одномерного пространства», интерпретацией которого служит время, то, конечно, собственные свойства времени (физического) должны быть в данной точке пространства инвариантны относительно преобразований, установленных формулой (13). Одним из таких собственных свойств физического времени является промежуток между двумя моментами времени — понятие, аналогичное для одномерного «пространства» времени понятию физического расстояния в трехмерном физическом пространстве.

5. Промежуток между двумя моментами времени рассматривается всегда при условии, что мы имеем дело с одной и той же точкой пространства и с различными значениями физического местного времени, отвечающими разным моментам. Промежуток между двумя моментами времени есть измеримая интенсивность. Начальное значение промежутка времени есть промежуток между двумя совпадающими моментами. Единица измерения избирается определенным образом в связи со скоростью движения света. Промежуток между двумя моментами, различающимися друг от друга на бесконечно малое физическое местное время, назовем бесконечно малым промежутком. Так как нам нужны будут в дальнейшем лишь промежутки между двумя бесконечно близкими моментами, то мы и остановимся лишь на определении сих последних.

Для установления понятия о промежутке между двумя бесконечно близкими моментами времени опишем прежде всего особый инструмент, так называемые световые часы \*. Они состоят (рис. 16) из источника света  $S$ , посылающего луч света по определенному направлению, зеркала  $m$ , перпендикулярного лучу (правильнее, отражающего луч по направлению, прямо противоположному направлению падающего луча) и могущего быть передвигаемым на любое расстояние  $\tau/2$  от  $S$  и, наконец, приемника  $S'$ , находящегося в той же точке, что и  $S$ , и регистрирующего прибытие в  $S'$

\* Световые часы есть идеальный инструмент, совершенно отличный от того, что выше мы назвали часами в данной точке. Часы в данной точке служили нам лишь в качестве вспомогательного прибора, световые часы будут, наоборот, играть существенную роль, связанную с особой ролью, которую играет свет.



отраженного луча. Условимся длину, равную удвоенному расстоянию зеркала от источника света, называть *длиной светового луча*.

Бесконечно малым промежутком между двумя моментами времени в данной точке  $M$  пространства мы называем такую бесконечно малую длину  $d\tau$  светового луча в световых часах, при которой источник  $S$  дает сигнал в первый момент, а приемник  $S'$  регистрирует отраженный сигнал во второй момент. Очевидно, что в разных точках  $M$  пространства  $d\tau$  будет различным, ибо, вообще говоря, скорость движения света будет в разных местах различна. Если мы при измерении интенсивности промежутка возьмем другую единицу измерения, то число, измеряющее промежуток

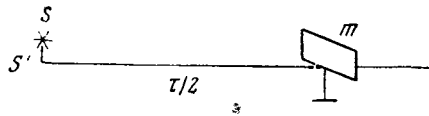


Рис. 16

будет уже не  $d\tau$ , а  $ld\tau$ , что, само собою разумеется, не существенно. Сравнивая бесконечно малый промежуток  $d\tau$  с бесконечно малым приращением местного физического времени  $dt$ , мы будем иметь

$$d\tau = T(x_1, x_2, x_3, t) dt, \quad (14)$$

где  $T$  зависит, конечно, как от положения точки  $M$  (от координат  $x_1, x_2, x_3$ ), так и от момента  $t$ . Функцию  $T$  мы экспериментально определим, воспользовавшись нашими световыми часами для разных точек пространства и в различные моменты времени. Промежуток, конечно, не зависит от способа установления физического местного времени. Если мы в самом деле закрепим зеркало  $m$  в световых часах так, чтобы длина светового луча равнялась бы  $d\tau$ , то, каким бы образом мы ни вводили физическое местное время, всегда промежуток между моментом светового сигнала и моментом регистрации возвратившегося сигнала будет (по определению) равен  $d\tau$ ; это обстоятельство можно выразить в виде требования инвариантности скорости света по отношению к преобразованиям вида (13). Так как промежуток времени мы связали с движением света, то тем самым мы приписали свету особую роль; в этом нет ничего удивительного, ибо при определении физической длины нам пришлось бы (ввиду элементарности вопроса мы в соответствующем месте статьи на этом подробно не останавливаться) приписать особую роль либо тому же свету, либо инструментам (твердым телам), служащим для измерения физического расстояния. Удобство и важное свойство световых часов заключается в том, что ими можно пользоваться в любой точке материального пространства, ибо свет (электромагнитные колебания и ток) движется (распространяется) во всех

материальных тел. Аналогичным образом постоянные звуковые часы не могли бы быть использованы, например, в тех частях материального пространства, которые заполнены только лучистой энергией. Они не могли бы служить для определения промежутков времени в межпланетном пространстве или в пространстве между молекулами, и, таким образом, понятие промежутка времени, установленное с помощью звуковых часов, вовсе отсутствовало бы во многих точках пространства.

## § 6. Движение

1. Рассматривая физическое пространство и время в отдельности, мы видели, каким образом произвольность арифметизации как пространства, так и времени заставляет признать, что собственные свойства пространства и времени, т. е. свойства, не зависящие от способа арифметизации, должны быть инвариантны по отношению к следующим преобразованиям чисел  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\bar{x}_3$  и  $\bar{t}$ , арифметизирующих пространство и время одним способом, в числа  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$ ,  $\bar{x}_3$  и  $\bar{t}$ , арифметизирующие пространство и время другим способом:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{t} &= f(x_1, x_2, x_3, t).\end{aligned}\tag{15}$$

Нетрудно видеть, что эти преобразования особо выделяют роль времени и не являются самыми общими преобразованиями одной четверки чисел, арифметизирующих пространство и время в другую четверку чисел.

Уже самый неестественный вид формул (15) показывает на необходимость дальнейшего их обобщения. Это вполне естественное обобщение может быть без труда получено, когда мы рассмотрим ближе связь физического пространства с физическим временем, связь, выражающуюся движением. Движение какой-либо материальной точки аналитически может быть выражено тем обстоятельством, что координаты этой точки будут функциями физического времени:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t).$$

Свойства движения изучаются в особом отделе механики — кинематике, которую по справедливости называют геометрией движения и которая становится действительной геометрией, если мы интерпретируем три координаты  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и время  $t$  как четыре координаты некоторого четырехмерного пространства; при такой интерпретации движение любой материальной точки будет нам задано в виде кривой в этом

четырёхмерном пространстве. Эта кривая вполне определит нам движение, т. е. жизнь нашей материальной точки, и, может быть, поэтому она названа кривою жизни материальной точки. Мы, следуя установившейся терминологии, будем называть эту кривую *мировой линией*, отвечающей нашей точке. Чтобы яснее представить себе только что указанную интерпретацию движения, сводящую кинематику к геометрии, упростим наше пространство до двумерной евклидовой плоскости и арифметизируем это пространство введением прямоугольных прямолинейных координат  $(x_1, x_2)$ . Чтобы интерпретировать движение, совершающееся в нашей плоскости, введем в рассмотрение трехмерное евклидово пространство, арифметизировав его с помощью введения прямоугольных прямолинейных координат так, чтобы две координаты были бы  $x_1, x_2$ , а третья была бы временем  $t$  (рис. 17). Движение в нашей плоскости будет выражено равенствами

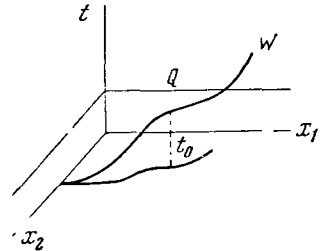


Рис. 17

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t);$$

геометрическое место положений движущейся точки даст нам траекторию  $C$ , но траектория не определяет вполне движения, ибо мы не можем по одной только траектории судить, в какой ее точке будет к данному моменту находиться наша материальная точка. Наоборот, мировая линия  $W$ , которая в нашем случае явится кривой в пространстве, вполне определит собой движение. В самом деле, взяв какую-либо точку  $Q$  на линии  $W$ , мы, опуская перпендикуляр на плоскость  $x_1 x_2$ , найдем точку траектории, в которой будет находиться наша материальная точка к моменту  $t$ , определяемому длиной этого перпендикуляра. Плоскость  $t = t_0$  будет плоскостью, параллельной нашей плоскости; пересечение плоскости  $t = t_0$  с мировой линией  $W$  определит собой как раз положение на плоскости нашей материальной точки. Таким образом, движение всех точек нашей плоскости вполне определится, если мы будем пересекать систему мировых линий наших точек плоскостями  $t = t_0$  и придавать  $t_0$  разные значения.

Положим (рис. 18), что двое идут по оси  $x_1$ , один с постоянной скоростью  $a$ , другой с постоянной скоростью  $b$ ; оба к моменту  $t = 0$  выходят из начала координат. Траектории у обоих пешеходов будут одинаковые, но мировые линии (прямые  $I$  и  $II$  рис. 18) будут различны; нетрудно также видеть (рис. 19), что мировая линия точки, движущейся равномерно по кругу, будет винтовая линия. Все, что сказано было для частного вида арифметизации двумерного пространства и времени, применимо и к общему случаю произвольной арифметизации пространства и времени. Задавая в четырехмерном пространстве определенную мировую линию, мы для

каждой точки этой линии будем знать все ее четыре координаты, т. е. числа  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и  $t$ , следовательно, будем знать положение нашей точки к моменту  $t$ . Положение всех точек трехмерного мира к моменту  $t = t_0$  мы получим, если систему мировых линий, отвечающих этим точкам, пересечем трехмерным пространством, получаемым из нашего четырехмерного, полагая  $t = t_0$ ; такое пространство будет частным видом того, что мы в дальнейшем условимся называть гиперповерхностью пространства четырех измерений. Таким образом, вся жизнь нашего физического

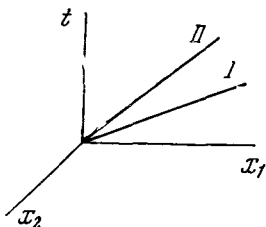


Рис. 18

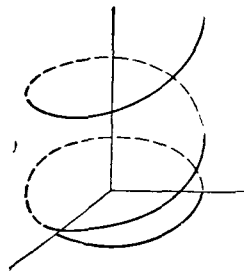


Рис. 19

пространства, сводящаяся к движению материальных тел, его состаряющих, может быть выражена системой мировых линий четырехмерного пространства.

2. Говоря о движении, мы рассматривали движения в физическом пространстве, т. е. в пространстве, заполненном материальными телами, в котором положение точки фиксируется при помощи определения материальных тел или процессов; поэтому движение, нами рассматриваемое, есть движение относительное по отношению к тем материальным телам, которые служат «координатной решеткой» для нашего физического пространства. Но очевидно, что физическое пространство мы смогли бы арифметизировать не при помощи тех тел, которые неподвижны, а при помощи тел движущихся; тогда вторые тела образовали бы физическое пространство, по отношению к которому двигались бы тела, сначала признанные нами неподвижными. Бесплезно было бы пытаться ответить на вопрос о том, какие же тела движутся и какие неподвижны, ибо самый термин «движется» может иметь смысл только относительный; можно рассматривать движение одной системы тел по отношению к другой системе. Решение вопроса, какое же движение истинное, эквивалентно решению бесплезного вопроса о том, что к чему привешено — хвост ли к собаке или собака к хвосту.

Спрашивается теперь, каким же образом осуществляется движение всех точек нашего трехмерного мира? Для осуществления этого движения

из каждой точки трехмерного пространства  $(x_1, x_2, x_3)$  необходимо провести мировую линию; эта мировая линия изобразит собой движение нашей точки. Пусть ко времени  $t$  наша точка, постоянно лежащая на мировой линии, будет иметь координаты

$$\bar{x}_1 = \varphi_1(t), \quad \bar{x}_2 = \varphi_2(t), \quad \bar{x}_3 = \varphi_3(t).$$

Так как каждой точке трехмерного мира соответствует своя мировая линия, то, очевидно, форма функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  будет разная для разных точек пространства и, значит, функции будут зависеть не только от  $t$ , но и от  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3; t) & \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3; t), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3; t). \end{aligned}$$

Один из способов арифметизации пространства состоит в сопоставлении каждой его точке чисел  $x_1, x_2, x_3$ ; при этом способе относительно точек нашего пространства материальные точки двигались согласно предыдущим формулам, но мы могли бы считать эти последние точки неподвижными, и тогда можно было бы арифметизировать пространство, сопоставив каждой его точке три новых числа:  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ . Таким образом, пространство и время мы можем арифметизировать — двумя способами: при помощи четверки чисел  $x_1, x_2, x_3$  и  $t$  или  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  и  $\bar{t}$ ; при этом переход от одного способа арифметизации к другому выразится формулами

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3; t), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3; t), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3; t), \\ \bar{t} &= f(x_1, x_2, x_3; t). \end{aligned} \tag{16}$$

Все собственные свойства пространства и времени должны иметь инвариантную форму по отношению к преобразованиям (16). В этих преобразованиях роль времени ничем особым не отличается от роли пространственных координат, и достаточно обозначить время  $t$  через  $x_4$ , а функцию  $f$  через  $f_4$  для того, чтобы даже внешняя форма преобразований (16) перестала бы указывать на особое положение времени; приняв только что указанные обозначения, мы перепишем формулы (16) в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \bar{x}_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, время свержается со своего пьедестала. Исполняются слова великого немецкого математика Минковского, поставленные эпиграфом к настоящему отделу, и физический мир представляется пред нами в своем истинном свете как совокупность вещей, называемых явлениями, характеризующихся при арифметизации четырьмя числами  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Физический мир может служить на основании сказанного интерпретацией пространства четырех измерений; явление физического мира становится интерпретацией точки четырехмерного геометрического пространства.

Вместе с этой новой точкой зрения на физический мир отпадают и те трудности исследования его, на которые мы указывали в конце предыдущего отдела. Время перестает мешать нашим исследованиям, наоборот, потеряв свое преимущественное положение, смешавшись с пространственными координатами, время становится деятельным помощником при исследовании уже не физического пространства и не физического времени, которых самих по себе нет, а совокупности пространства и времени — физического мира.

Собственные свойства этого физического мира инвариантны относительно преобразований (17), и если мы признаем, что все процессы физического мира происходят по законам, не зависящим от способа арифметизации физического мира, то все эти физические законы явятся собственными свойствами физического мира и будут иметь форму инвариантную относительно преобразований (17). Положение это, которое мы будем называть постулатом инвариантности, играет огромную роль в вопросе исследования и установления физических законов.

3. Полезно остановиться, хотя бы вкратце, на историческом пути, приведшем к представлению о четырехмерности физического мира и к постулату инвариантности. Этот исторический путь, являясь тернистым путем открытия истины, был совершенно отличен от того логического пути, который был изложен нами в предыдущих строках.

Вопрос о произвольности физического времени сначала не поднимался вовсе, время было одно — универсальное время, которое показывали нам звезды. Иначе обстояло дело с координатной системой для пространства; в течение многих веков казалось незыблемым прочное и преимущественное положение Земли, в течение долгих веков господствовала птоломеева картина мира. Коперник, один из первых толкнувший Землю в пространство и заставивший ее двигаться, перенес координатную систему на Солнце и относительно этой системы предложил изучать движение физического мира. Галилей и Ньютон, установившие начала механики, выяснили и сформулировали всем известный и всеми ощущаемый закон

инерции; истинный смысл этого закона заключался в том, что при помощи законов механики нет возможности узнать прямолинейное и равномерное движение. В двух физических пространствах, из которых одно неподвижно по отношению к третьему пространству, а другое движется прямолинейно и равномерно, все механические явления будут происходить совершенно одинаково. Выбрав для арифметизации пространства систему прямоугольных прямолинейных координат и предполагая, что движение одной системы относительно другой совершается по оси  $x_1$  с постоянной скоростью  $v$ , выразим закон инерции как требование инвариантности законов механики по отношению к преобразованиям следующего вида:

$$\bar{x}_1 = x_1 - vt, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3, \quad \bar{t} = t. \quad (18)$$

С развитием наших знаний о физическом мире к законам, касающимся явлений механических, прибавились законы о явлениях электромагнитных и в том числе о распространении света — этого особого вида электромагнитных волн. Выяснилось экспериментально, что пространство (эфир), где распространяются электромагнитные (световые) волны, не движется вместе с Землей (опыт Физо и др.); таким образом, хотя с помощью механических явлений и нельзя было, сидя в замкнутом помещении на земной поверхности, определить почти прямолинейное на малых участках пути и равномерное движение Земли по ее орбите, но оказалось, что с помощью световых явлений это сделать будет нетрудно, ибо свет распространяется в пространстве, которое вместе с Землей не движется, а значит, по отношению к свету также будет легко заметить движение Земли, как легко замечается движение лодки (сколь бы равномерно оно ни было) относительно неподвижных берегов реки. В 1881 г. Майкельсон произвел свой знаменитый опыт, долженствовавший обнаружить движение Земли относительно пространства, в котором распространяется свет. Результат опыта Майкельсона оказался отрицательным: не удалось подметить никакого влияния движения Земли на световые волны, распространяющиеся в движущейся вместе с Землей лаборатории. Приходилось допустить, что скорость эта совершенно одинакова, рассматриваем ли мы распространение света относительно неподвижного пространства или относительно пространства, движущегося прямолинейно и равномерно. Эта гипотеза в связи с законом инерции дала возможность исправить формулы (18), выражающие преобразования, происходящие с координатами при прямолинейном и равномерном движении, ввести в эти формулы некоторые малые величины, в обычных случаях на результаты численно почти не влияющие, но имеющие колоссальное принципиальное значение. Указанная поправка впервые поставила время на одну доску с координатами, и именно, начиная с этой ничтожной поправки, наступил конец царствования времени. Формулы (18) с введением указанной поправки дол-

жны были быть написаны так:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3, \quad \bar{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (19)$$

где  $c$  — скорость света; величина  $v/c$  ничтожно мала при малых наших обычных скоростях, поэтому формулы (19) практически почти ничем не отличаются от формул (18). Принципиально, однако, разница огромная, ибо последняя из формул (19) имеет характер формулы (13) и вводит сразу понятие о местном времени; кроме того, в формулах (19) время уже перестает играть ту исключительную роль, как в формулах (18). Формулы (19) положили начало так называемому специальному принципу относительности, введенному Эйнштейном и названному так за утверждение этой теории о невозможности определить прямолинейное равномерное движение пространства, находясь внутри этого самого пространства. Специальный принцип относительности впервые стал рассматривать не пространство и время в отдельности, а соединение их в виде физического мира, законы которого должны иметь форму, инвариантную по отношению к преобразованиям (19).

Специальный принцип относительности дал целый ряд следствий, интерпретация которых в физическом мире подверглась экспериментальной проверке и блестяще выдержала это испытание.

В связи со специальным принципом относительности, отвергавшим всякую возможность путем физического эксперимента определить изнутри движение пространства, движущегося прямолинейно и равномерно, могла возникнуть, и у Эйнштейна действительно возникла мысль о невозможности определить изнутри системы ее движение. Положим, что система  $A$  движется по отношению к системе  $B$ . Если  $A$  будет двигаться не равномерно и прямолинейно, а по кривому пути или вообще с ускорением, то в системе  $A$  будут происходить явления, которых не будет происходить в системе  $B$ . Например, ускоренный в первый момент подъем лифта прекрасно ощущается человеком; наблюдения над качающимися маятником (опыт Фуко в Пантеоне) показывают вращение Земли, все точки которой, описывая круговые траектории, движутся, конечно, с ускорением (центростремительным). Допустим, что, экспериментируя, мы нашли ряд явлений в системе  $A$ , совершающихся таким образом, как будто система  $A$  двигалась с ускорением по отношению к системе  $B$ . Можем ли мы отсюда заключить, что система  $A$  движется по отношению к системе  $B$ , а не наоборот? Имеет ли вообще какой-нибудь смысл это утверждение? Если в системе  $A$  возникнут вследствие предполагаемого ее движения силы, действующие на тела, в  $A$  находящиеся, каких сил в системе  $B$  не будет, то мы, конечно, можем заключить, что  $A$  движется с ускорением относительно  $B$ , но можем и, наоборот, признать, что силы,



действующие в системе  $A$ , имеют место всюду. Они действовали бы в системе  $B$ , если бы только  $B$  не двигалось бы относительно  $A$  ускоренно, но ускоренное движение  $B$  уничтожит всюду действующие силы. Чтобы еще яснее представить себе наше затруднение, вообразим, что мы, обладая прекрасными приборами, заметили бы на Земле так называемую отклоняющую силу вращения Земли, или силу Кориолиса, действующую на все находящиеся в движении около земной поверхности тела. Если бы Земля всегда была покрыта слоем облаков, не пропускающих света звезд, планет, луны и солнца, то можно безошибочно утверждать, что самая мысль приписать силу Кориолиса эффекту вращения Земли казалась бы и нелепой и бесполезной; эта кориолисова сила была бы свойством движущихся материальных тел, таким же свойством, каким мы признаем свойство всемирного тяготения. В системах, где отсутствовала бы сила Кориолиса, мы объяснили бы это отсутствие как раз соответствующим движением этой системы относительно нашей, не видящей небесного света, Земли. Изложенное показывает, что мы не только не можем, сидя внутри системы, установить ее равномерное и прямолинейное движение, но не можем и решить: из двух систем, движущихся ускоренно друг относительно друга, которая движется и которая стоит неподвижно. Невозможно решить, кто прав — Птоломей или Коперник; невозможно, если, конечно, не прибегать к раз и навсегда составленным в настоящей статье принципам целесообразности, экономии мышления и т. п. Одно из остроумнейших доказательств правильности коперниковой системы приведено в следующем стихотворении Ломоносова:

#### О движении земли

(Эпиграмма на противников системы Коперника)

Случились вместе два Астронома в пиру  
И спорили весьма между собой в жару.  
Один твердит: Земля, вертясь, круг Солнца ходит,  
Другой, что Солнце все с собой планеты водит.  
Один Коперник был, другой слыл Птоломей.  
Тут повар спор решил усмешкою своей.  
Хозяин спрашивал: ты звезд течение знаешь,  
Скажи, как ты о сем сомненьи рассуждаешь?  
Он дал такой ответ: что в том Коперник прав,  
Я правду докажу, на Солнце не бывав.  
Кто видел простака из поваров такого,  
Который бы вертел очаг кругом жаркова.

Принцип целесообразности ясно проглядывает в этих остроумных словах.

Итак, законы физического мира должны быть инвариантны по отношению к преобразованию координат, отвечающих любому движению, отсюда лишь один шаг до постулата инвариантности. Этот шаг может быть сделан, как выше мы видели, при помощи внимательного рассмотрения идеи физического времени. Таким образом, исторический более длинный путь привел нас также к четырехмерному физическому миру и к постулату инвариантности.

4. Физическое пространство и физическое время объединились в физический мир, интерпретирующийся геометрическим пространством четырех измерений. Законы физического мира суть собственные его свойства и подчинены постулату инвариантности. Время ничем не отличается от других координат.

Правильно ли это последнее заключение? Более внимательное рассмотрение вопроса покажет, что последнее заключение нельзя признать вполне правильным и что на постулат инвариантности, равно как и на способы арифметизации физического мира, должны быть наложены известные ограничения, возвращающие времени его исключительное положение. Я не могу подробно останавливаться на этом детальном вопросе, сравнительно мало разработанном в учении об относительности. Замечу только, что поводом к возвращению времени его исключительного значения служит принцип причинности, согласно одному из требований которого нельзя, изменяя арифметизацию физического мира, сделать так, чтобы причина и следствие поменялись бы местами. Этот принцип (формулированный, конечно, ясно и строго, а не так, как это сейчас сделано) должен наложить известные ограничения.

1) на способы арифметизации физического мира, при которых имеет место постулат инвариантности; арифметизировать можно, конечно, как угодно, но не для всякой арифметизации постулат инвариантности будет иметь место;

2) на свойства геометрического четырехмерного пространства, интерпретацией которого служит физический мир;

3) на выбор той из координат физического мира, которой будет приписана (связанная с принципом причинности) роль времени.

Не останавливаясь более на все же, по-видимому, сохраняющихся особенностях времени и выяснив с достаточной подробностью понятия физического пространства, времени, движения и мира, перейдем к геометрической, если можно так выразиться, их интерпретации.

## § 7. Мир

1. Рассматриваемое с совершенно абстрактной точки зрения время есть совокупность вещей, называемых моментами и стоящих между собой и к пространству (трехмерному) в определенных отношениях, могущих быть установленными особыми кинематическими аксиомами и следствиями из них. Рассматриваемое само по себе время образует то, что можно было бы назвать «пространством» одного измерения; рассматриваемое в связи с трехмерным пространством время образует пространство четырех измерений. Время (абстрактное) может быть арифметизировано совершенно произвольным образом; всякому моменту будет всегда отвечать определенное число  $t$ . Переход от одной арифметизации времени, рассматриваемого само по себе, к другой выразится заменой числа  $t$  на  $\bar{t} = f(t)$ . Абстрактное время как «пространство» одного измерения будет иметь свою метрику. Условимся бесконечно малое «расстояние» двух моментов называть бесконечно малым промежутком времени и обозначать  $d\tau$ ; если при арифметизации времени указанным моментам отвечают числа  $t$  и  $t + \Delta t$ , то  $d\tau = T dt$ , где  $T$  зависит от  $t$ . Само собой разумеется, что промежуток времени  $d\tau$  не зависит от способа арифметизации времени. Если, однако, рассматривать абстрактное время не само по себе, а в связи с трехмерным пространством, то пространство-время может быть опять-таки произвольным образом арифметизировано при помощи четверок чисел; тогда определенной точке трехмерного пространства и определенному моменту абстрактного времени будет отвечать одна, и только одна, четверка чисел:  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Переход от одного способа арифметизации к другому выразится заменой одной четверки чисел:  $x_1, x_2, x_3, x_4$  другой четверкой:  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ , так как одна четверка вполне определяет другую и обратно, то мы будем иметь следующие формулы перехода:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \bar{x}_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4).\end{aligned}\tag{20}$$

Четырехмерное пространство, о котором мы только что говорили\* (пространство-время), условимся называть геометрическим миром или просто миром.

Определенной точке мира, которую мы будем называть иногда явлением, отвечает одна определенная точка пространства и один определенный момент времени. Все сказанное в предыдущей главе может быть перенесено на четырехмерное пространство, и таким образом может быть установлена геометрия этого четырехмерного пространства, иначе

\* В отличие от разобранного выше мира физического.

говоря, геометрия мира. Несобственные свойства мира будут зависеть от способа его арифметизации, собственные свойства мира (например, величины расстояния двух точек, векторная и метрическая кривизны) не будут зависеть от способа арифметизации мира и будут, следовательно, выражены в инвариантной форме (в установленном выше смысле этого слова) относительно преобразований координат, указанных формулами (20). Условимся называть интервалом расстояние между двумя точками (явлениями) нашего мира; расстояние двух бесконечно близких точек нашего мира будет бесконечно малым интервалом; метрика мира (а значит, и определение бесконечно малого интервала) будет зависеть от десяти величин, составляющих фундаментальный метрический тензор. Параллельное перемещение в нашем мире может зависеть помимо этих десяти величин еще от четырех величин масштабного вектора. Следует заметить, что с термином «интервал» пока не должно связывать никакого конкретного содержания.

2. Выберем, пока совершенно произвольно, одну из координат мира за временную координату. Условимся так нумеровать координаты, чтобы брать за временную координату всегда  $x_4$ . Остальные координаты  $x_1, x_2, x_3$  условимся называть пространственными координатами. В нашем мире мы различаем, как и в трехмерном пространстве, два геометрических места точек; одно из таких геометрических мест будет состоять из точек, удовлетворяющих соотношению

$$f(x_1, x_2, x_3, x_3) = 0.$$

Назовем это геометрическое место (аналогичное поверхности нашего пространства) гиперповерхностью мира. Нетрудно, конечно, заметить, что гиперповерхность мира будет обладать свойством пространства трех измерений, однако термин пространства мы сохраним для других надобностей и не будем прилагать его к гиперповерхности вообще. Из гиперповерхностей особый интерес может представить для нас гиперповерхность, уравнение которой имеет вид  $x_4 = x_{40}$  и которое получается, полагая временную координату постоянной. Эта гиперповерхность будет геометрическим местом явлений мира, отвечающих определенному значению временной координаты; точки этой гиперповерхности будут иметь произвольные пространственные координаты, и мы условимся называть эту гиперповерхность пространством, отвечающим данному моменту  $x_{40}$ . Другое геометрическое место точек нашего мира будет аналогично кривой нашего пространства и будет называться мировой кривой. Мировая кривая будет геометрическим местом точек, определяемых равенствами

$$x_1 = \Phi_1(u), \quad x_2 = \Phi_2(u), \quad x_3 = \Phi_3(u), \quad x_4 = \Phi_4(u),$$

где  $u$  — произвольный параметр. Исключая параметр  $u$  из указанных четырех уравнений, получим три соотношения между координатами  $x_1, x_2,$

$x_3$ ,  $x_4$  мира. Простейшей мировой кривой является кривая, в которой упомянутые три соотношения сводятся к приравнению пространственных координат постоянным величинам:

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad x_3 = x_{30}.$$

Временная координата на такой кривой произвольна, различным точкам этой кривой будут отвечать различные значения временной координаты; такую мировую кривую назовем временем, отвечающим данной точке  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$  пространства. Мировые кривые делятся естественно на два класса. Те мировые кривые, у которых временная координата постоянна:  $x_4 = x_{40}$  (не зависит от параметра  $u$ ), называются пространственными линиями или траекториями. Пространственная линия целиком лежит в пространстве, отвечающем некоторому моменту (именно на гиперповерхности  $x_4 = x_{40}$ ) и является типичным образцом упоминавшихся уже нами кривых в пространстве трех измерений. Мировые кривые, не принадлежащие к пространственным линиям, образуют другой класс кривых; в них временная координата  $x_4$  зависит от параметра  $u$ . Значит,  $u$  может быть выражен в зависимости от  $x_4$ , и уравнения мировой кривой по исключению  $u$  дадут соотношения

$$x_1 = \psi_1(x_4), \quad x_2 = \psi_2(x_4), \quad x_3 = \psi_3(x_4),$$

которые совершенно совпадают (если заменить  $x_4$  на  $t$ ) с теми уравнениями, которые в предыдущем параграфе служили для определения мировой линии в физическом мире. Мировые кривые этой второй категории будем называть временными мировыми линиями или просто мировыми линиями; движением будем называть вещь, вполне определенную мировой линией. Таким образом, выражение «задано движение» будет вполне эквивалентно выражению «задана мировая линия».

Нетрудно видеть, что все наши определения подобраны так, чтобы объект, называемый соответствующим термином в физическом мире, служил бы интерпретацией понятия, обозначенного этим же термином в мире геометрическом. Так, например, движение в мире физическом является интерпретацией движения в мире геометрическом, мировая линия в физическом мире интерпретирует мировую линию мира геометрического. Геометрическое пространство не имеет самостоятельного значения, являясь лишь гиперповерхностью геометрического мира, что вполне соответствует отсутствию самостоятельного существования у физического пространства, которое немислимо без физического времени.

3. Перейдем теперь к вопросу о метрике мира, иначе говоря, к вопросу об определении бесконечно малого интервала, который в целях краткости обозначим через  $d\sigma$ ; квадрат бесконечно малого интервала зависит

от квадратов и произведений по два приращений  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$ , а также от фундаментального метрического тензора мира. Выпишем выражение для интервала:

$$d\sigma^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{31}dx_3dx_1 + 2g_{12}dx_1dx_2 + \\ + 2g_{14}dx_1dx_4 + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4 + g_{44}dx_4^2. \quad (21)$$

Уже из способа написания квадрата интервала видно, что временная координата выделена нами особо. Нетрудно видеть, что в двух частных случаях наш интервал превращается или в нечто, напоминающее расстояние  $ds$ , или же в нечто, напоминающее промежуток между двумя моментами  $d\tau$ . Рассмотрим бесконечно малый интервал  $d\sigma_1$  двух явлений, имеющих одну и ту же временную координату, т. е. находящихся в некотором (одном и том же) пространстве, в вышеупомянутом смысле этого термина. Для этих явлений  $x_4$  будет постоянно, значит,  $dx_4 = 0$ , и формула для  $d\sigma^2$  превратится в формулу (9) для квадрата бесконечно малого расстояния  $ds^2$ , т. е.  $d\sigma_1^2 = ds^2$  или  $d\sigma_1 = ds$  (ибо знаком мы всегда можем соответственно распорядиться). Так как мы рассматриваем пространство лишь как гиперповерхность мира, то можем условиться метрику пространства определять тем  $ds = d\sigma_1$ , который получается из  $d\sigma$ , полагая  $dx_4 = 0$ .

Рассмотрим теперь бесконечно малый интервал  $d\sigma_2$  двух явлений, имеющих одинаковые пространственные координаты, т. е. таких, которые разнятся друг от друга лишь временной координатой и в которых, следовательно,  $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$ . Интервал таких двух явлений определяется формулой  $d\sigma_2^2 = g_{44}dx_4^2$ ; так как мы рассматриваем время лишь как некоторую мировую линию, то можем условиться метрику времени определять тем промежутком  $d\tau$ , квадрат которого получается, полагая в  $d\sigma^2$ :  $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$  и меняя в полученном выражении знак; иначе говоря, для  $d\tau^2$  получим равенства  $d\tau^2 = -d\sigma^2 = -g_{44}dx_4^2$ ,  $d\tau = \sqrt{-g_{44}}dx_4$ . Сравнивая эту формулу с выражением (14) для  $d\tau$ , в § 5 найдем, что  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{-g_{44}}$ , причем в формуле (14) заменено  $t$  и на  $x_4$ .

Из сказанного видно, что метрика мира определяет сама собой и метрику пространства для любого момента времени и метрику времени для любой точки пространства. Метрика мира не является вполне произвольной; мы требуем, чтобы расстояния в пространстве выражались вещественными (не мнимыми) числами, точно так же вещественным числом должен выражаться промежуток времени. Это требование может быть выражено в следующем постулате вещественности пространства и времени\*.

\* Постулат мною несколько упрощен, дабы сделать его более наглядным, на самом деле его следовало бы дополнить теми условиями, кои вытекают из применения так называемого «закона инерции» к форме для  $d\sigma^2$ . (Например, Hilbert. Die Grundlagen der Physik, 2-te Mitteilung.)

Метрика мира должна быть такова, чтобы интервал был бы веществен во всех точках мира и для всех явлений, имеющих общую временную координату (квадрат интервала при этих условиях должен быть положительным), и чтобы интервал был бы чисто мнимым во всех точках мира и для всех явлений, имеющих общие пространственные координаты (квадрат интервала в этих условиях должен быть отрицательным).

Постулат вещественности пространства и времени имеет чрезвычайно сильное влияние на метрику мира; с этим постулатом ближайшим образом связан принцип причинности. Этот же постулат позволяет направления мировых кривых разделить на два класса: пространственно подобные и времени подобные направления; первые характеризуются тем, что величина бесконечно малого четырехмерного вектора, их характеризующего (соответствующий интервал), положительна, тогда как для вторых эта величина отрицательна. Всякая пространственная линия имеет пространственноподобное направление, всякая мировая кривая, названная нами временем, имеет, наоборот, времяподобное направление. Пространственноподобные направления отличаются от времяподобных направлений особой гиперповерхностью (чем-то вроде конуса); на этой гиперповерхности, называемой нулевым конусом, интервалы ее точек все обращаются в нуль. Переход через нулевой конус соответствует переходу от пространства ко времени. Не имея возможности останавливаться на разбираемых вопросах более подробно, отмечу, что понятие «угла», имеющее вполне определенный смысл для двух пространственноподобных или для двух времяподобных направлений, должно быть видоизменено при рассмотрении угла пространственноподобного и времяподобного направления. Словом, нулевой конус образует в мире как бы границу, отделяющую одну часть этого мира от другой, имеющей совсем особые свойства\*.

Постулат вещественности налагает известные условия на арифметизацию мира: арифметизация должна быть такова, чтобы в новой координатной системе также можно было бы выделить пространственную и временную координаты, причем и в новых координатах постулат вещественности должен иметь место; такую арифметизацию назовем и з б р а н н о й.

С помощью постулата вещественности можно было бы доказать, что два явления, лежащие на мировой линии, относящиеся к разным моментам времени, не могут с помощью изменения арифметизации превратиться в

---

\* Нулевой конус — своего рода особенность в пространстве для многозначных функций ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ).

явления одновременные, коль скоро арифметизация при своем изменении не перестанет быть избранной. Таким образом, два явления, могущие быть рассматриваемыми как причина и следствие, никогда нельзя сделать при помощи изменения арифметизации одновременными, иначе говоря, такие два явления всегда будут находиться\* друг к другу в отношении причины к следствию.

4. Нам остается перейти теперь к вопросу о том, каким образом, исследуя экспериментально физический мир, мы смогли бы установить метрику того геометрического мира, для которого наш физический мир является интерпретацией. Прежде всего нам нужно было бы условиться, каким образом физический мир интерпретирует мир геометрический. Положим, что мы выполнили это требование и составили словарь, при помощи которого можно выяснить, какой объект физического мира интерпретирует определенное понятие (вещь) мира геометрического. Словарь этот целиком зависит от нашего произвола; таким образом, мы можем интерпретировать геометрический мир, тем или иным способом при помощи мира физического. Но положим, что нами выбран определенный способ интерпретации и условимся одним и тем же термином обозначать и понятие (вещь) геометрического мира и интерпретирующий его объект мира физического.

Раз это сделано, то, измеряя интервалы в физическом мире, мы будем иметь возможность экспериментально исследовать метрику мира геометрического (см. § 3). Далее, параллельно перемещая вектор по замкнутой линии в мире физическом, мы определим его векторную и метрическую кривизны, а значит, установим масштабный вектор и свойства параллельного перемещения мира геометрического (см. § 4). Принципиально, таким образом, вопрос изучения геометрического мира, данной (условленной) интерпретацией которого является мир физический, решен. Однако сразу же возникает вопрос: сможем ли мы, люди, производить указанные эксперименты или же для их производства нужно перестать быть людьми и стать богами. Ответ на этот вопрос может быть дан утешительный: указанные эксперименты мы производить можем (не практически, конечно, а принципиально). В самом деле, время, являющееся для нас по-

---

\* Следует отметить, что любые два явления  $A$  и  $B$ , имеющие разные временные координаты, рассматриваются нами как причина и следствие, причем  $A$  можно рассматривать и как причину, и как следствие  $B$ . Если  $A$  есть причина  $B$ , т. е. если  $x_{4A} < x_{4B}$ , то заменяя  $x_4$  на  $\bar{x}_4 = -x_4$ , каковое преобразование дает нам опять-таки из-б равную арифметизацию, мы будем иметь, что  $\bar{x}_{4A} > \bar{x}_{4B}$ , т. е.  $B$  будет причиной  $A$ . Таким образом, изменяя знак у времени, мы всегда можем изменять следствие на причину. Если последовательность причины—следствия должна остаться неизменной, то помимо постулата вещественности необходимы еще другие добавочные ограничения свойства мира и произвола его арифметизации.



мехой при изучении физического пространства, время, разбившее даже самую идею об отдельно существующем физическом пространстве, это же время будет служить нам прекрасным помощником при определении интервала, куда разность входит наравне с пространственными разностями.

Однако в измерении интервала мы прежде всего столкнемся с тем обстоятельством, что произвольно распоряжаться временем мы будем не в состоянии; таким образом, мы можем экспериментально определить метрику мира лишь для весьма ограниченного времени.

Далее, принципиальная возможность изучения геометрического мира сталкивается с существенным дефектом нашей экспериментальной техники, а именно с затруднениями при измерении интервала. Нам нужно так или иначе обойти оба указанные затруднения и найти те величины, измерять которые во всем мире было бы доступно нашими техническими средствами и которые в то же время могли бы установить свойства геометрического мира. Эти величины нашла гениальная мысль Римана, развитая Эйнштейном и Weyl'ем, мысль о связующих силах, определяющих свойства мира. В движении и в силах, возникающих и действующих во время движения, нужно было искать те способы, при помощи которых можно было бы определить геометрию мира. Разбору этого вопроса я посвящаю следующую главу.

### Глава III

#### ТЯГОТЕНИЕ И МАТЕРИЯ

*«Es muss also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden».*  
 Riemann. Ueber die Hypothesen, welche (der Geometrie zugrunde liegen)

#### § 8. Старая и новая механика

1. Изучая движение, иначе говоря, рассматривая мировые линии, мы разделяем движения на два класса: к одному классу мы относим движение по инерции, относительно другого класса мы говорим, что движение в нем происходит под действием сил. Деление движений на эти два класса вполне произвольно и в нашей воле; на самом деле мы производим указанное деление, повинаясь, конечно, принципам целесообразности. Произведя это деление, мы устанавливаем, каким образом может быть арифметизирована сила, отвечающая какому-либо из движений не по инерции. Нетрудно видеть, что деление на указанные два класса составля-

ет содержание закона инерции, или первого закона Ньютона, тогда как определенный способ арифметизации силы является ничем иным, как вторым законом Ньютона. Условимся называть принципом инерции указанное деление движений на два класса и посмотрим, как вводился в старой механике этот принцип. По поводу деления движений на два класса невольно вспоминается учение Аристотеля о «совершенных движениях» (круговые движения считались совершенными); прав Соломон, восклицая: «Что было, то и будет, и что делалось, то и будет делаться — и нет ничего нового под Солнцем...» (Екклезиаст).

При установлении в старой механике принципа инерции предполагалось прежде всего, что пространство наше является пространством евклидовым, а за физическое время принималось время звездное. Движение прямолинейное и равномерное (по отношению к звездному) относилось к первому классу движений, к движениям по инерции. Все остальные движения назывались движениями под действием силы, причем силой называлось определенное понятие, отвечающее каждому движению материальной точки и арифметизировавшееся определенным образом (пользуясь ускорением).

Посмотрим, как при помощи идеи о мировых линиях может быть выражен принцип инерции Ньютона. Обратимся ради простоты снова к двумерному пространству — плоскости, арифметизировав его при помощи введения прямоугольных прямолинейных координат; тогда прямолинейное и равномерное движение выразится формулами  $x_1 = a_1 t + b_1$ ,  $x_2 = a_2 t + b_2$ , где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  — постоянные, а  $t$  — звездное время. Переходя к миру для нашего двумерного пространства, т. е. пользуясь трехмерным евклидовым пространством, в котором ось  $t$  перпендикулярна осям  $x_1$ ,  $x_2$  (см. рис. 17), найдем, что движению по инерции соответствует мировая линия в виде прямой; если мировая линия, отвечающая данному движению, не прямая, то движение происходит (по определению) под действием сил.

Указанный нами выше постулат вещественности делает невозможным столь наглядное, аналогичное только что приведенному, изображение мира; нам достаточно, однако, того обстоятельства, что старая механика требует особых геометрических свойств нашего мира; не входя в обсуждение того, какие это свойства, условимся мир с этими геометрическими свойствами называть евклидовым\*; принцип инерции в старой механике при указанном согласовании можно будет формулировать следующим образом.

В евклидовом физическом мире лишь те движения происходят по инерции, мировые линии

\* В этом евклидовом мире мы будем иметь  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$  при соответственно выбранной арифметизации мира.

которых суть прямые линии. Все остальные движения будут движениями, происходящими под действием сил.

Следует при этом отметить, что термин «прямая линия» должно разуметь в указанном выше смысле (см. § 4, где говорится о параллельном перемещении); в самом деле, можно без труда доказать, что эти «прямые линии» в евклидовом мире суть как раз обычные прямые, уравнения которых в прямоугольных прямолинейных координатах будут  $x_1 = a_1 t + b_1$ ,  $x_2 = a_2 t + b_2$ ,  $x_3 = a_3 t + b_3$ . Принцип инерции старой механики налагает наперед известные ограничения на физический мир, требуя, чтобы он был миром евклидовым; освобождение от этого ограничения и является характерной чертой новой механики Эйнштейна.

2. В новой механике принцип инерции формулируется так же, как и принцип инерции в старой механике, нужно только отбросить требование (в сущности произвольное) для мира быть евклидовым; таким образом, новая механика устанавливает следующий принцип инерции.

Движениями по инерции называются такие движения, мировые линии которых суть прямые нашего мира. Все другие движения суть движения под действием сил.

Остается теперь в новой механике, как и в старой, установить арифметизацию силы. К сожалению, мы не можем входить в достаточные подробности по этому вопросу, так как детальное развитие понятия силы в новой механике требует довольно большого математического аппарата. Для наших целей, однако, является совершенно достаточным отметить, что арифметизация силы зависит от величин двух сортов: прежде всего эта арифметизация зависит от тех чисел (их будет четыре), которые характеризуют степень отклонения мировой линии, отвечающей нашему движению, от прямой; эти числа называются ускорением; для евклидова мира эти числа сведутся к обычному понятию об ускорении. Но так как одно и то же движение может быть совершаемо различными материальными точками, то второй величиной, входящей в арифметизацию силы, является число, отличающее одну материальную точку от другой и называемое массой материальной точки. При помощи числа, являющегося массой материальной точки, образуют понятия массы материальной точки и массы материального тела; пользуясь же некоторыми геометрическими свойствами тела (объемом), образуют понятие плотности. Физическое пространство, заполненное все материальными телами, обладает в каждой точке своей к заданному моменту определенной плотностью; таким образом, в физическом мире каждой точке сопоставляется особое число  $\rho$  — плотность; очевидно, что для разных точек мира  $\rho$  может быть разное, поэтому  $\rho$  является функцией координат точек мира:

$$\rho = \theta(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Изучая мировые линии материальных точек в физическом мире, мы могли бы, зная геометрию мира, определить, когда наши материальные точки движутся по инерции и когда на них действуют силы. Далее, разбираясь в указанных мировых линиях, мы могли бы определить силы, действующие на наши материальные точки. При этом легко было бы, произведя достаточное число экспериментов, выяснить, что каждой точке мира соответствует одна и только одна сила. Таким образом, мир явился бы своеобразным полем сил; конечно, в пространстве, в одной и той же его точке силы бы менялись и непосредственно в зависимости от времени, и в зависимости от времени в силу того, что через данную точку пространства в разное время проходили бы разные материальные точки. Но можно установить, что в мире каждой его точке (явлению) будет отвечать одна и только одна сила: в одной и той же точке пространства не может одновременно быть и отсутствовать какая-либо сила\*. Для того, однако, чтобы иметь возможность определить указанное поле сил в мире, нам нужно было бы установить геометрию мира, а мы видели, что это сопряжено с весьма большими трудностями. Невозможность сейчас экспериментально решить вопрос о геометрии мира заставляет нас делать на счет этой геометрии определенные гипотезы. Старая механика сразу же делает чрезвычайно узкую гипотезу о том, что наш мир есть евклидов. Сделав это весьма сильное ограничение, старая механика много выиграла; ее законы приобрели необычайно простой характер, и этой простоте мы обязаны грандиозным развитием наших знаний, нашей технической культуры. Новая механика сначала пытается обойтись без дополнительных гипотез о геометрическом характере нашего мира. Она может это сделать, но будет обречена тогда на жалкое и бесплодное существование в течение многих веков. Чтобы стать плодотворной, новой механике по ограниченности наших экспериментальных средств так же, как и механике старой, нужны дополнительные гипотезы о геометрическом характере нашего мира. Эти гипотезы и были сделаны сначала Эйнштейном (гипотеза тяготения), а затем в более общей форме Weyl'ем (гипотеза материи). Характер этих гипотез сильно отличается от гипотезы старой механики об евклидовом мире; главное отличие новых гипотез, как это и следовало ожидать, сообразно прогрессу науки, в их большей широте и общирности; они не определяют сразу метрики мира, как это делает старая механика, а указывают лишь известные свойства этой метрики, предоставляя опыту установить метрику окончательно. Перейдем теперь к изучению указанных гипотез.

---

\* Во избежание недоразумений считаю необходимым заметить, что силу, действующую в данный момент и в данной точке пространства, конечно, можно разделить на несколько сил составляющих, но все они дадут одну и только одну определенную для данного момента в данной точке равнодействующую силу.

## § 9. Тяготение

1. Посмотрим прежде всего, что старая механика извлекает из своей гипотезы об евклидовом характере геометрии мира. Рассмотрим с точки зрения старой механики движения материальной точки в материальном пространстве, значит, при наличии других материальных тел. В одних областях этого пространства наша материальная точка будет двигаться почти по инерции, в других ее движение по инерции будет нарушаться, и мы будем констатировать действие силы. Особые материальные объекты, которые мы зовем тяготеющими массами (например, солнце, планеты и т. п.), вызовут чрезвычайно значительные силы. Исследуя отклонения от движения по инерции нашей точки в присутствии материальных объектов, названных нами тяготеющими массами, мы в состоянии будем установить действие на нашу точку особых сил, связанных с этими тяготеющими массами. Если наша материальная точка будет характеризоваться при помощи лучей света, то указанное действие тяготеющих масс будет ничтожно и едва измеримо, но если наша материальная точка будет сама принадлежать к разряду тяготеющих масс, дело в корне изменится и ее движение будет сильно отличаться от движения по инерции. Исследуя эти различия, мы придем к законам всемирного тяготения. Именно таким путем шел Ньютон, изучавший при помощи законов Кеплера движения материальной точки тяготеющей массы — планеты Марса — вокруг тяготеющей массы — Солнца. В обычных терминах евклидовой геометрии и старой механики закон всемирного тяготения может быть, как известно, формулирован следующим образом: на каждую из двух тяготеющих масс действует сила притяжения, направленная от одной к другой тяготеющей массе и по величине прямо пропорциональная массам тяготеющих масс и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

Если материальная точка движется не вблизи тяготеющих масс, а вблизи каких-либо иных материальных тел, например в потоке электромагнитных волн (света), то таковая точка также не будет двигаться по инерции, на нее будет действовать, например, сила светового давления; таким образом, помимо силы всемирного тяготения могут быть и разного рода иные силы. Если наша точка будет двигаться вблизи материальных объектов электромагнитного характера, то условимся называть указанные силы электромагнитными. Могут быть и еще какие-либо силы, которые назовем дополнительными. Мы приходим, таким образом, к заключению, что на материальную точку могут действовать три сорта сил: 1) сила всемирного тяготения; 2) электромагнитные силы и 3) силы дополнительные. Изучение действия этих сил составляет содержание самой механики и физики; по-видимому, все силы, действу-

ющие на всякого сорта материальные точки (будут ли эти точки тяготеющими массами или нет), сводятся или к силам всемирного тяготения, или к силам электромагнитным. При этом само собой разумеется, что арифметизация нашего мира проводится определенным образом; например, выбирается звездное время, а координатная система строится при помощи так называемых неподвижных звезд. Ни о каком принципе инвариантности, в его общей форме, в старой механике не может быть и речи; раз координатная система определенным образом выбрана, то силы, возникающие вследствие вращения земли, явятся, конечно, силами фиктивными и в перечень указанных выше сил не попадут.

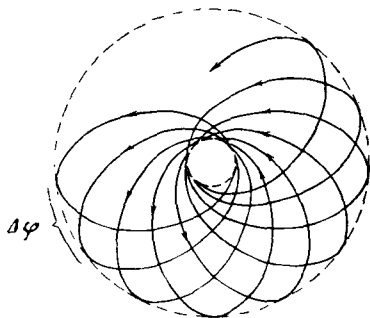


Рис. 20

2. Оставаясь в рамках старой механики, остановимся более подробно на силе всемирного тяготения. Пользуясь этой силой, оказалось возможным с величайшей подробностью и точностью изучить и, если так можно выразиться, объяснить движение планет нашей системы, а затем и ряд движений звездных систем (двойные звезды и т. п.). Конечно, планеты нашей системы, находящиеся под совокупным влиянием

многих тяготеющих масс и к тому же являющиеся вовсе не точками, движутся гораздо более сложным и запутанным образом, чем материальные точки, подчиненные простому закону всемирного тяготения, при наличии одной тяготеющей массы. Однако небесная механика превосходно справилась со всеми затруднениями, и огромное большинство движений планет уложилось в рамки закона всемирного тяготения. Существовали тем не менее маленькие детали движения планет, ускользавшие от объяснения их, при помощи обычных методов небесной механики. Такой деталью являлся необъяснимый остаток движения перигелия Меркурия. Ближайшая к Солнцу точка, в которой бывает Меркурий из года в год, перемещается (рис. 20), и остаток этого маленького перемещения ( $43''$  в 100 лет) не был до последнего времени удовлетворительно объяснен при помощи законов классической небесной механики; заметим, что Меркурий ближе всех планет к Солнцу и как раз в движении этой планеты оказалась наибольшая неувязка с принципами небесной механики. Выше мы отметили, что старая механика должна была при арифметизации пространства мира выбрать определенную, связанную со звездною, координатную систему. Можно было для фантастического объяснения всемирного тяготения предположить, что для старой механики нужно брать не указанную координатную систему, а какую-то другую, относительно которой координатная система, связанная со звездами, определенным об-

разом движется; под влиянием этого движения появляются кажущиеся силы, и именно эти силы мы замечаем в явлении всемирного тяготения. Само собой разумеется, что в рамках старой механики эта гипотеза явилась бы фантастической и нетрудно было бы показать, что нельзя придумать никакого движения нашей координатной системы как целого, которое объясняло бы явление всемирного тяготения. Дело было бы значительно проще, если бы всемирное тяготение выродилось бы в постоянную и постоянно одинаково направленную силу, равную по величине массе, умноженной на постоянное ускорение  $g$  силы тяжести. Вот такую выродившуюся силу всемирного тяготения (лучше уж сказать «всемирной тяжести») нетрудно было бы объяснить кинематически. В самом деле, если бы наша звездная координатная система двигалась бы прямолинейно и равноускоренно с ускорением  $g$  относительно координатной системы старой механики, то в такой движущейся системе мы получили бы кажущуюся силу, совпадающую с нашей силой «всемирной тяжести». Я не останавливаюсь на этом подробнее, так как этот пример «всемирной тяжести» излагается во всех популярных брошюрах и книгах по принципу относительности. Пример этот характерен лишь в качестве указания на возможность кинематически объяснять некоторые силы, но он дает совершенно превратное впечатление, будто бы в рамках старой механики можно кинематически объяснить силу тяготения, что совершенно неверно.

Для кинематического объяснения силы тяготения большую роль, по крайней мере исторически, сыграл тот экспериментально с большой точностью подтвержденный факт, что масса, входящая в формулировку законов всемирного тяготения (масса гравитационная), идентична с массой, упоминаемой во втором законе Ньютона (масса инерционная), согласно которому произведение массы на ускорение равняется силе. Eotvös чрезвычайно остроумными измерениями показал, что с точностью до  $1/10^8$  эти две массы — гравитационная и инерционная — идентичны. Если это обстоятельство не случайно, то естественно появляется желание объяснить силу тяготения кинематически и счесть ее силой кажущейся или (сообразно началу Делаμβера) силой инерции; в силу инерции множителем входит масса инерционная, в силу тяготения — масса гравитационная; обе эти массы тождественны; быть может, сила тяготения есть сила кинематическая. Эта гипотеза невозможна в рамках старой механики и старых воззрений на евклидов характер мира. Нельзя ли использовать ее в рамках новой механики, и при помощи этой механики сделать известного рода общие предположения о геометрии мира, связав при помощи этих предположений метрику мира с явлением тяготения, и, таким образом, вовлечь астрономию и небесную механику с их поразительно точными методами в круг вопросов экспериментального установления геометрии мира? Таким представляется путь, который приводит к установлению основных положений эйнштейнова общего принципа относительности.

3. Перейдем теперь к установлению гипотез, делаемых в теории Эйнштейна\*, о некоторых свойствах мира физического и о геометрии того мира, условной интерпретацией которого и является наш физический мир. Эти гипотезы можно формулировать в виде трех положений.

1. Геометрия мира есть Риманова геометрия. Значит, прямая линия мира есть вместе с тем кратчайшая линия, масштабный вектор отсутствует и метрическая кривизна мира равна нулю.

2. Материальная точка под действием тяготеющих масс движется по инерции.

Иначе говоря, мировая линия материальной точки, находящейся под действием тяготеющих масс, является прямой для нашего мира; эта вто-

рая гипотеза является гипотезой, коль скоро нами установлен процесс, отвечающий в физическом мире параллельному перемещению мира геометрического; если этот процесс установлен, то тем самым определена и прямая нашего физического мира. Но мы можем на указанную гипотезу смотреть, как на установление того процесса, который будет отвечать параллельному перемещению в геометрическом мире. Положим в самом деле, что мы определили прямую физического мира как мировую линию точки, находящейся под действием тяготеющих масс, положим также, что мы умеем определять физические направления, вектора и углы между ними, положим, что из точки  $M_1$  в точку  $M$  по кривой  $C$  (рис. 21) в

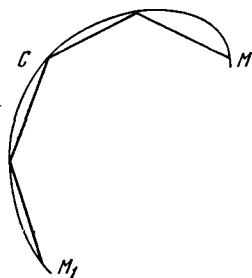


Рис. 21

физическом мире нам нужно переместить параллельно вектор  $a$ ; для выполнения указанного перемещения разобьем кривую  $C$  точками на бесконечно малые части и между каждыми соседними проведем прямую (т. е. мировую линию точки, под действием соответственных тяготеющих масс находящейся). Вдоль по каждой прямой переместить параллельно наш вектор  $a$  будет нетрудно, достаточно будет сохранить постоянным его угол с направлением прямой (см. § 4); совершив перемещение по каждой прямой, мы переведем наш вектор в точку  $M$ , причем указанный процесс тем ближе будет подходить к параллельному перемещению по кривой, чем на большее число кусков будет разбита эта кривая. Таким образом, вторая гипотеза может быть действительно рассматриваема как устанавливающая в физическом мире процесс, отвечающий параллельному перемещению в мире геометрическом. Мы предпочли формулировать указанное положение в виде гипотезы, так как физическое параллельное переме-

\* Эйнштейн мало обращает внимания на логическую сторону дела, поэтому в его работах указанные гипотезы с полной отчетливостью не формулированы.



щение могло бы быть определено и каким-либо иным способом, внешне отличным от способа нашей гипотезы.

Первая и вторая указанные гипотезы налагают сравнительно мало ограничений на геометрию мира; наибольшие ограничения налагаются третьей гипотезой.

3. Между фундаментальным метрическим тензором и величинами, характеризующими материю (тяготеющие массы, электромагнитные явления и т. п.), имеют место определенные соотношения, называемые мировыми уравнениями.

Само собой разумеется, что было бы необходимо для придания определенности указанной третьей гипотезе условиться, какие величины характеризуют материю, и выписать все те соотношения, которые названы нами мировыми уравнениями. Сделать, однако, этого мы не можем, так как установление мировых уравнений и даже простое их объяснение требует слишком большого математического аппарата. Для того чтобы хоть несколько охарактеризовать общий характер мировых уравнений, сделаем ряд замечаний. Мировые уравнения суть дифференциальные уравнения, неизвестными функциями в которых являются, с одной стороны, величины  $g_{ik}$ , составляющие фундаментальный метрический тензор, а с другой стороны, те величины, которые характеризуют материю. Независимыми переменными в этих уравнениях являются мировые координаты  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Постулат инвариантности требует, чтобы мировые уравнения выражали бы собой собственные свойства мира и обладали бы в известной мере инвариантным характером относительно преобразований мировых координат. Последнее требование налагает жесткие условия на произвол мировых уравнений и в значительной мере оправдывает тот их вид, который принят в третьей гипотезе. Как и всякие уравнения естествознания, мировые уравнения могут рассматриваться с большей или меньшей подробностью; эта большая или меньшая подробность рассмотрения мировых уравнений скажется главным образом на той их части, которая зависит от материи. Если мы примем в соображение из материи только тяготеющие массы, то в мировых уравнениях нам не придется пользоваться величинами, характеризующими электромагнитные процессы мира; форма мировых уравнений в этом случае будет такова, что, как следствие их, мы получим для мировой линии материальной точки прямую линию; этого и нужно было ожидать, так как в противном случае вторая гипотеза стала бы в противоречие с третьей. В частности, если тяготеющие массы будут неподвижны, то единственной величиной, которая со стороны материи войдет в мировые уравнения, будет плотность  $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Если мы, становясь на точку зрения электромагнитной теории материи, примем, что вся материя сведется к электромагнитным процессам, то

в наших уравнениях величинами, характеризующими материю, будут электрическая плотность, три составляющие электрического тока, электростатический потенциал и три составляющие электромагнитного (векторного) потенциала — всего восемь величин. Принимая далее точку зрения Мие на теорию материи, мы все электромагнитные процессы сведем к наличности электромагнитного поля, и тогда в наших мировых уравнениях будет всего лишь четыре величины, характеризующих материю: электростатический потенциал и три составляющие электромагнитного потенциала; в этом случае, как показал Hilbert, следствием мировых уравнений будут уравнения Maxwell'a, управляющие, как известно, всеми электромагнитными явлениями.

Каким образом устанавливаются мировые уравнения? Подробно невозможно из-за технических трудностей ответить здесь на этот вопрос, но два слова сказать об этом нужно. Эвристический метод установления мировых уравнений состоит в получении их из так называемых в а р и а ц и о н н ы х п р и н ц и п о в, аналогичных известному принципу наименьшего действия в механике. Следует остерегаться видеть в этих принципах нечто большее, чем эвристический метод; соблазнительно связать их, конечно, с идеями телеологическими, но этого в настоящее время даже с формальной стороны сделать нельзя. Сущность этих принципов заключается в том, что избирается некоторое выражение, имеющее большое значение для геометрии мира (например, средняя кривизна), минимум которого ищется. Необходимыми, но недостаточными условиями этого минимума служат мировые уравнения; так как эти уравнения недостаточны, чтобы указанное выражение было бы минимумом, то и нельзя высказывать соблазнительное с телеологической точки зрения суждение об устройстве мира с наименьшей кривизной и т. п. Эвристический метод установления мировых уравнений, конечно, не может служить доказательством их правильности. Мировые уравнения устанавливаются, как всякий закон природы. Установление их есть гипотеза, которая должна после соответствующей интерпретации подвергнуться экспериментальной проверке. Посмотрим, каким же образом указанные три гипотезы, которые мы будем называть гипотезами тяготения, могут быть проверяемы на опыте и какая интерпретация их будет нам нужна для этой проверки.

4. Как известно, всегда можно выбрать координаты мира так, чтобы в данной точке и в непосредственной близости\* ее мы имели бы мир с евклидовой метрикой и евклидовыми свойствами. Указанные координаты носят название римановых координат. Римановы пространственные координаты

---

\* Выражение «в непосредственной близости» следует понимать в том смысле, что свойства нашего мира при указанном выборе координат будут близки к евклидовым не только в данной точке, но и в окрестности ее. Точную математическую формулировку отмеченного обстоятельства приводить здесь мы не считаем возможным.

для данной точки можно изобразить в виде обычных прямоугольных прямолинейных координат. Будем этими же прямолинейными прямоугольными координатами пользоваться не только для данной точки, но и в ближайших окрестностях точки; более определенно условимся считать, что ближайшие окрестности точки обладают евклидовой метрикой, и примем введенные нами пространственные координаты за прямоугольные прямолинейные координаты, а временную координату будем считать звездным временем. Предположение об евклидовой метрике будет, само собой разумеется, неправильным, но чем меньше будет окрестность точки, тем ближе будет геометрия мира около этой точки подходить к геометрии евклидова мира. Назовем мир, таким образом построенный, условным миром. В этом условном мире материальная точка, находящаяся под действием тяготеющих масс, будет обладать мировой линией, отличной от прямой условного мира. В самом деле, согласно второй гипотезе тяготения указанная мировая линия будет прямой нашего физического, отличного от только что введенного условного, мира и, значит, будет отличаться от прямой мира условного. Таким образом, точка в условном мире будет обладать ускорением, следовательно, согласно принципу инерции старой механики мы сможем определить силы, действующие в соответствии с законами старой механики на точку со стороны тяготеющих масс, иначе говоря, мы сможем определить силу всемирного тяготения старой механики. Эта сила будет зависеть, конечно, от тяготеющих масс, ибо она определится из того обстоятельства, что мировая линия точки будет прямой физического мира и, следовательно, некоторой кривой мира условного, вид которой будет зависеть от метрики физического мира, т. е. согласно третьей гипотезе от материи и, в частности, от тяготеющих масс. Что мы должны ожидать получить в силу указанных соображений? Как первое приближение мы должны получить закон Ньютона, затем мы должны, вообще говоря, получить поправку к закону всемирного тяготения, тем большую, чем в большей близости к обширным тяготеющим массам находится наша материальная точка.

Изучая движение точки около тяготеющей массы Солнца, Эйнштейн обнаружил в первом приближении, как и следовало ожидать, закон Ньютона, но к этому закону присоединилась некоторая поправка. Применение этой поправки дало как раз то остаточное движение перигелия Меркурия, которое оставалось необъясненным. Необъясненным оставалось движение перигелия в  $43''$  в 100 лет; вычисления Эйнштейна дали величину  $42'', 89$  в 100 лет; близость этих двух чисел становится особенно замечательной, если вспомнить, каким обходным путем мы пришли к второму числу\*.

---

\* Я изложил здесь обычную точку зрения, позволяющую, оперируя при помощи евклидовой геометрии и старой механики, находить в физическом пространстве эк-

Путь для дальнейшей проверки гипотезы тяготения был открыт. Тяготеющая масса должна, изменяя метрику мира, оказывать влияние почти на все физические явления. Так, например, свет, проходя мимо тяготеющей массы и имея мировой своей линией особые прямые (так называемые нулевые линии) физического мира, в мире условном должен отступать от прямолинейного распространения в условном пространстве и должен изгибаться от действия тяготеющей массы. Экспедиция, снаряженная для наблюдения последнего полного солнечного затмения в мае 1919 г., обнаружила смещение положения звезд, свет которых проходил вблизи закрытого луной солнца; это наблюдение смещения прекрасно согласовалось с тем, которое было предвычислено Эйнштейном.

Периоды колебания электронов на Солнце вблизи большой тяготеющей массы должны в силу изменения метрики мира вблизи тяготеющей массы (а метрика коснется и промежутков времени) быть длиннее таковых же периодов на Земле. Вычисления показывают, что это удлинение будет сказываться на смещении темных линий спектра к красному концу на  $2 \cdot 10^{-6}$  длины волн линии; наблюдения дают в среднем число для смещения, равное  $1,85 \cdot 10^{-6}$  длины волн. Существует еще ряд экспериментальных фактов, подтверждающий правильность указанной гипотезы тяготения и, значит, правильность теории Эйнштейна, известной под именем общего принципа относительности. Необходимо все же отметить, что указанная правильность подтверждена пока лишь в весьма грубых чертах; не следует на принцип относительности

.....  
периментальные соотношения, служащие проверкой гипотезы тяготения. Эта обычная точка зрения лишена, к сожалению, надлежащей ясности и строгости. Правильнее было бы рассуждать следующим образом. Геометрические величины в области мира около данной точки (явления) разлагаются в ряд по степеням разностей мировых координат точек этой области и данной точки. Ограничиваясь самым грубым приближением, мы получаем евклидову геометрию пространства, старую механику и закон тяготения Ньютона. Идя дальше в наших приближениях, мы должны получить поправку как к евклидовой геометрии и старой механике, так и к закону тяготения. Пользуясь условным миром, мы считаем, что поправка к евклидовой геометрии более высокого порядка малости (более мала), нежели поправка к закону тяготения, таким образом, мы получаем движение перигелия Меркурия. Здесь нельзя не указать на опасность, часто в приближенных вычислениях и соображениях встречающуюся, а именно на опасность объяснения тех или иных явлений путем сохранения одних малых величин и отбрасывания других того же порядка малости, могущих уничтожить влияние первых. С этой точки зрения вопрос остается невыясненным в теории относительности, более того, на него не обращается вовсе никакого внимания; вероятно, здесь никаких затруднений не встретится, но, если вообразить на мгновение, что мы, устанавливая наши приближенные соображения, поступаем неправильно и отбрасываем члены некоторого порядка малости, сохраняя при этом члены того же порядка малости, то может случиться, что никакого движения перигелия Меркурия мы объяснить будем не в состоянии. Повторяю, что это мало вероятно, но я все же счел полезным обратить внимание на указанное соображение, нуждающееся в более подробном освещении и тающее в себе известные опасности для возможности экспериментального подтверждения теории относительности.

смотреть, как на нечто вполне установившееся; конечно, многие детали теории Эйнштейна, особенно относящиеся к установлению мировых законов, могут и должны будут видоизмениться как под влиянием новых экспериментальных фактов, так и под действием непрерывно совершенствующегося математического анализа. Важно лишь то обстоятельство, что теория Эйнштейна в своих общих чертах блестяще выдержала экспериментальное испытание, не только объяснив многое, казавшееся необъяснимым, но и предсказав по примеру классических теорий ряд новых явлений.

### § 10. Материя и строение вселенной

1. Для теории Эйнштейна электромагнитные явления, характеризуясь особыми величинами, не интерпретируют никакого свойства геометрического мира. Немецкий математик Weyl, развивая теорию Эйнштейна, дал систему, в которой и электромагнитные явления физического мира интерпретируют при некоторых дополнительных предположениях (признание теории Mie) известные свойства геометрического мира; эти дополнительные предположения не столь существенны — соответственным обобщением геометрии можно от них освободиться\*. Существенной чертой теории Weyl'я является грандиозность его концепции, сводящей все совершающееся в физическом мире к интерпретации некоторых свойств мира геометрического. Посмотрим, какими гипотезами характеризуется теория Weyl'я.

Первое ее теоретическое преимущество перед гипотезами тяготения заключается в уменьшении числа гипотез и в придании им более общего характера. Ограничения, требующие, чтобы геометрия мира была бы Римановой геометрией, в теории Weyl'я отпадают. В то же время движение по инерции захватывает более широкий круг движений. Третья гипотеза тяготения претерпевает изменение в том смысле, что в ее формулировке сообразно общей идее теории совершенно отсутствует указание на роль величин, характеризующих материю. Гипотезы Weyl'я, которые мы ради краткости будем называть гипотезами материи, формулируются следующим образом:

1) Материальная точка под действием как тяготеющих масс, так и электромагнитных явлений движется по инерции;

2) между фундаментальным метрическим тензором и масштабным вектором имеют место определенные соотношения, называемые мировыми уравнениями.

.....  
\* По этому вопросу имеются работы Eddington'a, Schouten'a и автора настоящей статьи.

Если в физическом мире нет ничего, кроме электромагнитных явлений и тяготеющих масс, или если все сводится только к электромагнитным явлениям, то первая гипотеза может быть выражена просто требованием, чтобы всякое движение материальной точки было бы движением по инерции (в смысле новой механики, конечно). Из комбинации второй и первой гипотез следует, что все величины, характеризующие электромагнитные явления (при этом предполагается справедливость теории материи Mie), зависят от геометрических величин геометрического мира. В самом деле, жизнь любой материальной точки определяется прямой мировой линией, а прямая в свою очередь зависит только от фундаментального метрического тензора и масштабного вектора, каковые величины согласно второй гипотезе связаны друг с другом и ни с чем более. Weyl делает более определенное предположение, говоря, что четыре величины, определяющие масштабный вектор, интерпретируются в физическом мире электромагнитными и электростатическими потенциалами; это частное предположение не является, однако, существенно необходимым для теории Weyl'я.

Мировые уравнения устанавливаются приемом, аналогичным получению мировых уравнений в теории Эйнштейна; единственным существенным отличием мировых уравнений теории Weyl'я являются более суровые требования инвариантности их. К обычному принципу инвариантности добавляются еще дополнительные требования инвариантности масштабной. Остановимся на этих дополнительных требованиях; условимся называть изменением масштаба (см. выше § 3) операцию различного для различных точек изменения величины бесконечно малых векторов, иначе говоря, операцию помножения составляющих фундаментального метрического тензора  $g_{ik}$  на величину  $\mu$ , функцию координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . В этой операции нет ничего нового или экстраординарного; переезжая из страны в страну, нам приходится изменять масштаб, т. е. мерить в России аршинами, в Германии метрами, в Англии футами. Вообразим, что подобную перемену масштаба нам пришлось бы делать от точки к точке, тогда мы и получим описанную выше операцию изменения масштаба. Изменению масштаба в мире геометрическом будут в физическом мире отвечать различные способы измерения длины (величины вектора); эти различные способы будут все пользоваться одним и тем же начальным значением, но зато будут от точки к точке менять единицу измерения. Таким образом, изменению масштаба будет в физическом мире отвечать перемена от точки к точке единицы измерения длины, каковая перемена, как мы выяснили в § 3, всегда имеет место.

Собственные свойства мира делятся на два класса: одни не зависят от упомянутого изменения масштаба, лучше сказать, не меняют своей формы ни при каких изменениях масштаба, другие будут при изменениях масштаба менять свою форму. Условимся собственные свойства мира,

принадлежащие к первому классу, называть масштабно-инвариантными.

Weyl расширяет постулат инвариантности, добавляя к нему требование, чтобы все физические законы были бы не только собственными, но и масштабно-инвариантными свойствами физического мира.

Сообразно такому расширению постулата инвариантности приходится потребовать, чтобы мировые уравнения выражались бы в форме, удовлетворяющей требованию не только координатной, но и масштабной инвариантности.

2. Существенным отличием теории Weyl'я от теории Эйнштейна является отсутствие экспериментального подтверждения теории Weyl'я. Я считаю, что требование признания теории Mie несущественно для общей идеи теории Weyl'я, но если взять теорию Weyl'я в том виде, как она излагается автором, то признание теории Mie неизбежно, а известно, что теория Mie не находится в должном согласии с экспериментальными фактами. Как бы то ни было гипотеза материи Weyl'я ждет еще своего экспериментального подтверждения.

Существенной поддержкой теории Weyl'я является получение из его мировых уравнений, установленных даже в самой общей форме, системы уравнений Maxwell'a. Равным образом как из теории Эйнштейна, так из теории Weyl'я вытекает закон сохранения энергии, что представляет собой также лишний шанс в пользу теории Weyl'я. Будущее сможет решить, в состоянии ли теория Weyl'я оправдать себя перед судом эксперимента в том виде, в каком она сейчас развита, или потребуются новые изменения и дополнения в развитии указанной теории. Не эта сторона дела важна, однако, в теории Weyl'я — важно то утверждение этой теории, которое все материальные явления физического мира почитает лишь своеобразной интерпретацией свойств и образов мира геометрического.

Обратим внимание на некоторые следствия гипотезы тяготения и гипотезы материи, следствия, которые дадут нам более яркое представление об интерпретации материей геометрических свойств мира. Тяготеющая масса связана с векторной кривизной: чем больше тяготеющих масс, тем больше векторная кривизна; электромагнитные явления связаны, наоборот, с кривизной метрической: чем более интенсивны электромагнитные явления, тем больше метрическая кривизна. Векторная кривизна около Солнца\* значительно более, нежели в областях межпланетного пространства, далеких от каких-либо звезд; метрическая кривизна около мощного генератора тока значительно больше, чем метрическая

\* Это выражение не вполне точно; не следует упускать из виду, что и векторная и метрическая кривизна относятся к четырехмерному миру. Мы, однако, допустим здесь сознательно неточность ради большей наглядности.

кривизна вдали от больших масс электромагнитной энергии; метрическая кривизна в луче сильного прожектора значительно больше, нежели кривизна в луче настольной лампы. Значительная векторная кривизна около Солнца скажется, когда мы будем параллельно перемещать вектор по замкнутой кривой и следить за его направлением; метрическая кривизна около мощного генератора скажется на значительном изменении длины вектора, параллельно перемещаемого по замкнутой кривой около указанного генератора. Таким образом, наш физический мир отличается в различных частях своих большим разнообразием векторной и метрической кривизны. Пространство наше является особой гиперповерхностью мира; оно будет обладать как векторной, так и метрической кривизной, чрезвычайно различной в различных своих частях и к тому же все время меняющейся с течением времени. Нужны очень детальные сведения о жизни нашего материального пространства, чтобы все время следить за изменяющимися его геометрическими свойствами; мы этих сведений не имеем, между тем представляется чрезвычайно интересным установить свойства пространства, в котором мы живем и в котором движутся и живут небесные светила. Посвятим несколько слов изложению попыток решения этого вопроса, вопроса о строении Вселенной.

3. Подходя к вопросу о строении Вселенной, мы должны прежде всего вспомнить, что Вселенная наша, т. е. материальное пространство, пространство, где движутся звезды, как мы видели, самостоятельного существования не имеет и может лишь рассматриваться как гиперповерхность мира, отвечающего определенному значению временной координаты. Говоря о геометрических свойствах Вселенной, мы должны сообразно только что сказанному установить сначала геометрические свойства мира, а потом уже рассмотреть в этом мире гиперповерхности, отвечающие разным значениям временной координаты, и изучить геометрию этих гиперповерхностей.

Геометрические свойства мира, интерпретацией коего является физический мир, согласно как гипотезе тяготения, так и гипотезе материи вполне определятся, коль скоро мы будем знать материю, заполняющую этот мир, иначе говоря, коль скоро мы будем знать материю, заполняющую физическое пространство и ее движение с течением времени. Трудность решения в общем виде вопроса о геометрических свойствах мира заставляет нас сделать ряд упрощающих предположений, касающихся прежде всего свойств материи, заполняющей мир. Первое из этих упрощающих предположений, принятое в настоящее время при исследовании Вселенной с точки зрения теории Эйнштейна, заключается в совершенном игнорировании электромагнитных явлений и в сведении всей материи, заполняющей мир, к тяготеющим массам. Тогда в виду гипотезы тяготения мировые уравнения дадут нам возможность по величинам, характеризующим тяготеющие массы мира, определить  $g_{ik}$ , т. е. фундаментальный метриче-



ский тензор мира и, значит, метрику и прочие геометрические с ней связанные свойства мира. Величинами, характеризующими материю мира, когда она сводится к тяготеющим массам, служат неизвестная плотность тяготеющих масс  $\rho = \theta(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и те данные, которые определяют мировые линии этих тяготеющих масс; выше было уже указано, что как следствие мировых уравнений мы получим отнесение мировых линий тяготеющих масс к числу прямых линий мира. Не вдаваясь в большие подробности, замечу только, что данные, определяющие мировые линии тяготеющих масс, сведутся в конечно счете к трем неизвестным функциям координат мира. Таким образом, 10 мировых уравнений должны будут служить для определения 14 неизвестных величин: 10 величин фундаментального метрического тензора, одной плотности и трех величин, определяющих жизнь тяготеющих масс. Так как нас могут интересовать лишь собственные свойства мира, то мы можем одну координатную систему мира заменить на другую; тогда, как это доказывается в дифференциальной геометрии, из 10 величин фундаментального метрического тензора четырьмя величинами мы можем при помощи соответственного преобразования координат приписать некоторые наперед заданные в зависимости от координат значения. Таким образом, из всех величин фундаментального метрического тензора определению подлежат только шесть величин (10—4), значит наши 10 мировых упражнений по существу дела будут служить для определения 10 (6+1+3) неизвестных функций координат и времени, и решение задачи определения геометрии мира, принципиально по крайней мере, становится возможным. Если мы указанные 10 функций определим, то будем знать и геометрию мира и распределение тяготеющих масс вместе с их мировыми линиями. Следует, впрочем, оговориться, что до сего времени никто еще не решал поставленной только что задачи по всей ее общности и не был еще исследован вопрос о возможности определения из 10 мировых уравнений упомянутых 10 функций. Можно даже на основании имеющегося материала по изучению мировых уравнений утверждать, что вполне определенными указанные 10 величин из мировых уравнений получить будет нельзя. Таким образом, нужны или дополнительные принципы для определения этих величин, или же привлечение астрономических данных, чтобы задачу изучения вселенной сделать определенной.

Если бы, однако, нам удалось определить какой-либо вид, хотя бы частную форму этих 10 функций, то при наличии более подробных астрономических сведений о нашей Вселенной мы могли бы иметь превосходный и детальный метод экспериментальной проверки теории Эйнштейна и указанного частного решения нашей задачи. В самом деле, наши мировые уравнения определили бы нам плотность тяготеющих масс, иначе говоря, мы имели бы к любому моменту времени распределение тяготеющих масс в физическом пространстве, и,

наконец, определив мировые линии тяготеющих масс, наши уравнения дали бы нам сведения о движении тяготеющих масс в пространстве к любому моменту времени; иначе говоря, наши уравнения дали бы нам к любому моменту времени распределение в физическом пространстве скоростей тяготеющих масс. Распределение тяготеющих масс было бы нами точно проверено с помощью астрономических исследований распределения звезд во Вселенной, а распределение скоростей мы проверили бы опять-таки на астрономических исследованиях скоростей, наблюдающихся в нашей звездной Вселенной.

Перепробовав все частные решения мировых уравнений, мы при помощи указанных астрономических данных определили бы геометрию мира, распределение и жизнь тяготеющих масс Вселенной.

К сожалению, намеченный идеально правильный путь неприменим практически; с одной стороны, математическое исследование 10 мировых уравнений пока не может быть проведено во всей полноте, а с другой стороны, и астрономические данные не достаточны для упомянутой экспериментальной проверки.

4. Приходится идти другим путем. Для упрощения математической стороны вопроса приходится делать произвольные гипотезы, сводящие мировые уравнения к более простым. Для экспериментальной проверки приходится выводить некоторые простые следствия из устройства вселенной, намеченной исследованием упрощенных мировых уравнений, и уже эти простые следствия подвергать сравнению с имеющимися астрономическими данными и проверять, таким образом, математически развитую экспериментальную теорию. Основываясь на сказанном, следует считать изучение Вселенной в целом в настоящее время в самой младенческой стадии развития; ко всем без исключения выводам, вытекающим из изучения Вселенной, должно в настоящее время относиться с полным недоверием; это недоверие к тому же подкрепляется крайней шаткостью и ненадежностью наших астрономических сведений о Вселенной.

Упрощающие предположения, полагаемые в настоящее время в основу при изучении мира, касаются двух сторон вопроса: прежде всего делаются упрощающие предположения относительно тяготеющих масс; относительные скорости тяготеющих масс считаются равными нулю, тяготеющие массы считаются неподвижными. С первого взгляда это предположение кажется явно абсурдным, но вспомнив, что скорости тяготеющих масс, как показывают наблюдения, в большинстве случаев ничтожны по отношению к скорости света, мы сможем мировые уравнения с большой точностью привести действительно к такому виду, в котором скорости равны нулю. Относительно плотности тяготеющих масс никаких дополнительных предположений можно не делать.

Второй класс предположений относится к геометрии мира. Предполагается прежде всего, что геометрия мира обладает свойством давать про-

странства (гиперповерхности), в которых кривизна в любой их точке одинакова и меняется лишь с течением времени. Далее, делается еще одно дополнительное предположение о метрике мира, предположение, упрощающее значительно вычисления, но смысл которого до сего времени неясен; не желая входить в детали, я не буду останавливаться подробно на этом предположении.

Сделав указанные предположения, можно прийти прежде всего к двум типам Вселенной\*: 1) стационарный тип — кривизна пространства не меняется с течением времени и 2) переменный тип — кривизна пространства меняется с течением времени. Иллюстрацией первого типа Вселенной может служить шар, радиус которого не меняется с течением времени; двумерная поверхность этого шара будет как раз двумерным пространством постоянной кривизны. Наоборот, второй тип Вселенной может быть изображен меняющимся все время шаром, то раздувающимся, то уменьшающим свой радиус и как бы сжимающимся. Стационарный тип Вселенной дает всего лишь два случая Вселенной, которые были рассмотрены Эйнштейном и De Sitter'ом. Первый определил, по имеющимся астрономическим данным, радиус кривизны Вселенной в  $10^{12}$ — $10^{13}$  расстояний от Земли до Солнца, а плотность  $\rho$  (повсюду постоянную) в  $10^{-26}$  г/см<sup>3</sup>. De Sitter для своей Вселенной получил полное отсутствие плотности тяготеющих масс ( $\rho = 0$ ).

Переменный тип Вселенной представляет большое разнообразие случаев; для этого типа возможны случаи, когда радиус кривизны мира, начиная с некоторого значения, постоянно возрастает с течением времени; возможны далее случаи, когда радиус кривизны меняется периодически: вселенная сжимается в точку (в ничто), затем снова из точки доводит радиус свой до некоторого значения, далее опять, уменьшая радиус своей кривизны, обращается в точку и т. д. Невольно вспоминается сказание индусской мифологии о периодах жизни, является возможность также говорить о «сотворении мира из ничего», но все это пока должно рассматривать как курьезные факты, не могущие быть солидно подтвержденными недостаточным астрономическим экспериментальным материалом. Бесполезно за отсутствием надежных астрономических данных приводить какие-либо цифры, характеризующие «жизни» переменной Вселенной; если же все начать подсчитывать ради курьеза время, прошедшее от момента, когда Вселенная создавалась из точки до теперешнего ее состояния, начать определять, следовательно, время, прошедшее от создания мира, то получатся числа в десятки миллиардов наших обычных лет.

Остается еще в заключение вопроса о строении Вселенной остановиться на одном недоразумении, повторяющемся не только в статьях и книгах

\* Вопрос о строении Вселенной разбирается Эйнштейном, де Ситтером и др.

популярного характера, но и более серьезных и специальных работах, посвященных принципу относительности. Я имею в виду пресловутый вопрос о конечности Вселенной, т. е. о конечности нашего физического, занятого блистающими звездами пространства. Утверждают, что, найдя постоянную продолжительную кривизну Вселенной, можно якобы заключить о ее конечности и прежде всего о том, что прямая во Вселенной имеет «конечную длину», что объем Вселенной является тоже конечным и т. п. Это утверждение может быть основано или на недоразумении, или на дополнительных гипотезах. Из метрики мира они ни в коем случае не вытекают, а только метрика может

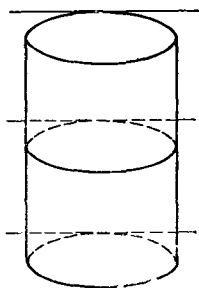


Рис. 22

быть выяснена мировыми уравнениями. Простые примеры могут убедить нас в этом. Метрика поверхности цилиндра и метрика плоскости одинаковы, между тем на цилиндре существуют «прямые» конечной длины (круг, рис. 22), тогда как таких прямых на плоскости нет. Вопрос конечности пространства зависит не только от метрики его, но и от условия, когда две системы координат определяют одну и ту же точку. Это условие в значительной мере произвольно; даже рациональное его ограничение, о котором мы не имеем возможности здесь говорить, оставляет достаточно места произволу в вопросе об одинаковости и различности точек пространства. Таким образом, одна метрика мира не дает нам никакой возмож-

ности решить вопрос о конечности Вселенной. Для решения этого вопроса нужны дополнительные теоретические и экспериментальные исследования. Разумеется, при соответствующих соглашениях вопрос исследования конечности Вселенной не является безнадежным. Положим, что этим вопросом занялись тени, живущие на поверхности сферы; они могли бы решить этот вопрос, отправив в путь одного из сферических путешественников. Держась все время прямой линии и проходя ее в одном направлении, наш путешественник, наблюдая около себя характер местности, видел бы, что этот характер во все время его путешествия менялся бы; ему попадались бы иные ландшафты и сферические города, мало напоминающие города его родины, однако, приближаясь с другого конца к своему городу, откуда он вышел, путешественник заметил бы, что окружающая его местность становится все более и более похожей на ту, которую он, отправляясь в далекое путешествие, покинул. Вернувшись в исходную точку, путешественник путем тщательных наблюдений мог бы констатировать, что точка, в которую он пришел, совершенно совпадает с точкой, откуда он вышел; таким образом, была бы при установлении, конечно, целого ряда соглашений выяснена конечность сферы Вселенной. Для этого нужны были бы дополнительные соглашения и допол-

нительные исследования; одна метрика сферы решить вопрос о ее конечности была бы не в состоянии.

Итак, из постоянства и положительности кривизны Вселенной ни в какой мере не следует, что наша Вселенная конечна.

## § 11. Общие выводы принципа относительности

1. Представляется небесполезным в сжатом виде перечислить выводы, к которым нас привел принцип относительности. Я это сделаю в настоящем параграфе, отметив лишь самое существенное, опустив все детали и сопутствующий им математический аппарат.

Пространство любого числа измерений может быть произвольным образом арифметизировано так, чтобы каждой точке пространства отвечала бы комбинация нескольких чисел, называемых координатами данной точки пространства. Способ арифметизации совершенно произволен.

Свойства пространства могут быть собственными, т. е. не зависеть от способа арифметизации пространства или несобственными. О собственных свойствах говорят, что они инварианты по отношению к переходу от одного способа арифметизации пространства к другому. Собственные свойства пространства не зависят от нашего произвола — выбора способа арифметизации пространства. Несобственные свойства суть скорее свойства данной арифметизации пространства.

В пространстве определяется расстояние двух его точек и соответственно величина бесконечно малого вектора в данной точке пространства. Эта последняя величина зависит от фундаментального метрического тензора. Для четырехмерного пространства расстояние называется интервалом, а фундаментальный метрический тензор зависит от 10 величин  $g_{ik}$ .

В пространстве определяется также параллельное перемещение вектора, служащее основанием для определения прямых пространства и кривизны его. Параллельное перемещение вектора зависит не только от фундаментального метрического тензора, но еще от совокупности некоторых величин, называемых масштабным вектором; для четырехмерного пространства масштабный вектор составляют четыре величины. Изменение направления вектора при параллельном его перемещении даст начало понятию векторной кривизны пространства, а изменение величины вектора определяет метрическую кривизну пространства.

Если величина вектора не меняется при его параллельном перемещении, то пространство называется римановым. В римановом прост-

ранстве масштабный вектор отсутствует, метрическая кривизна равна нулю, а прямая линия является линией кратчайшей; прочие пространства называются пространствами Weyl'я; в них прямая уже не есть кратчайшая линия.

2. Помимо геометрического пространства мы вводим физическое трехмерное пространство и физическое время, причем вводим их не в отдельности, когда их физическое существование невозможно, а в их совокупности, составляющей физический мир. Физический мир состоит из материи; толкуя слово это в самом широком смысле, к материи принадлежат и тяготеющие массы и электромагнитные процессы. Напомню, что именно мир состоит из материи, потому что материя в пространстве и без времени физически невозможна. Мы уславливаемся об особой интерпретации геометрического мира (пространства четырех измерений) при помощи мира физического. Каждой вещи геометрического мира сопоставляется интерпретирующий ее объект (материальный) мира физического. Интерпретация эта совершенно условна и зависит от нашего произвола. Условившись об определенной интерпретации, будем называть четырехмерное пространство, интерпретацией коего служит физический мир, просто геометрическим миром. В физическом мире мы выделяем группу свойств, которые называем физическими законами. Для этих физических законов мы устанавливаем постулат инвариантности, заключающийся в том, что физические законы инвариантны относительно перехода от одного способа арифметизации мира к другому и отвечают, следовательно, собственным свойствам мира геометрического.

С известной точки зрения постулат инвариантности мог бы служить определением физических законов.

Три координаты физического мира выделяем в особую группу пространственных координат, а четвертую координату называем временной. Для метрики геометрического мира устанавливаем особый постулат вещественности, сущность которого сводится к определенным свойствам вещественности и мнимости, которыми должен обладать интервал двух точек одновременных и двух точек, имеющих одинаковые пространственные координаты. Постулат вещественности налагает ограничительные условия не только на метрику мира, но и на произвол его арифметизации, ибо при всякой арифметизации в силу постулата вещественности должна иметь место возможность выделения временной координаты. Постулат вещественности играет весьма большую роль в так называемом принципе причинности; согласно этому постулату два одновременных явления не могут быть при помощи арифметизации подчиняющейся постулату вещественности приведены к одновременности. Таким образом, причина и следствие при одном способе

арифметизации мира остаются причиной и следствием также при другом способе введения мировых координат.

Изменение пространственных координат с течением времени называем движением. Движение характеризуется и определяется мировой линией точки.

Когда установлена условная интерпретация геометрического мира при помощи мира физического, является возможность путем экспериментального изучения физического мира определить геометрию мира геометрического. Простейшим по идее, но труднейшим по выполнению является экспериментальное определение интервалов в физическом мире; оно даст нам метрику мира геометрического. Экспериментальное изучение изменения длины вектора при его параллельном перемещении даст нам возможность определить масштабный вектор геометрического мира. Но кроме указанных простейших по идее экспериментов можно при помощи экспериментального изучения любых иных свойств физического мира сделать определенное заключение о мире геометрическом; всякий физический закон согласно постулату инвариантности определит собой некоторое собственное свойство геометрического мира; изучая какой-либо физический закон экспериментально, мы тем самым установим определенное свойство геометрического мира. Закон всемирного тяготения Ньютона послужил Эйнштейну для выяснения метрики мира, а законы электродинамики дали возможность Weyl'ю определить не только метрику мира, но и его масштабный вектор.

3. Принцип инерции делит движения материальных точек на два класса: одним соответствует мировая линия, прямая геометрического мира, это движения по инерции; у других движений мировая линия не есть прямая, это движения под действием сил. Сила, действующая в таком движении, характеризуется особым числом — массой материальной точки, отличающим одну материальную точку от другой, и величинами (сравни ускорения), определяющими степень отличия мировой линии нашего движения от прямой мира.

Невозможность изучить геометрический мир с общей точки зрения заставляет прибегать к ряду гипотез об его метрике и его свойствах. Наиболее узкой из этих гипотез является гипотеза старой механики, считающая, что геометрический мир есть евклидово четырехмерное пространство. В рамках старой механики нет места экспериментальному изучению метрики мира, ибо она определена наперед указанной гипотезой. Материя, состоящая из тяготеющих масс, с точки зрения старой механики обладает свойством всемирного тяготения. Материя, состоящая из электромагнитных процессов, управляется уравнениями электродинамики. Теория Эйнштейна пользуется уже гораздо более широкой, нежели старая механика, гипотезой о геометрии мира,

гипотезой, которую мы называли гипотезой тяготения. Геометрический мир предполагается уже не евклидовым, а более широким — римановым. Наличие тяготеющих масс вызывает лишь движение по инерции, и, значит, сила всемирного тяготения является лишь кажущейся силой. Наконец, метрика пространства связывается с величинами, характеризующими материю, особыми мировыми уравнениями. Изучая экспериментальное движение тяготеющих масс, мы определим тем самым метрику геометрического мира.

Теория Weyl'я идет еще дальше теории Эйнштейна. Гипотеза Weyl'я, названная нами гипотезой материи, состоит в следующем. Согласно гипотезе материи (при наличии тяготеющих масс и электромагнитных процессов) всякое движение является движением по инерции, а метрика мира и его масштабный вектор определяются особыми мировыми уравнениями. Все свойства материи (состоящей из электромагнитных процессов) получаются из геометрических свойств мира. Нет ничего, кроме этих геометрических свойств мира.

Теория Эйнштейна оправдывается на опыте; она объясняет старые, казавшиеся необъяснимыми явления и предвидит новые поразительные соотношения. Вернейший и наиболее глубокий способ изучения при помощи теории Эйнштейна геометрии мира и строения нашей Вселенной состоит в применении этой теории ко всему миру и в использовании астрономических исследований. Пока этот метод немного может дать нам, ибо математический анализ складывает свое оружие перед трудностями вопроса и астрономические исследования не дают еще достаточно надежной базы для экспериментального изучения нашей Вселенной. Но в этих обстоятельствах нельзя не видеть лишь затруднений временных; наши потомки, без сомнения, узнают характер Вселенной, в которой мы обречены жить... И все же думается, что

«Измерить океан глубокий,  
Сочечь пески, лучи планет,  
Хотя и мог бы ум высокий —  
Тебе числа и меры нет».

*Петроград, 5 сентября 1922 г.*



ПИСЬМА  
А. А. ФРИДМАНА





---

---

## ПИСЬМА А. А. ФРИДМАНА Б. Б. ГОЛИЦЫНУ

*Около Ровно,  
22 декабря 1914 г.*

Глубокоуважаемый  
Борис Борисович,

Очень извиняюсь, что пишу карандашом. Пишу в поезде, т[ак] к[ак] хочу известить Вас о двух работах, относящихся к задаче о сейсмических лучах и имеющих отношение к тем вычислениям, кои я Вам представил. Первая работа — Vito Volterra «Leçons sur les équations integrales et les équations integro-differentielles» это небольшая монография, разбирающая ряд вопросов, аналогичных указанному Вами. Там решается между прочим вопрос о нахождении функции  $\varphi(v)$  по условиям

$$\alpha(\beta) = \int_0^{\beta} \varphi(v) \sqrt{v - \beta} dv$$

(а не от 1, как у Вас). Об этой работе я узнал только в день отъезда своего и не мог своевременно сообщить Вам. Сколько я мог заметить, результаты не идут так, как то, что имеется в моих вычислениях, именно от производной  $\alpha(\beta)$  там освободиться не удастся, да и Volterra, решающему задачу чисто теоретически, это несущественно.

О второй работе я также хотел напомнить Вам; это работа Herrglotz'a в Physikalische Zeitschrift. Я не помню, к каким результатам пришел он, но помню, что он занимался аналогичной задачей.

Еще раз извиняюсь за неразборчивое и наспех написанное письмо.

Искренне уважающий Вас  
А. Фридман

Позвольте глубоко поблагодарить Вас за содействие, оказанное мне в Петрограде.

20 мая 1915 г.

Львов

Глубокоуважаемый

Борис Борисович,

Пользуюсь оказией, чтобы переслать Вам настоящее письмо. Т[ак] к[ак] оно пойдет не по почте, то можно сообщить кое-какие подробности. В настоящее время наше положение удовлетворительно, — мы развиваем наступление, и если Вы присмотритесь к фронту, то увидите, что немцы легко могут попасть в Галиции в мешок. Но несколько дней до 20 мая положение было иное: был даже полный разгром одной из частей нашей армии, т[ак], напр[имер], от полка осталось два офицера и несколько десятков нижних чинов. Настроение во Львове было паническое: учреждения и части войск спешили отойти в более глубокий тыл. Говорили, что будто бы было решено отходить до Киева и во всяком случае оставить всю Галицию; к счастью, этого не случилось. Причины наших неудач двоякого сорта: с одной стороны, наличность тяжелой артиллерии у немцев и отсутствие ее у нас, с другой стороны, великолепная организация и техника немцев и отсутствие того и другого у нас. Тяжелая артиллерия производит огромное моральное действие — фактически вред от нее невелик. Но в теперешней войне на первом плане стоит именно моральное состояние пехоты.

Теперь жизнь во Львове идет совершенно тихо, развлечением являются только аэропланы неприятеля, иногда, впрочем редко, бросающие гостинцы. Можно сказать, что удручающего или даже тяжелого морального впечатления аэропланы не производят.

Мое дело идет и развивается, но раз в десять медленнее, чем мне бы хотелось. Возникают колоссальные затруднения, главным образом на почве личных счетов разных «начальств». Все это действует отвратительно на нервы и надо сказать, что сейчас я чувствую себя совершенно больным и разбитым — мне стоит больших усилий заставлять свою энергию не падать ниже допустимого минимума.

Если что поддерживает мои силы теперь, так это научная работа и воспоминания об обсерватории и о будущей работе в ней. В настоящее время я занимаюсь вопросом об определении температуры и давления, когда заданы скорости ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ); условия, кои получаются при этом, дают некоторые указания на величину вертикальной скорости  $w$  в атмосфере в зависимости от горизонтальных скоростей и свойств воздуха; это, мне кажется, имеет практический интерес.

Затем собираюсь написать, если Вы найдете это удобным, для Геофизического сборника небольшую заметку о причинах возникновения и исчезновения вихрей в атмосфере, хотя бы в общей математической форме, — было бы очень интересно. Если Вас не затруднит, сообщите, насколько тема такой работы подошла бы к Геофизическому сборнику.

Вероятно, удастся провести через Ставку Верховного [главнокомандующего] штаты для аэрологич[еских] станций в ротах и отрядах. Мне кажется, что правильная организация этого дела могла бы после войны в обсерватории оказать соответствующее содействие.

Теперь я занят постройкой динамографа, который мог бы записывать порывы ветра [с] помощью пера или змея на нити.

Удастся ли мне выполнить построение динамографа — сказать пока трудно. Как, кстати, обстоит дело с разработкой метода изучения ветра [с] помощью меев и небольших привязных шаров? Доклад мой был уже, вероятно, Вам передан; к крайнему сожалению я лишен возможности представить расчеты по этому вопросу.

На днях выезжаю из Львова для осмотра станций в отрядах; тогда постараюсь достать мнения начальников отрядов об аэрологических наблюдениях и, основываясь на мнениях этих, составляю проект штатов как имущества для наблюдений в авиационных отрядах, так и персонала в центральных станциях в ротах и общей инспекции станции. Если Вы разрешите, я пошлю Вам проект этих штатов и Вы надеюсь не откажетесь сделать свои исправления.

Очень мне бы хотелось знать, что получается из сейсмических вычислений при применении того способа понимания многозначности кривой, о коем мы с Вами говорили последний раз. Это, конечно, единственно правильное понимание. Черкните мне, какие результаты получаются, если это не очень затруднит Вас.

Наверное, это письмо носит отпечаток моего теперешнего нервного состояния, и я очень извиняюсь за его несистематичность, но мне хотелось послать его верным путем в Питер, а потому я не стал откладывать написание его.

Передайте пожалуйста мой поклон княгине.

Искренне уважающий Вас  
А. Фридман

Не забывайте меня, Борис Борисович, хоть изредка письмами.

25 июня 1915 г.

Действующая Армия. М. Глембочек

Глубокоуважаемый

Борис Борисович,

Пользуясь верной оказией, посылаю Вам настоящее письмо. Военные дела, как Вы, вероятно, знаете, обстоят не очень важно. Они уже около Риги (Митава оставлена), Осовец скоро будет взят или уже оставлен, Варшава — наверное, Новогеоргиевск — наверное, Ивангород —

вероятно, Люблин — наверное, Владимир Волынский — наверное, Холм наверное в их руках. Мы занимаем лишь часть Галиции; здесь наш фронт идет по Золотой Липе, Днестру до Усуп, Бискуне, а потом прямая на юг до румынской границы. Положение создалось трудное: превосходство сил противника ясное, и пока нам приходится отступать, выравнивая свою линию; союзники наши как-то мешкают; это объясняется их привычкой к комфортабельной войне в прекрасно отмеблированных окопах. Если они промедлят, если они дадут немцам заставить нас с ужасными по кровопролитности боями отступить и выровнять фронт, то, по всей вероятности, немцы сильно укрепятся и бросят часть войск на запад; трудно вообразить, что будет тогда с нашими союзниками. Вообще война грозит затянуться еще на очень долгое время, т[ак] что, пожалуй, сбудется мое предсказание, что мы вернемся с войны капитанами; нет, капитаном не капитаном, а в подпоручики меня скоро произведут. Я сообщил Вам общие сведения, но очень прошу сохранить их в секрете, ибо это сведения, ни в коем случае оглашению не подлежащие, хотя и в достаточной мере верные. Хотя, может быть, через пять дней, когда это письмо доставят Вам, секретные сведения сделаются достоянием печальной правды, широкой гласности.

Характер авиации теперь сильно меняется; техника вооруженных столкновений в воздухе, техника больших полетов и техника разведок идет быстрыми шагами вперед. Вот вчера, например, я летал на охрану нашего змейкового аэростата от неприятельских аэропланов; были уже сумерки, и усиленный обстрел аэроплана нашего, который вела ихняя батарея, был ясно виден по огонькам; это очень выгодный случай для открытия хорошо маскированной батареи, и я, конечно, воспользовался им, но когда начинаешь думать, что эти мирные (такими кажутся они с высоты 1800 метров) вспышки могут измочалить аэроплан, становится жутко, и тревожно ждешь белых с красным дымком ихней шрапнели разрывов.

Особо интересных полетов не было; я участвовал в одном вечернем, позднем полете на Буазене, садиться было очень темно, и было страшно, когда на вираже над оврагом вдруг сдал мотор, и если бы не чудо да не искусство летчика, мы врезались бы на полной скорости в овраг, но, слава Богу, этого не случилось и, как видите, я пишу Вам длиннейшее письмо. На одном из аппаратов я установил телескоп (кометоискатель), полученный от Баклунда; наблюдать им очень удобно, но трудно наводить на желаемый предмет.

Т[ак] к[ак] теперь летать приходится сравнительно мало, то я очень много занимаюсь; с огромным удовольствием перечитал я вновь Ваши лекции по сейсмологии; теперь я занимаюсь исследованием того интегрального уравнения, к которому приходите Вы при определении зависимости скорости распространения колебаний от глубины. Пользуясь обоз-

начениями Вашей книги, можем написать уравнение т[аким] о[бразом]:

$$\Delta = 2r_0 \alpha \int_{r_m}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\Phi(\rho)^2 - \alpha}},$$

$$\alpha = \cos l_0, \quad \rho = r/r_0, \quad \Phi(\rho) = \rho \frac{n}{v_0} = \rho \frac{v_0}{v}.$$

Пусть  $\Delta/2r_0 \sqrt{\gamma}$  есть  $F(\gamma)$ , где  $\alpha = \sqrt{\gamma}$ , тогда  $\Phi(\rho)$  будет  $u(y)$ , определяемое из уравнения

$$\ln \Phi = u(y),$$

где

$$u(y) = -\frac{1}{\pi} \int_1^y \frac{F(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi - y}} = \frac{2}{\pi} \int_1^y \sqrt{\xi - y} F'(\xi) d\xi.$$

Эти формулы несколько отличны от ранее полученных, представляя собой их видоизменения. Я поставил себе задачей изучить свойства функции  $\Phi(\rho)$ . Для малых глубин, т. е. когда  $\rho$  близко к 1, а  $\ln \rho$  к 0, это сделать можно было без труда. Легко получить

$$u(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-y}} F(v^2 + y) dv = u(t),$$

где

$$t = \sqrt{1-y}.$$

Когда  $\ln \rho$  близко к 0,  $t$  тоже близко к 0, и тогда  $u(t)$  разлагается в ряд:

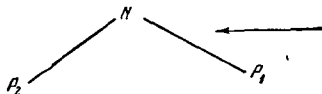
$$u(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} t^{2m+1} \frac{(-1)^m 2^m F_{(1)}^{(m)}}{1.3.5 \dots (2m-1)(2m+1)}.$$

Полагая  $z = \ln \rho$ , получим, что  $t$  разлагается по степеням  $z^{1/2}$ . Задачей моей теперь является изучение  $\Phi(\rho)$  на больших глубинах и ее особенностей; боюсь только, хватит ли у меня знаний и памяти, ибо почти все приходится брать памятью за отсутствием нужных для справок книг.

Я был бы очень Вам благодарен, если бы Вы прислали мне вид  $F(\gamma)$  и положение различных особенностей этой функции; зная свойства  $F(\gamma)$ , без труда определим и особенности  $\Phi(\rho)$ , а значит,  $\sigma$ ,  $E$  и плотность как функции радиуса.

Второй вопрос, которым я занимался, это вопрос о вычислении живой силы вихревого движения в атмосфере. Живая сила (общая) атмосферного движения распадается на три части; первая зависит от движения с потенциалом скорости, вторая часть зависит от вихрей, третья, очень малая для атмосферы, зависит от изменения плотности. Вторая часть для какого-либо объема  $\tau$ , ограниченного поверхностью  $S$ , распадается в

свою очередь на две: одна относится к объему, другая к поверхности; каждая из них в отдельности очень велика и значительно превышает общую живую силу, но в сумме они дают величину сносную. Это обстоятельство долго меня смущало, ибо я пренебрегал поверхностной частью живой силы, но теперь я во всем этом разобрался и физически представляю себе дело так: живая сила вихревого движения внутри объема почти вся уходит на поверхностные вихри. Для нашей атмосферы я провел все вычисления в таких предположениях. Около каждой точки  $P$  я описываю сферу радиуса  $R$  и считаю, что вихри, в этой сфере находящиеся, дадут скорости частицы, в точке  $P$  лежащей, а вихри, вне сферы  $R$  лежащие, влиять



не будут; положение при достаточно большом  $R$  очевидное. Величину этого радиуса  $R$  можно определить как раз из рассмотрения живой силы. Некоторые математические затруднения мною обойдены, т[ак] что думаю скоро заняться не только свободной атмосферой, но и атмосферой с граничными условиями. Вообще на разложение живой силы на составные части до сих пор мало обращалось внимания, а это чрезвычайно любопытная вещь. Мои подсчеты с шарами-пилотами дали мне, что величина горизонтальных вихрей около 0,005 (метр-тонн-секунда), тогда как подсчеты Hesselberg'a и Bjerkness'a дали для вертикальных вихрей величину порядка 0,00001; т[аким] о[бразом], оправдывается положение, что причина атмосферных явлений не вихри с вертикальной осью, и именно вихри с горизонтальной осью и что, т[аким] о[бразом], только аэрология дает серьезные данные для динамики атмосферы.

Кстати, как обстоит дело с задачей, решением которой занимался Veneschke? Если ему решить правильно задачу не удастся, то можно будет обработать вычисления к этой задаче по методу Rietz'a; это будет вполне возможно выполнить в математическом отделении.

Статью о вихрях я думаю окончить к августу месяцу, когда, вероятно, сам привезу ее, т[ак] к[ак] в августе думаю поехать в отпуск; такие отпуска разрешаются теперь офицерам ввиду затяжного характера войны. Вероятно, к августу же месяцу я представлю Вам мотивированный, по крайней мере в первом приближении, доклад о математическом отделении.

Кстати, мне кажется очень просто сконструировать прибор, дающий по давлению ветра и величину, и направление ветра.

Пусть имеем две пластинки  $P_1$  и  $P_2$ ; давление  $P_1$  на первую, направленную по линии S—N (юг—север), будет  $f_1(v, \varphi)$ , где  $v$  — скорость,  $\varphi$  —



направление ветра; давление  $P_2$  на вторую, лежащую под углом  $\alpha$  к первой, будет  $f_2(v, \varphi + \alpha)$ . Т[аким] о[бразом], получаем два уравнения:

$$P_1 = f_1(v, \varphi),$$

$$P_2 = f_2(v, \varphi + \alpha),$$

откуда определяем  $v$  и  $\varphi$ . Пользуясь Вашим пьезоэлектрическим методом, можно было бы, вероятно, построить простой и удобный прибор. Когда нужно, мы брали бы мгновенные  $v$  и  $\varphi$ , когда нужно брали бы  $v$  и  $\varphi$  средние.

Пульсацию ветра, пульсацию давления (при помощи микробарографов или вариографов) и микросейсмы весьма интересно поставить в связь; много здесь можно сделать, пользуясь методом корреляции. Мне кажется, что колебания давления, придя в резонанс с собственным периодом колебаний какой-либо части земли, могут, несмотря на малость амплитуды (я говорю о микроколебаниях), произвести значительные пертурбации.

Письмо мое перешло все границы по длине своей, и хотя о многом мне еще хотелось поговорить с Вами, но это придется отложить, если Вы, конечно, разрешите, до другого раза, тем более, что и оказия сейчас едет. У меня есть еще один вопрос о методе наименьших квадратов, но об этом придется рассказать в следующем письме. Выясняя для себя некоторые подробности организации математического отделения, я наталкиваюсь на разные вопросы математического характера, в том числе и о методе наим[еньших] квадр[атов]; их попутно приходится обдумывать.

Не забывайте меня письмами; не стоит и повторять, какая радость получать письма «оттуда», а тем более письма научные. Передайте мой поклон княгине; последний мой «культурный» день я провел у Вас и часто о нем вспоминаю. Иногда думаешь, не будет ли этот культурный день последним, и тогда не хочется летать, трусишь, но все пройдет, еще несколько лет и война окончится.

Искренне уважающий Вас  
А. Фридман

Мой точный адрес:

*Штаб IX Армии, 26 Авиационный отряд,  
прапорщику Фридману*

## ПИСЬМА А. А. ФРИДМАНА В. А. СТЕКЛОВУ

Многоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Несколько дней спустя после того как я послал письмо А. Н. Крылову<sup>22</sup>, я получил от г-на Бубнова<sup>23</sup> извещение о работе. Оказалось, что необходимо по способу Н. Герсевича<sup>24</sup> решить уравнение  $\Delta v = c$  для контуров, состоящих из двух парабол  $n$ -го порядка. Способ этот теоретически кажется необычайно громоздким, насколько он будет выполним при вычислении, я еще не знаю. Работа эта теперь пришлось мне, как я уже говорил Вам, весьма кстати, и я очень благодарен Вам за нее.

Остаюсь глубоко уважающий Вас  
А. Фридман

26 июня 1910 г.  
Сергиевская ул., д. 17, кв. 21

Многоуважаемый Владимир Андреевич,

Пользуюсь случаем написать Вам в Баден-Баден. Я недавно справлялся в Университете относительно свидетельства<sup>25</sup>; оказалось, что оно до сих пор в канцелярию не поступало, потому наши (Булыгина<sup>26</sup>, Тамаркина<sup>27</sup> и мои) бумаги лежат еще в канцелярии Ун-та. Там мне сказали, что, по всей вероятности, в медленности присылки свидетельства лежат чисто канцелярские причины. Если это так (что весьма вероятно), то это еще победы.

Разбирая один вопрос из области нахождения частных решений уравнения

$$\begin{aligned}\Delta u + k^2 u &= 0, \\ \left( \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ (k \neq 0),\end{aligned}\tag{1}$$

я получил такие странные результаты, что решил сообщить их Вам. Преобразовав уравнение (1) к ортогонал[ьным] координатам  $\rho, \rho_1$ , получим

$$\begin{aligned}\Delta u + H^2 k^2 u &= 0, \\ \left( \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} \right).\end{aligned}\tag{2}$$

$H^2$  определяется равенством

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2).$$

Для уравнения (2) я поставил такую задачу: найти функцию двух переменных  $f$  и  $f_1$ ,  $F(f, f_1)$ , такую, чтобы

$$u = F(f(\rho), f_1(\rho_1))$$

удовлетворяло бы уравнению (2) и чтобы  $f(\rho)$ ,  $f_1(\rho_1)$ , удовлетворяли бы дифференциальным обыкновенным уравнениям не ниже первого порядка, иначе говоря, что  $f(\rho)$  и  $f_1(\rho_1)$  имели бы каждая по крайней мере одну произвольную постоянную. Оказалось, что функция  $F(ff_1)$  должна иметь вид

или  $ff_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{или } ff_1 + \varphi(f) \\ \text{или } ff_1 + \psi(f_1) \end{array} \right\}, \quad \text{причем } H^2 = \mu(\rho) + \nu(\rho_1), -$$

случай допускающий решение  $u = ff_1$  или  $H^2$  равно постоянной величине, случай, не приводящий к интересным контурам. Меня очень поразило, каким образом задача, поставленная в такой общей, казалось бы, форме, дала чисто отрицательный результат.

С вычислениями по методу Герсевича дело обстоит весьма плохо; Герсевич не доказал ни сходимости полученных рядов, ни даже того, что из его уравнения для определения коэффициентов эти последние действительно могут быть найдены. Я попробовал применить этот метод к решению задачи Дирихле для случая плоскости и получил, что применять в этом случае метод нельзя. На днях буду говорить об этом с Бубновым.

Оказалось, что уравнение колебания пластины  $\Delta \Delta u - u = 0$  для параболы допускает решение  $f(\rho) f_1(\rho_1)$ , где  $\rho, \rho_1$  суть ортогональные координаты,  $\rho = \text{const}$  уравнение параболы;  $f$  и  $f_1$  удовлетворяют уравнениям формы  $y'' = (x^2 - \lambda)y$  и являются, таким образом, если не ошибаюсь, бесселевыми функциями. Я еще не пробовал применить это решение в действительности, а потому не знаю, как оно относится к предельным условиям. У меня есть основания предполагать, что подобное же решение существует и в случае эллипса и в случае гиперболы.

Кстати сказать, уравнение равновесия пластинки таких решений не допускает для параболы, эллипса и гиперболы.

Если Вам будет когда-нибудь время, то напишите относительно первого вопроса (о  $F(f, f_1)$  и т. д.); меня очень удивляет подобный результат.

Желаю Вам счастливого путешествия и остаюсь глубоко уважающий Вас

А. Фридман  
Сергиевская, 17, кв. 21

3 августа 1910 г.

Многоуважаемый Владимир Андреевич,

Начну прямо с университетских дел. Мое и Булыгина свидетельства были получены несколько недель тому назад, и наши бумаги теперь уже посланы в округ. Что делается там с ними — не знаю и также не знаю, как об этом разузнать. С Як[овом] Давид[овичем] дело несколько сложнее. Пока свидетельство еще не получено. Оно ожидается на этих днях и, вероятно, благоприятное. Впрочем, он сам обо всем этом напишет Вам подробнее.

За последнее время математикой почти не приходится заниматься, ибо теперь я должен ходить на службу (11—4), впрочем, это скоро кончится, а при получении стипендии можно будет и вообще всякое постороннее занятие отбросить.

Вероятно, я неясно изложил условия поставленной задачи. Условия эти таковы. Я ищу  $F(f, f_1)$  такую, чтобы

1) удовлетворялось бы уравнение

$$\Delta u + H^2 u = 0 \quad \left( H^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 \right), \quad (1)$$

$$ds^2 = H^2 (d\rho^2 + d\rho_1^2);$$

2)  $f(\rho)$  и  $f_1(\rho_1)$  удовлетворяли бы дифференциальным уравнениям не ниже первого порядка.

При этом второй пункт означает, что  $u = F(f(\rho), f_1(\rho_1))$  всегда является интегралом уравнения (1), коль скоро  $f(\rho)$  и  $f_1(\rho_1)$  удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям первого порядка, иначе говоря, пусть заданы некоторые дифференциальные уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \psi_1(f', f, \rho) &= 0, \\ \psi_2(f'_1, f_1, \rho_1) &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

я ищу вид  $F(f, f_1)$ , такой, чтобы

$$u = F(f, f_1)$$

удовлетворяло бы уравнению (1) при всяких  $f, f_1$ -решениях уравнений. Таким образом, в рассматриваемом Вами случае

$$f' = 1, \quad f'_1 = 1;$$

следует сказать, что не только  $F(\rho, \rho_1)$  будет решением уравнения, но искомая  $F$  такова, что и  $F(\rho + C, \rho_1 + C')$ , где  $C$  и  $C'$  — любые произвольные постоянные, будет также решением уравнения (1). Это допол-

нительное свойство  $F$  и позволит легко обнаружить справедливость того положения, о коем я Вам писал уже. Было бы слишком длинно писать о причинах, почему я остановился на таком ограничении; если позволите, об этом я поговорю с Вами, когда Вы приедете.

Как я уже писал, математикой почти не занимаюсь; мне хотелось бы исследовать некоторые свойства последовательности функций, определяемых уравнением в конечных разностях

$$Z_{n+2}(x) + \alpha(n, x) Z_{n+1}(x) + \beta(n, x) Z_n(x) = 0 \quad (*)$$

$$Z_0(x) = \varphi(x), \quad Z_1(x) = \psi(x);$$

подобного рода функции являются обобщением бесселевых, шаровых, Ламэ и т. п. Мне кажется, что уравнение (\*) в связи с уравнением дифференциальным для  $Z_n(x)$ :

$$Z_n''(x) + \gamma(n, x) Z_n'(x) + \delta(n, x) Z_n(x) = 0$$

могли бы явиться достаточными элементами для развития теории функций  $Z_n(x)$ . Благодаря особому виду уравнения (\*) здесь может применяться (да, вероятно, и применяется) теория непрерывных дробей. Как мне теперь ни хотелось заняться этими вопросами, я мог только наметить путь для отыскания функции  $\Omega(z, x)$ , играющей по отношению к  $Z_n(x)$  ту же роль, как  $1/\sqrt{1-2zx+z^2}$  в теории лежандровых полиномов. При

определении  $\Omega(z, x) = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(x) z^i$  играют роль символы вида

$$D_{\mu} f(x) = \frac{d[xd \dots xd(f(x))]}{dx^{\mu}},$$

$$D_1 f(x) = f'(x),$$

$$D_2 f(x) = \frac{d(xf'(x))}{dx},$$

$$D_3 f(x) = \frac{d\left[x\left(\frac{dx f'(x)}{dx}\right)\right]}{dx} \text{ и т. д.}$$

Дальше, однако, формальных рассуждений я не пошел.

Новостей у нас в Питере совсем мало. Ждем на побывку чуму, а пока довольствуемся холерой и плакатами о сырой воде. Стояла нестерпимая жара, теперь наступили холода. Вчера наименьшая температура была такая, какой не запомнят во все время (с 1740 г., кажется) производства наблюдений. В университете — ломка устоев и всяческий ремонт, был съезд учителей и в течение 1½ месяцев стены мирного здания оглашались криками, теперь все затихло и замерло. Словом, как будто новостей и совсем нет, — теперь особенно над городом мутная скука. Я, кажется, больше

никогда не буду защищать летний Петербург. Как у вас погода? Говорят, что теперь за границей лето отвратительное. Впрочем, наверное, в Abbazia лучше, чем в Питере, какова бы ни была погода, а потому желаю Вам получше провести там время

И остаюсь глубоко уважающий Вас  
А. Фридман

Напишите пожалуйста, если Вам будет время.

С Герсеговановской методой ничего не вышло, она оказалась неприменимой; Бубнов согласился на вычисление по методу Rietz'a + изменение Якова Давидовича. Теперь я вычисляю по той методе. За основные функции мной взяты такие:

$$\psi_m = x^2 (x - l)^2 y^2 (y - l_1)^2 (a_m x^m + a_{m_1} x^{m-1} y + \dots a_{m.n} y^m).$$

причем коэфф[ициент]  $a_{m_i}$  выбирается так, чтобы функции  $\Delta\psi_0, \Delta\psi_1, \dots, \Delta\psi_m, \dots$  были бы ортогональны. Вычисления значительны, но исполнимы. Думаю вычислить 5 таких функций и посмотреть, что они дают. Приходится составлять ряд двойных таблиц вспомогательного характера, чем теперь я и занимаюсь. Опасаюсь только, ту ли я взял форму для  $\psi_m$ . Если можно будет, напишите пожалуйста и об этом.

СПб., Большая Пушкарская, д. 36, кв. 10

9.VII 1911

Многоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Пришлось мне вспомнить изречение, о котором Вы говорили этой весной: «поступай как знаешь, — все равно жалеть будешь». Дело в том, что я решил жениться. Я уже говорил Вам в общих чертах о своей невесте. Она учится на курсах (математичка), зовут ее Екатерина Петровна Дорофеева, немного старше меня; думаю, что женитьба не отразится на занятиях неблагоприятно. Впрочем, в таких делах, как мое, рассуждения всегда приходят post factum, действие же всегда производится на основании чувства. Я пишу Вам о своем решении только теперь, за несколько дней (собственно говоря, даже часов) до свадьбы (она будет 10-го июля), т[ак] к[ак], зная непостоянство характера своего, боялся сообщить Вам ложные сведения.

Занятия наши с Як[овом] Дав[идовичем] идут, как кажется, довольно благоприятно. Они, конечно, состояли исключительно из чтения рекомендованных Вами курсов и статей для магистерского экзамена. Мы кончили уже гидродинамику и приступаем к изучению теории упругости. Есть у нас несколько вопросов, но их будет лучше выяснить при встрече с Вами.

Пишу по адресу сообразно Вашему маршруту, но не знаю, застанет ли Вас где-либо мое письмо. Сидя в Питере с «кипучими котлами...» и развороченной мостовой, с его пылью и «строительным сезоном», невольно завидуешь Вам. Как идет Ваше путешествие, хороша ли погода?

После свадьбы я думаю дней на пять проехаться в Финляндию; Як[ов] Дав[идович] тоже, кажется, собирается на Валаам на несколько дней.

Желаю счастливого путешествия. Передайте привет Ольге Николаевне<sup>28</sup>.

Остаюсь глубокоуважающий Вас  
А. Фридман

25.I 1912

Многоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Посылаю Вам том сочинений Riemann'a и очень извиняюсь, что благодаря своей забывчивости не сделал этого ранее.

Передайте мой поклон (и жены также) Ольге Николаевне.

Остаюсь глубоко уважающий Вас  
А. Фридман

8.X 1914

Дорогой и глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Не знаю, доходят ли до Питера наши солдатские письма<sup>29</sup>, но все-таки еще раз хочу написать Вам. Я не получаю ни одного письма, т[ак] к[ак] все письма, адресованные в наш отряд, куда-то пропадают. Война на здоровье мое производит прекрасное влияние да и вообще война не так страшна, как она кажется с далекого расстояния. Хотя наш отряд выделил из себя летучую передовую часть, в коей я теперь и нахожусь, и, следовательно, мы находимся на передовых позициях (напр[имер], недавно неприятель был от нас в двух-четырех верстах и недалеко рвались снаряды), но собственно ужасов войны незаметно. Неприятно на нервы действует масса раненых, особенно раненых тяжело, но к этому быстро привыкаешь и нервы тупятся. Один раз я летал на воздушную разведку, пролетал над немцами, но и тут ужасов войны не видно было. Словом, эта война для участвующих в ней активно не так ужасна. Другое дело мирное население. Оно терпит ужасный разгром с той и с другой стороны. К мародерству все очень быстро привыкают, да без него и не прожить. Трудно, оставаясь, как мы, на ночлег в разрушенном городе, удержаться от соблазна затопить печь, разломав для этой цели диван, и т. п. Словом,

без минимального мародерства не проживешь. Вся жизнь очень оригинальна. Белого хлеба не достанешь ни за какие деньги, колбасы нет, зато велосипед стоит 1—2 руб., бинокль 1 руб. 50 коп., барометр-анероид 25 коп., хороший микроскоп 5 руб. и т. д. Трудно только вести все это. Только теперь, втянувшись в новый строй жизни, начал заниматься. Но, конечно, заниматься очень трудно, ибо неподходящая слишком обстановка.

Как Вы и Ольга Николаевна поживаете? Я очень соскучился по Вас, по занятиям своим. Наблюдения мои идут очень хорошо. Как я и предвидел, летчикам даваемые сведения оказываются весьма полезными, так что моя командировка отнюдь не без пользы окажется.

Практически очень интересной является следующая задача. Допустим, что задано плоское течение жидкости, даны две точки  $A$  и  $B$ , дана скорость аэроплана  $v$ , движущегося в спокойной жидкости. Требуется между  $A$  и  $B$  найти такую кривую ( $C$ ), чтобы аэроплан, движущийся в вышеуказанном плоском потоке, прошел бы путь от  $A$  до  $B$  в наименьший промежуток времени. Мне кажется (да так выходит и по подсчетам), что этот путь отнюдь не является прямой линией. Несомненно, что он состоит в близкой связи с линиями тока. Решением этой задачи я не занимался. Общие правила вариационного исчисления, конечно, дадут возможность поставить такого рода задачу, но при этом будет выпущен целый ряд траекторий. Решать эту задачу я не пробовал даже в простейшем случае прямолинейного равномерного течения жидкости. Очень хочу обработать случай появления и исчезновения плоского вихря при меняющейся температуре. Интересно сравнить явление исчезновения и зарождения вихря от термических причин с таковым же явлением, происходящим от вязкости жидкости. Я уверен, что эти два явления совершенно разного характера. Мы с Яковом Давидовичем давно подыскиали случай такого пульсирующего вихря в вязкой жидкости, к сожалению, только все вычисления в Питере, так что здесь ничего не сделаешь. Атмосфера как раз и есть та жидкость, в коей вихри возникают от термических причин; с этим между прочим согласен и Н. Е. Жуковский, а также Bjerknæs.

Несомненно также, что от сохранения вихря нельзя прямо переходить к отсутствию сохраненного вихря. Несомненно, что есть целый ряд градаций «уничтожаемости» вихря, и каждая такая градация охватывает собой определенный класс движений в жидкости. Может быть, напр[имер], поставлен такой вопрос: при каком условии притока теплоты имеет место закон сохранения вихрей? Известно, что [это так], если давл[ение]  $P$  есть функция плотности  $\rho$ , однако единственный ли это случай, да и более того, этот случай каким термическим процессам отвечает? Кажется, этими вещами занимались сравнительно мало.

Простите, что так много пишу Вам, может быть, о пустяках для Вас, но очень хочется поговорить с Вами, т[ак] к[ак] военное иногда надоедает.



Теперь сажусь вычислять углы метания бомб с аэроплана, сегодня эти бомбы нам привезут, и на днях будем их кидать в неприятельские места.

Жалею, что совсем нет писем, скучно быть оторванным. Поклон Ольге Николаевне и пожелание Вам всего, всего хорошего.

Глубоко уважающий Вас рядовой  
А. Фридман

Пишите, Владимир Андреевич, может быть, и дойдет Ваше письмо, за каждую строку буду искренно благодарен.

Адрес мой:

*Штаб IX Армии, 26-й Авиационный отряд.  
Пол. почт. контора 120. Мне.*

5.II.1915

Глубокоуважаемый и дорогой  
Владимир Андреевич,

Сегодня получил открытку Вашу и спешу от души поблагодарить Вас и Ольгу Николаевну за память обо мне и подарок, который я еще не получил, но наверное вскоре получу. Почта здесь не очень исправна, так что подолгу сидишь без писем; в этом лежит причина, почему о решении академии по поводу наблюдений в Львовском университете я узнал только из Вашего письма, по-видимому, дело обстоит как следует.

Моя жизнь течет достаточно ровно, если не считать таких случайностей, как разрыв шрапнели в 20 шагах, разрыв взрывателя австрийской бомбы в  $1\frac{1}{2}$  шаге, кончившемся для меня почти благополучно, и падения на лицо и голову, кончившегося разрывом верхней губы и головными болями. Но, конечно, ко всему этому привыкаешь, особенно когда кругом видишь вещи в тысячу раз более тяжелые.

Недавно изловили хороший австрийский аэроплан; я много говорил с пленным летчиком; парень довольно хитроватый, т[ак] что из разговора с ним можно вынести впечатление, что в Австрии все прекрасно, войска и припасов много и что вообще война, по его мнению, кончится их победой. Все это, само собой, вздор, но что война грозит принять затяжной характер — это довольно вероятно.

Что касается до меня, то я думаю по окончании своей аэрологической миссии поучиться летать; вещь эта теперь утратила свою острую опасность и может быть с огромным успехом применена к метеорологии, а особенно к синоптике.

За последнее время много занимался вопросами теории бомбометания, что является одной из моих задач по поручению Вел[икого] князя. Вопрос сводится к уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\alpha u \sqrt{u^2 + v^2}, \\ \frac{dv}{dt} &= -g - \alpha v \sqrt{u^2 + v^2},\end{aligned}$$

при  $t = 0$   $u = c$  (около 20—40 м/сек);  $v = 0$ ,

$u$ ,  $v$  — слагающие скорости бомбы по осям координат;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\alpha$  — параметр, характерный для формы и веса бомбы.

Применяющиеся бомбы можно разделить на два класса: у одних  $\alpha$  очень мало, у других близко к единице. Для первых при решении вопроса я разлагал  $u$  и  $v$  по степеням  $\alpha$ , причем для практики оказалось достаточно ограничиться первыми степенями  $\alpha$ . Для второго класса бомб я применил прием математически незаконный, положив приблизительно

$$\sqrt{u^2 + v^2} = v \sqrt{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} \neq v.$$

Результаты, правда, очень близки к действительности, т[ак] что пока практически ими и пользуются (уже разрушили арсенал в крепости), но не только не строгость, а даже и неясность в математическом отношении такого довольно жульнического приема заставляет меня все время искать других способов, однако пока ничего не нахожу.

Трудно за отсутствием книг заниматься; читаю пока гидродинамику Wien'a и перечитываю кинематику жидкого тела Жуковского. У Wien'a очень интересно изложена теория вихрей и ряд частных случаев; он, конечно, исходит из уравнений Эйлера, между тем для весьма интересного вопроса о возникновении и исчезновении вихря от влияния изменений температуры жидкости необходимо рассматривать уравнение Лагранжа. Я, кажется, еще из Л. писал Вам, что нашел один пример возникающего и исчезающего вихря для термических причин. Вихрь этот, вероятно, принадлежит определенному классу вихрей.

Кто знает, когда можно будет вернуться к этому вопросу; может быть, совсем не придется, ибо, конечно, серьезная научная работа в военной обстановке немыслима, хотя пока что мне кажется, что мозг мой не застывает и по окончании войны будет работать, как и раньше. И то слава Богу!

Еще раз искренне благодарю Ольгу Николаевну и Вас за память о солдате; ныне я уже ефрейтор, а говорят, что скоро буду прапорщиком. Пишите, дорогой Владимир Андреевич, Вы даже представить себе не можете, как ценится здесь каждая строчка. Всего Вам и Ольге Николаевне хорошего.

Ваш А. Фридман

28.II 1915

Глубокоуважаемый  
и дорогой Владимир Андреевич,

Большое Вам спасибо за память обо мне и за подарок, как я уже писал Ольге Николаевне, теплые вещи пригодились мне теперь очень и очень, т[ак] к[ак] морозы у нас завернули изрядные. Да и на следующую зиму пригодятся, ибо конца «брани» пока не видно.

Хорошо, что Zarembo уехал в Италию, а то здешние профессора в довольно плачевном положении, ибо ни с которой стороны не получают жалования; картина получается такая, что профессор физики университета живет в одной комнате, т[ак] к[ак] у него нет денег на отопление квартиры, ассистент политехникума открыл мелочную лавочку и т. п. Все это мне довелось узнать, когда я по поручению кн. Голицына<sup>30</sup> устраивал метеорологические наблюдения во Львове.

Огромное Вам спасибо за уравнение. Я остановился на полпути, получив уравнения для

$$\frac{dx}{dt} \text{ и } \frac{dy}{dt} \left( x = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad y + \frac{v}{u} \right),$$

но не догадался выразить  $y$  через  $x$ . Хотя формулы получаются довольно большие, но сознание твердого фундамента дает возможность взять их в оборот и, исходя из них, дать уже строгие разложения в ряды. А то меня все время неприятно мучила нестрогость моих рассуждений, и хотя вычисления хорошо сходились с практикой, но все же это не то, не так приятно, как разложения, в коих видно, что отбрасывается и что принимается во внимание.

Приближенное интегрирование по методу Runge, хотя конечно, дает в вычислительном смысле быстро результат, но зато заставляет предполагать  $\alpha$  заданным, что не всегда удобно, т[ак] к[ак] часто  $\alpha$  приходится определять по времени падения бомбы с определенной высоты.

Мне самому довелось недавно проверить свои соображения во время одного из полетов под П[еремышлем]<sup>31</sup>; оказалось, что бомбы падают почти так, как и следует по теории. Чтобы окончательно подтвердить теорию, я в один из ближайших дней полечу снова. Бомбы, кои я бросаю (весом 5 ф[унтов], 25 ф[унтов] и 1 п[уд]), принадлежат к числу тех, для коих величина  $\alpha$  очень мала, т[аким] о[бразом], пока я проверяю лишь разложение интегралов уравнений по параметру  $\alpha$ .

Надо сказать, что в моих условиях заниматься довольно трудно, да и разные вычисления с бомбами и прицелами занимают массу времени, поэтому теорией вихрей в жидкости с меняющейся температурой, к чему меня сильно влечет, занимаюсь очень мало. Недавно я пробовал решить задачу об особом классе плоского течения жидкости, в коем  $x$ ,  $y$  выража-

ются линейной функцией начальных координат  $a, b$ , причем коэффициенты суть функции  $t$ . Здесь, конечно, нужно применить уравнения Лагранжа; частные случаи получаются довольно легко, но решить задачу в общем случае очень трудно. Один из случаев дал мне как раз уничтожаемый вихрь, но я уже писал Вам, что получил этот случай раньше. Странно как-то на войне заниматься этим делом, но здесь, особенно когда не летаешь, так спокойно, что поневоле о войне забываешь.

История с вознаграждением Успенскому<sup>32</sup> и Адамову<sup>33</sup> несомненно достойна быть возведенной в анекдотический сан. Очевидно, чтобы «там» ни менялось, все останется по-прежнему. Вот Вы пишете, что все — мелочи сравнительно с войной, но когда стоишь у «дела», то, наоборот, война кажется мелочью сравнительно с тамошней Питерской жизнью, вернее, не война, а ее эпизоды отдельные.

Жизнь моя течет довольно разнообразно, главным образом занят бываю организацией разных наблюдений и т[ому] п[одобных] дел. Недавно занимался девиацией компасов на аэроплане и несколько дней корпел над разложением полученных результатов в тригонометрические ряды.

Спасибо Вам, Владимир Андреевич, за внимание, не забывайте и впредь письмами — здесь каждое письмо дорого, дорого ценится. Думаю, что скоро свидимся, т[ак] к[ак] у меня уже накопилось много дел, из-за коих нужно ехать в Питер; приеду, верно, уже офицером — пора бы, ведь восьмой месяц «воюю».

Искренне уважающий Вас  
А. Фридман

Адрес: Штаб IX Армии, 26  
Авиационный отряд, Действ. Армии,  
25 июля 1915 г.

Прапорщику Фридману

Дорогой и глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Давно не писал Вам, потому что жизнь наша солдатская сделалась теперь очень однообразной и писать было не о чем; теперь я привык, втянулся в эту жизнь и т[ак] к[ак] не рассчитываю на скорое окончание ее, то приспособился заниматься и действительно занимаюсь, хотя, конечно, пока еще по-дилетантски. Я, как, наверное, Вам известно, состою теперь летчиком-наблюдателем 26 Авиационного отряда и по этой должности моей мне приходится очень много летать, вернее, приходилось, т[ак] к[ак] теперь погода не очень хорошая и полетов мало. Полеты были разные: обыкновенные и интересные. Особенно интересны были два полета, в которых мне довелось участвовать в воздушных боях; первый полет был на «Фармане-15», летчик передал мне управление и я несколько минут

вел аппарат в воздухе, а летчик стрелял в немца из карабина; второй бой был грандиознее: мы вступили в бой с двумя неприятельскими аэропланами, из которых один был вооружен пулеметом; самое ужасное было слышать дробь пулемета, целящегося в нас; расстояние между аэропланами было ничтожное, и я считаю чудом, что спасся от смерти. Бой происходил над нашими войсками, на глазах у тысячи свидетелей; немцы ушли, завидев возвращающийся с разведки второй наш аэроплан «Вуазен». Из «неблагополучных» полетов стоит упомянуть два: во время одного из них (я летал на «Фармане-16») у земли сильный вихрь бросил аэроплан, он скользнул на крыло, и мы разбились вдребезги, т. е. не мы, вернее, а аэроплан; второй полет с благополучным, к счастью, окончанием, но который мог бы печально кончиться, это полет ночью на «Вуазене». Подходя к земле и делая вираж у земли, мы ее уже за темнотой не видели; на одном из виражей сдал мотор, и если бы не чудесная случайность, мы врезались бы на всей скорости в враг; само собой, от меня и летчика ничего бы тогда не осталось.

Недавно я был в Питере, заезжал в Пулковскую обсерваторию и просил Баклунда дать мне небольшой телескоп-кометоискатель; он был очень любезен и дал прекрасную трубу Доллонда. Она уже установлена на аэроплане, и первая разведка будет произведена с помощью этой трубы; я возлагаю на нее большие надежды, т[ак] к[ак] поле зрения, увеличение и яркость у нее весьма большие.

Кажется, мое предсказание, что я вернусь с войны капитаном, начинает сбываться; вышел приказ, чтобы «достоинейших» прапорщиков производить в подпоручики, и я, вероятно, буду скоро представлен к производству. За разведки я представлен к Георгиевскому оружию, но, конечно, получу ли — большой вопрос. Конечно, это как будто мелочность с моей стороны — интересоваться такими делами, как награда, но что поделаешь, так видно уж устроен человек; всегда ему хочется немного «играть» в жизни.

Б. Б. Голицын обещал мне по окончании войны, конечно, место старшего физика; он хочет поставить меня во главе того математического отделения, о котором я говорил с Вами весной и которое, вероятно, будет осуществлено в обсерватории. Для меня лучшего места трудно и придумать.

В отряде скуки ради я немного учусь летать, но, само собой, профессиональным летчиком я никогда и ни за что не буду; разве если война будет лет 10, но это маловероятно.

В настоящее время я оканчиваю подготовку к печати небольшой работы о вихрях в атмосфере. Здесь я встретился с очень оригинальным обстоительством, о котором и хочу рассказать Вам.

Пусть  $\rho$  будет плотностью,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — составляющими скоростей,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  — составляющими вихрей безграничной жидкости. Пусть вихри в жидкости занимают объем  $\tau'$ , рассмотрим объем жидкости  $\delta$ , ограничен-

ный поверхностью  $S$  с внешней нормалью  $(n)$ . Живая сила такого-то объема будет

$$L = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho (u^2 + v^2 + w^2) d\tau,$$

$$L = L_1 = L_2 + L_3 - L_p,$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \int_S \rho \sum_{x, y, z} U \cos(\bar{n}, \bar{x}) \varphi dS - \frac{1}{2} \int_{\tau} \varphi \frac{d\rho}{dt} d\tau,$$

здесь

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau'} \frac{\xi d\tau'}{r} \text{ и т. д.},$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho (U_{\zeta} + V_{\eta} + W_{\zeta}) d\tau,$$

$$L_3 = \frac{1}{2} \int_S \rho \sum_{x, y, z} U (v \cos(n, z) - w \cos(n, y)) dS,$$

$$L_p = \frac{1}{2} \int_{\tau} \sum_{x, y, z} U \left( v \frac{d\rho}{dz} - w \frac{d\rho}{dy} \right) d\tau.$$

Это — известные разложения живой силы. Прodelывая для разных случаев вычисления, я заметил следующее обстоятельство. Энергия  $L_2$  оказывается значительно больше  $L$  и компенсируется эта  $L_2$  именно поверхностным интегралом  $L_3$ . Я провел вычисления этих составляющих живой силы для случая атмосферных вихрей и здесь получил чрезвычайно любопытные выражения, характеризующие, какая часть живой силы атмосферного движения идет на вихри и какая на движение с потенциалом скорости. Об этом я и написал небольшую статейку. Больше всего поразило меня то неожиданное обстоятельство, что часть живой силы  $L_2$  ни в каком случае не может считаться, как это обычно принимается в курсах гидродинамики, за живую силу вихрей; за таковую можно при малости  $L_1$  принять лишь сумму  $L_2 + L_3$ . Между прочим для несжимаемой жидкости постоянной плотности условие  $L_2 + L_3 < L$  тесно связано с условиями возможности заданного вихревого движения (эти условия имеются, напр[имер], в Вашей статье о вихре в *Annales de l'Ecole Normal*), и мне даже кажется, что устойчивость вихрей связана или может быть поставлена в связь с разложением живой силы  $L$  на составляющие.

Сидя во Львове, я занимался вихрями в жидкости при меняющейся температуре; оказывается, что и в этом случае можно найти условия существования вихрей, аналогичные гельмгольцевым, только более сложные; оказывается, что любым распределением вихри обладать не могут, что

должны выполняться условия интегрируемости некоторых систем уравнений. Условия эти я получил *explicité*, и если удастся применить их и обстоятельства позволят, я пришлю маленькую заметку на Ваше благоусмотрение, может быть, ее будет бесполезно напечатать.

Недавно кн. Б. Б. Голицын дал мне посмотреть одну работу по применению теории упругости к сейсмологии; задача, поставленная там, решалась автором неверно; он сделал тут ошибку, какую делал и я много раз, пытаясь решать различные задачи теории упругости с помощью метода фундаментальных функций. Оказалось к моему крайнему удивлению что, может быть, к вопросу этому можно будет применить кое-какие соображения об изодинамических поверхностях, которыми, как Вы знаете, я когда-то занимался; очень любопытно, если что-либо выйдет. Кстати, по поводу сейсмологии кн. Голицын дал мне одну задачу (обращение интеграла или решение интегрального уравнения типа *Volterra*), задача эта легко решается, но исследовать полученное решение оказалось не так просто, я теперь занимаюсь этим. Там все сводится к решению уравнения

$$U(\psi) = z,$$

мне удалось показать, что при малых  $z$ ,  $t$  разлагается по степеням  $\sqrt[3]{z}$ , но не удастся ничего выяснить при  $t = 1$ , хотя я и думаю, что это не так трудно.  $U(t)$  определяется равенством

$$U(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 v - (v^2 - t^2 + 1) dv,$$

причем  $F(1) = 0$ .

По поводу этого же вопроса мне пришлось познакомиться с работами *Volterra* по поводу функции от линии или от функции. Как смотрите Вы на эти идеи? Мне кажется, что это уже не декаденство, что во многих случаях здесь имеются хорошие методы. Впрочем, может быть, я сужу так «с голодухи».

Не сердитесь, дорогой Владимир Андреевич, что я так разболтался; очень уж хочется поговорить о научных вопросах, от которых я теперь так далек; мне пришлось на половине прервать это письмо и лететь на охрану нашего змейкового аэростата от неприятельских аэропланов. Наблюдая в бинокль за стрельбой, которую вела по нас вражеская батарея, я с каждой вспышкой, с каждым выстрелом думал: «А вдруг письмо останется недописанным, вдруг через 8—10 секунд от аэроплана останутся лохмотья, и он турманом полетит вниз, вдруг конец», но теорема Бернулли спасла и на этот раз, и мы более или менее благополучно спустились, и я пишу эти строки.

Иногда надоедает война; хочется скорей победы, оглушительной, сильной, но этого надо ждать; однако дух пока бодр, а если приучусь

заниматься здесь, то может быть к окончанию войны и диссертацию напишу.

Как здоровье Ольги Николаевны? Знаю, что Вы в Крыму, но где — точно не знаю; пришлите солдату весточку, не сердитесь на него за непомерное письмо и передайте от него горячий привет Ольге Николаевне.

Скоро конец лета, будете ли Вы в университете? Или же больше читать не будете? Черкните, дорогой Владимир Андреевич, вспомните солдата и Вашего ученика

*А. Фридман*

Глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Прежде всего позвольте поблагодарить Вас за все Ваши хлопоты и все Ваше по отношению ко мне внимание. Отзыв о моих работах, который Вы были так добры написать, по-видимому, получен в Перми, т[ак] к[ак] Г. Г. Вейхардт<sup>34</sup> телеграфировал мне еще 20 марта, что выборы будут произведены через две недели. В настоящее время я жду результатов и по суетливости, мне свойственной, чрезвычайно волнуюсь. Впрочем, здесь дело не в одной суетливости, а еще и в том тяжелом положении неопределенности, в котором я нахожусь теперь. Моя «военная жизнь» оставила мне наследство в виде тяжелой (хотя кажется и временной) сердечной болезни, которая в данный момент не дает мне возможности много двигаться и ездить по железным дорогам; доктор говорит, что это пройдет, но пока я не могу поехать в Петроград и рискую, ибо могу потерять место в обсерватории, хотя я послал туда телеграмму и посылаю прошение об отпуске по болезни.

Если с Пермью ничего не выйдет, а обсерватория меня уволит, то я действительно вступлю в полосу глубокого несчастья, так как сбережения мои на исходе; об этом страшно думать, т[ак] к[ак] здоровье мое уже не прежнее и испытать новое несчастье будет мне не так легко, как прежде. Я так измучился, что с удовольствием согласился бы быть сторожем в Пермском университете с правом читать факультативный курс и пореже видеть людей.

Простите, глубокоуважаемый Владимир Андреевич, что я пишу так подробно о своих делах; здесь в Москве я совсем чужой, порой становиться очень тоскливо и хочется пожаловаться. Вы до последнего времени не уставали принимать участие в моих мелких горестях, а я знаю, как редко делают это люди; поэтому я уверен, Вы не рассердитесь на меня за это письмо.

При той полной неопределенности, в которой я сейчас живу, особенно за последнее время, занятия мои идут из рук вон плохо. Несколько



лучше было дело с занятиями с месяц тому назад. Я пытался после трехлетнего перерыва встать на рельсы. На всякий случай готовился к лекциям по механике, начал со статики; познакомился с английской литературой; т[ак] к[ак] в статике пришлось столкнуться с доказательством параллелограмма сил, то я просмотрел по этому вопросу все работы, какие нашел посильным. Попытался из старого доказательства Poisson'a получить то же, что было получено новейшими ухищрениями (Shur пользовался даже теорией групп Ли); оказалось это вполне возможным, т[ак] что параллелограмм сил можно получить из пуассонова доказательства без предположения непрерывности как и дифференцируемости функций, входящих в выражение равнодействующей.

С величайшим удовольствием читал Thomson and Tait «Natural Philosophy», в качестве механического примера вздумал разобрать маятник на аэроплане, а потом очень заинтересовался этим вопросом; так как при исследовании движений маятника встречается случай очень большого некоторого параметра, то я попробовал приложить методу асимптотических выражений и, начав изучать диссертацию Якова Давидовича, нашел возможным приложение это довести до конца. Для меня самого задача эта оказалась очень полезной в аэродинамическом смысле. Так как она представляет известный интерес для практики построения уклономеров на аэропланах, то думаю, когда условия внешние это позволят, напечатать ее, тем более что решение мною доведено до численных результатов.

Работой своей занимался мало, — причиной чему полное отсутствие спокойствия. Обработал только и выяснил для себя роль того элемента в меняющейся вихревой трубке, который я назвал отклонением и который, как оказывается, тесно связан с условиями интегрируемости уравнений гидродинамики в случае меняющейся температуры.

Для разбора случая получения тепла излучением, случая очень важного при практическом применении движений жидкости с меняющейся температурой, мне пришлось прочесть Wärmestrahlung Планка и для сего познакомиться с электродинамикой и уравнениями Максвелла. Из боязни разбросаться я далеко в этой области не забирался, хотя, по-видимому, мне придется глубже с ней познакомиться, чтобы иметь возможность разобраться в вопросе получения тепла лучеиспусканием.

В настоящее время мне приходится вместе с Александром Феликсовичем<sup>35</sup> готовить к печати баллистические таблицы — результат работ вычислительного бюро в течение прошлого года. Было бы жаль, если бы вся эта работа пропала, потому я и решил ее напечатать, хотя, конечно, практического значения она теперь никакого для нас не имеет, ибо, как говорится, «после ужина горчица...» В конце концов на эту работу приходится смотреть как на интегриров[ание] системы дифф[еренциальных] ур[авне]ний с четырьмя параметрами.

Простите, Владимир Андреевич, что я так много написал Вам о себе. Очень тоскливо; часто горько жалею, что пошел на войну; как будто и выполнил то, за чем пошел, но на что это все теперь нужно!..

Сколько слышал я от Якова Давидовича <sup>36</sup>, Вы и Ольга Николаевна в добром здоровье, что теперь должно почитать за особое благоволение судьбы. Передайте мой и жены поклон Ольге Николаевне и не сердитесь на большое письмо Вашего ученика, искренне уважающего Вас

*Александра Фридмана*

*10 апреля 1918 г.  
Москва, Б. Розловский пер., д. 12, кв. 21*

Глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Как, вероятно, Вы знаете от Якова Давидовича, я решил для выяснения дела с Пермью поехать туда сам, т[ак] к[ак] почтовые и телеграфные сношения ни к чему не привели. Сегодня, будучи уже в Перми, я узнал, что на вечернем заседании факультета я получил девять белых и один черный и, т[аким] о[бразом], к счастью для меня, первая стадия выборов была мне благоприятна; говорят, что остальное — большей частью формальности. Дело во всяком случае выяснится в течение одного месяца. Благоприятным результатам я особенно обязан Вашему доброму ко мне отношению и отзыву. Я тем более обязан Вам, что в сущности живу в кредит и только с нынешнего года получу возможность начать оплату своих векселей; буду стараться их оплатить, если не полностью рублем, то по крайности хоть гривенником, чтобы не быть банкротом злостным.

В Перми удивительно тихо и все как-то в городе делается семейно, хорошо, даже обучение Красной Армии в 30—40 человек численностью. После бурной Москвы я здесь отдыхаю и даже питаюсь много лучше, чем в столице. Университет здесь может быть поставлен в очень благоприятные условия благодаря наличности огромного места и полному отсутствию возможности побочного заработка; по-видимому, университетская жизнь идет очень интенсивно, хотя, конечно, много мешает отсутствие в данный момент помещений и приборов. Для механического кабинета очень благоприятно то обстоятельство, что поблизости находится огромный пушечный завод, который пойдет навстречу и при оборудовании и при налаживании кабинета. Для кабинета уже отведено помещение и будет, вероятно, по моей просьбе отведено помещение еще в первом этаже для установки тяжелых машин (напр[имер], [для лаборатории] т[еории] упругости и сопр[отивления] материалов).

Единственно, что в Перми будет создавать простые затруднения, это отсутствие книг. Придется очень усиленно работать над получением книг,

ведь в известном смысле книги важнее приборов. Мне придется просидеть в Перми около месяца, чтобы выяснить свое дело и двинуть дело Ал. Феликсовича <sup>35</sup>, его очень бы хотелось вытянуть из малополезной службы.

С собой в Пермь захватил работу по баллистическим таблицам, о коих я Вам писал; она совсем готова, осталось только написать. Затем думаю написать две работы (теперь же в Перми): одну о колебании маятника на аэроплане, другую об особом течении жидкости под влиянием конвективного переноса тепла. Пишу, конечно, без большой надежды напечатать, т[ак] [как] теперь это кажется абсолютно невысказуемо. Недавно я узнал, что напечатать таблицы с текстом (около 80 страниц) в 300 экземплярах будет стоить 9000 рублей. Конечно, в этих условиях печатать что-либо невозможно, хоть Пермь и в этом отношении благоприятна и печатание здесь стоит много дешевле.

Еще раз позвольте, глубокоуважаемый Владимир Андреевич, поблагодарить Вас за Вашу доброту, давшую мне возможность вернуться к работе. Буду стараться, сколько есть сил, оправдать Ваше доверие.

Прошу передать мой поклон Ольге Николаевне.

Искренне уважающий Вас Ваш  
А. Фридман

27 апреля 1918 г., г. Пермь.

Мой адрес: Пермская ул., д. 84.

Г. Г. Вейхарту для А. А. Фридмана

г. Пермь, Сибирская ул., дом Алина.  
12 мая 1918 г.

Глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Пишу Вам это письмо из Перми в надежде, что, может быть, оно и дойдет (почта работает здесь из рук вон плохо). Я чрезвычайно рад, что могу устроиться в Перми, т[ак] к[ак] университетская атмосфера здесь очень хорошая — почти нет никаких посторонних науке дел, и все друг другу помогают. Компания математиков здесь очень дружная и весьма симпатичная. Словом, я думаю, что здесь будет очень хорошо и мне удастся начать выплачивать мой неоплатный долг.

За время сидения в Перми я закончил статью по аэробаллистике, которая, как я Вам уже писал, будет издана Управлением воздушного флота. В теоретической части этой статьи при установлении пределов интеграла

$$\int_0^{p_0} \frac{dp}{1 + pP(p)}, \text{ где } P(p) = p \sqrt{1 + p^2} + \ln(p + \sqrt{1 + p^2}),$$

играющего важную роль при интеграции уравнений аэробаллистики, я пользовался рядом указаний, сделанных несколько лет тому назад Вами и прошу поэтому Вашего разрешения на Вас сослаться. Т[ак] к[ак] печатание будет длиться несколько месяцев, то я надеюсь быть в Питере и получить разрешение от Вас лично.

Работа моя в Пермском университете пока сводится к представлению на ближайшем заседании факультета плана преподавания (лекций и практических занятий).

У меня будет один старший ассистент (может быть Ал[ександр] Фел[икович] Гаврилов) и два младших, для занятий в лаборатории.

Возникает вопрос об установлении второй кафедры по механике, но я думаю с этим подождать, т[ак] к[ак] было бы хорошо, если бы эта кафедра открылась как раз ко времени окончания магистерских экзаменов А. Ф. Гавриловым, что на первое время обеспечило бы ему возможность написать диссертацию.

По моему плану будет факультетом, вероятно, организовано издание лекций; студенты здесь прямо мучаются без пособий. Есть у меня еще ряд других планов, но я сознательно сдерживаю себя, дабы не слишком закрыться и иметь возможность работать и заплатить долги. В Перми устраивается Физико-математическое общество; вероятно, мы получим большую субсидию и будем иметь возможность издавать журнал размером 20 печатных листов в год. Подробнее об этом я напишу Вам, когда дело более выяснится или же доложу лично при свидании.

Как Вы и Ольга Николаевна существуете теперь в Питере? Рассказывают о питерской жизни прямо-таки ужасы. Здесь не жизнь, а прямо рай, полная почти тишина и дешевизна невероятная (1 пуд муки 25—30 рублей!).

Мне удалось на лето нанять две комнаты в почти европейском доме. С квартирами здесь вообще плохо.

Передайте мой поклон и пожелание всего лучшего Ольге Николаевне. Вас позвольте еще раз поблагодарить за все, что Вы для меня сделали.

Искренне уважающий Вас  
А. Фридман

Шохат <sup>36</sup> свирепствует, как рассказывал мне один студент, в Екатеринбурге, он сделался левым эсером и очень важной персоной. Прямо чудеса!

Глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Спасибо Вам большое за Ваше письмо, я получил его, сидя в Перми, откуда все из-за дел не удастся выехать. Недавно сюда приехал Н. М. Гюнтер<sup>37</sup>, который отлично и сравнительно недорого устроился под Пермью на даче.

Вы ведь тоже собирались в наши края, хотя, пожалуй, лучше пока недельку повременить, так как положение здесь не слишком определенное из-за нажима чехословаков, а отчасти из-за трений между местной и центральной властью, каковые трения приобретают даже и более резкий характер. Все это заставляет меня посоветовать Вам, если, конечно, у Вас не взяты билеты или не сделаны бесповоротные приготовления, повременить так недельку.

В пермских университетских делах теперь все идет очень хорошо, но одно время ощущались нелады и большие разногласия в Совете, которые кончились сменой ректора, — вместо К. Д. Покровского у нас теперь ректором проф. Н. В. Кумпашев — химик; сколько мог приглядеться, этот переворот оказался благотворным и для университета и для астрономии.

Мне удалось с помощью нескольких хлопотливых дней получить для Механического института большой двухэтажный фабричный корпус. В этом корпусе я намерен поместить основную механическую лабораторию для измерения простейших механических величин, затем лаборатории по сопротивлению материалов, гидродинамическую, аэродинамическую и технических измерений. Во втором этаже будет помещаться чертежная, библиотека с читальней, кабинет таблиц и справочников, коллекция моделей с верхним светом, аудитория и кабинеты преподавательского персонала. Как видите, удастся многое разместить с удобством; я хочу попытаться в Перми провести теоретическую механику в английском стиле, и мне думается, что хорошо, чтобы один университет развился бы от другого, т[ак] сказать, стилем преподавания. Знаю, что на эти затеи Вы, наверное, глядите с улыбкой, но думаю, что не будете на это сердиться, т[ак] к[ак], говоря о практическом направл[ении] в механике, я, конечно, далек от мысли вносить в университет мелкий дух инженерных школ, где ремесленники довольствуются сборниками формул, преисполненными грубейшими ошибками; мне думается, что в университете на первом месте стоит теоретическая сторона дела (сюда включаю и экспериментальную механику), иллюстрируемая практическими приложениями механики.

Математики завели свой математический кабинет, включающий модели [и] математические инструменты. Я был очень обрадован известием, что к нам едет Владимир Иванович<sup>38</sup>, выборы его, конечно, обеспечены, т[ак] к[ак] Вы обещали прислать свой отзыв, это было бы очень хорошо.

А. Ф. Гаврилову работы здесь немного будет, и он, конечно, усиленно займется экзаменами; я очень рад, что он снова попал в правильные

для научной его жизни рельсы. Здесь я думаю, что ему будет полезно поручить чтение лекций по векторному анализу, начертательной геометрии и кинематике. Для этого ему придется защитить диссертацию pro venia legendi в факультете, работой могло бы с избытком служить почти законченное им исследование о геодезических, которое в свое время Вы ему дали.

Для меня самый больной вопрос — это магист[ерская] диссертация. Я начну над нею работать с середины зимы, т[ак] к[ак] чувствую, что в противном случае в научном смысле разбросаюсь и, значит, погибну. Мои некоторые способности быстро ориентироваться в практических делах служат мне зачастую очень худую службу, т[ак] к[ак] коллеги стремятся поручить мне какую-нибудь ответственную практическую работу; от административных университетских должностей я отказался наотрез, от другой работы счел на первое время отказываться неудобным, но обусловил срок своей работы (до сентября) и от этого не отступлю, ибо совершенно понимаю, что соль университета в науке и в научном творчестве, все же остальное дело важное, но второстепенное.

Буду всегда благодарить Вас, дорогой Владимир Андреевич, что Вы дали возможность мне стать на рельсы. Простите, что так много написал, все-таки я здесь один и хочется подвергнуть свои соображения Вашей критике.

Искренне желаю Вам и Ольге Николаевне благополучного путешествия и хороших хлебов в Уржуме. Приезжайте в Пермь посмотреть на пермского детеныша, каковым является наш университет.

Спасибо Вам за поддержку предполагаемого журнала и за разрешение ссылки на Вас. Журнал, кажется, действительно выйдет около 20 листов в год, название будет безличное, вроде «Известия Физико-математического общества» или что-либо в этом роде.

Пишите, хоть изредка, и не забывайте Ваших пермских птенцов.

Искренне уважающий Вас  
А. Фридман

9 июня 1918 г., г. Пермь, Сибирская ул., д. Алина

Глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Отзыв Ваш о Смирнове получен, и произведено, конечно, соответствующее действие; благодаря ему я думаю, что Смирнов будет выбран единогласно на факультете, выборы его состоятся завтра в факультете, остальное, как Вы знаете, формальности, они займут времени около двух-трех недель. Получив отзыв Ваш, я убедился, что Вы живы и здоровы и также уржумская история прошла для Вас благополучно; это очень хо-

рошо, а то, не получая долгое время в ответ на мою телеграмму, посланную Вам, отзыва, я стал думать — не случилось ли с Вами чего-нибудь.

Живем мы здесь в достаточной мере скверно, т[ак] к[ак] близость фронта сказывается на усиленном действии всяких «чрезвычайек» и т. п. установлений. Еда стала очень плохая и дорогая, цены сравнялись с летними питерскими. В университете работа идет очень плохо, т[ак] к[ак], с одной стороны, работе мешает подозрительное отношение к ун[иверсите]ту местной власти, а с другой стороны, студентов нет, а кто и есть — занят погоней за куском хлеба. Научная работа в университете движется тоже вяло, главная причина этому — отсутствие книг и общие условия жизни.

Мы организовали Физико-математическое общество, получили субсидию в 15 000 рублей и приступили уже к изданию журнала. Описывать трудности, кои пришлось преодолеть, не буду. Теперь мы имеем математ[ический] шрифт, и часть статей пошла уже в набор. Мы нарочно пустили сначала статьи местные, наши, чтобы наборщики на них выучились бы. Однако без помощи лучших сил журнал не проживет дольше года. Совершенно поэтому необходима Ваша помощь, Владимир Андреевич. Вы мне обещали свою этому делу поддержку, потому я и все здешние математики ждем очень Вашу статью. Если нельзя будет отправить статью нарочным, можно прислать ее и по почте в адрес: Пермь, Университет, Физико-математическому обществу.

Я много готовлюсь к лекциям, частью (за отсутствием в Перми книг) должен был написать для литограф[ии]. Из других работ занимался решением вопроса о движении жидкости при конвекционном переносе тепла, получил разложение в ряды по особым функциям такого вида:

$$\Phi_1 = \frac{e^{az} - 1}{a}, \quad \Phi_2 = \frac{e^{az} - 1 - az}{a^2}, \quad \Phi_3 = \frac{e^{az} - 1 - az - a^2 z^2}{a^3} \quad \text{и т. д.}$$

функции эти несколько аналогичны применяемым Борелем в вопросе расходящихся рядов; с вычислительной стороны разложение очень удобно; сходимось доказывается при помощи теоремы существования решения д[ифференциальных] ур[авнений]. Вообще же настроение здесь очень тяжелое и дело с занятиями идет туго, ко всему прочему пропали мои вещи, книги и, что хуже всего, заметки и вычисления; не знаю, удастся ли все восстановить по памяти, там есть многое нужное для работы.

Передайте поклон Ольге Николаевне от меня и жены. Если есть у Вас время, черкните несколько строк. Мы живем здесь, как в тюрьме, вовсе нет вестей.

Искренне уважающий Вас  
А. Фридман

19 сентября 1918 г., г. Пермь.

Смирнов выбран Советом ун[иверсите]та единогласно, дело теперь за его приездом, если можно окажите содействие, т[ак] к[ак] нужда у нас на математи[ческом] отделении страшная.

20 декабря 1918 г., г. Пермь

Дорогой и глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Под несчастной звездой очутилась Пермь, — теперь она стала уже не прифронтовым, а прямо-таки фронтовым городом. Происходит спешная, полная и в достаточной мере бестолковая эвакуация. Университет назначен к эвакуации во вторую очередь, но пока никаких транспортных и укупорочных материалов не доставлено, почему и эвакуация стоит. Назначено ехать в Москву на Павелецкий вокзал, и говорят, что университет с имуществом и потрохами будет передан Нижегородскому. Лично я не слишком расположен эвакуироваться, так как все мои вещи и работы находятся в Уфе, куда перевезены из Казани во время тамошнего восстания. Если бы работы и книги при мне были, я бы не боялся эвакуации, но уехать теперь, значит все потерять; жалко особенно начатых работ.

Сейчас жизнь здесь невообразимо тяжела; уже третью неделю мы не получаем никаких продуктов из района и сидим совершенно без хлеба; при этом я живу в отличных условиях (четверо в двух комнатах, но зато в казенных); Безикович<sup>39</sup>, напр[имер], вовсе не имеет освещения, в квартире у него холодно, он и жена живут, конечно, не только без прислуги, но и без дворника, т[ак] что сами носят воду и дрова. В охотку это хорошо, но когда на такие дела уходит  $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$  дня, — это становится делом нелегким.

Само собой разумеется, что при таких условиях занятия идут чрезвычайно плохо; это меня угнетает больше всего — проходят лучшие годы и не двигаешься вперед. За истекшее полугодие я выполнил следующее:

1) читал 2 ч[аса] статику, 5 ч[аса] — динамику систем и 3 ч[аса] — дифференциальную геометрию. По моей неопытности на подготовку уходило до 40—50 часов в неделю;

2) написал и напечатал в нашем журнале статью о доказ[ательстве] параллелограмма сил;

3) выполнил и подготовил в печать две работы; одну о движ[ении] материальной точки в среде переменной плотности и другую, чисто теоретического характера, о движении жидкости при конвекционной передаче тепла и о температурном градиенте; в этой второй заметке я решаю во-



прос с помощью разложения в сходящийся ряд вида

$$\varphi_n(z) = \frac{e^{az} - 1 - az \dots - \frac{a^n z^n}{n!}}{a^{n+1}};$$

задача доведена до числен[ных] вычислений;

4) доказал сходимость ряда, решающего задачу о температурном градиенте, о котором я писал в Геоф[изическом] сборнике; статья об этом подготовлена;

5) в настоящее время занялся задачей о движении материальной точки, притягиваемой тремя неподвижными центрами.

Думаю применить биполярные координаты.

Как видите, никакой систематической работы по вопросам диссертации не вел, отчасти потому, что все мои заметки в Уфе, отчасти потому, что внешние причины выбивают из колеи.

Не поленились, дорогой Владимир Андреевич, напишите мне несколько строк, я совершенно падаю духом, т[ак] к[ак] долг мой не только не уменьшается, но все время монотонно возрастает.

Жена шлет Вам и Ольге Николаевне поклон; я тоже. Если соберетесь писать, пишите по адресу: г. Пермь, Университет, Фридману, а лучше всего передайте просто Якову Давидовичу, он с оказией переправит.

С наступающим новым годом; дай Бог, чтобы полегче жилось.

Искренне уважающий Вас  
Ваш А. Фридман

12 августа 1919 г.

Адрес мой: Пермь, Университет,  
А. А. Фридману.

Глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Сегодня с радостью узнал, что Вы в добром здоровье и по-прежнему работаете. Пользуясь тем, что в Питер едет А. С. Безикович, решаюсь написать Вам, доложив кратко о своем, довольно-таки злосчастном житье-бытье.

Последнее письмо я Вам отправил незадолго до взятия Перми белыми.

После взятия Перми первое время все и в том числе я набросились на белый хлеб и масло, т[ак] что все вопросы духа и менее «жратвенные» вопросы исчезли из жизни пермской интеллигенции. Но по мере того, как первые животные инстинкты удовлетворялись и по мере того, как Колчаковия делалась все более и более черносотенной, что обуславливалось временными победами белых, стало замечаться резкое расслоение

в рядах пермской интеллигенции, часть которой окончательно окрасилась в черный цвет, а другая часть стала все более и более подозрительно смотреть на «махры» расцветающей власти. Это разделение было источником большого количества столкновений в Совете Ун[иверсите]та, но не буду утруждать Ваше внимание рассказами о «бурях в стакане воды».

Завершительным актом многих нелепых поступков пермской профессуры была эвакуация Пермского университета. К счастью, она не удалась, и только личному составу и ничтожной части груза удалось проехать в Томск. Я с частью груза остался в Екатеринбурге и теперь приехал в Пермь. К стыду своему должен сказать, что и я разделял нелепое убеждение своих коллег о необходимости эвакуации университета; одумался я раньше остальных и вернулся поэтому в Пермь. Единственный человек, здраво размышлявший и спасший оставшееся имущество, был Безикович, по-видимому, ученик А. А. Маркова не только в области математики, но и в области решительных, точных и определенных действий.

Одно из самых тяжелых злоключений, со мной происшедших, была потеря всех моих работ (бумаг), части книг ( $\frac{3}{5}$  всей библиотеки) и всех вещей. Особенно тяжело мне было потерять мои работы и заметки. Пришлось потратить много упорного труда памяти, чтобы восстановить последние вычисления, касающиеся общих теорем движения жидкости с меняющейся температурой.

Теперь я это сделал и пошел дальше.

Позвольте дать краткий отчет в моих работах в ун[иверсите]те и для себя.

1. В университете мне пришлось очень много готовиться к курсам по механике и по дифференциальной геометрии; я, конечно, нисколько об этом не жалею, т[ак] к[ак] удалось много прочесть и многому выучиться. Далее, пришлось заведовать двумя учеными учреждениями: Механическим институтом и Географическим институтом, что отняло много времени. Помимо всего этого белые выдумали меня мобилизовать, и много времени ушло на разговоры по сему поводу; в конце концов я как экстра-эрд[инарный] профессор был освобожден.

2. Из работ своих я выполнил следующие:

а) исследовал общий случай зависимости вертикальных течений в атмосфере от притока энергии; получились довольно любопытные приложения формулы Кармана и вместе с тем решение многих вопросов динамики атмосферы;

б) восстановил все вычисления и соображения, касающиеся движения жидкостей с меняющейся температурой. Часть их я Вам в общих чертах докладывал.

Из дальнейшего развития этих соображений считаю долгом указать следующее:

а) все условные уравнения (аналогичные уравнениям Гельмгольца), полученные в моей заметке в *Comptes Rendus*, мне удалось использовать геометрически;

б) два вектора, управляющие расщеплением и изменением вихревой нити, я связал с изменениями энергии частицы.

С помощью обобщения понятия вихря удалось установить последовательность движений жидкости, из коих каждое движение обладает свойством в известной мере сохранения вихрей;

в) изучая условные уравнения, я нашел, как мне кажется, довольно правильные пути для классификации движений жидкости при меняющейся температуре и могу получить теперь много частных случаев.

Все изложенное я решил облечь в форму небольшой работы (страниц в 200) и представить на Ваше рассмотрение. Полное отсутствие какой-либо литературы (исключая работ Bjerknes'a, мне знакомых) позволили эту работу написать в Перми. Не откажите, дорогой Владимир Андреевич, прислать Ваше мнение, стоит ли мне выполнять задуманное мною и изложить теорию движения жидкостей с меняющейся температурой, поскольку она оказалась не разработанной до сего времени. Мне было хотелось знать Ваше мнение об этом плане, возможно ли изложить все это в форме, отвечающей по старым понятиям магистерской диссертации, притом, конечно, такой диссертации, которую Вы согласились бы прочесть и решить, можно ли было бы ее защищать в Питере или нет. Не откажите сделать это для Вашего старого ученика;

г) несколько работ (маленьких заметок) дал своим ученикам: движение точки в среде переменной плотности (несколько общих теорем); движение снаряда (ракеты) между двумя планетами (любопытная задача небесной механики); новый вывод ур[авне]ний Ламэ в области триортогональных поверхностей; кинематическая часть теории высотомера (одного из авиационных приборов).

3. Напечатать мне удалось только одну работу в нашем журнале. Экземпляр этого журнала повезет Вам А. С. Безикович, к величайшему моему огорчению не могу послать Вам оттиска этой заметки, т[ак] к[ак] не успею распаковать ящик до отъезда А. С. Безиковича.

Теперь нам приходится снова организовывать университет, и все мы надеемся, что Вы, как это подробно доложит Вам Безикович, не откажете нам в своей помощи и содействии.

Не гневайтесь на слишком длинное письмо — так редко удается теперь с Вами беседовать.

Буду ждать Вашего ответа и исполнения моей просьбы. Передайте мой и жены поклон Ольге Николаевне.

Искренне уважающий Вас  
Ваш ученик *Фридман*

Глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Как только появилась возможность снестись с Петроградом, немедленно я написал Вам письмо и отправил его с А. С. Безиковичем, который в августе месяце отправился в Москву и Петроград для переговоров о восстановлении разрушенного, в смысле личного состава, эвакуацией Пермского университета. К величайшему нашему огорчению, письма как мои, так и адресованные Вам Безиковичем, по-видимому, до Вас не дошли. Поэтому считаю долгом повторить Вам вкратце историю разрушения его состояния. Вместе с тем как я, так и все мои коллеги по факультетам обращаемся к Вам с горячей просьбой посодействовать восстановлению естественнонаучных факультетов (физико-математического, сельскохозяйственного и медицинского) как путем рекомендации профессоров и преподавателей, так и всеми другими средствами, какими Вы сочтете нужным помочь нам.

Для удобства дальнейшее «изложение дела» буду вести по отделам и пунктам.

### *1. Эвакуация Пермского университета*

1. Вследствие целого ряда причин, среди которых простой психоз и непонимание событий играли не последнюю роль, мы, пермские преподаватели, решили в конце июня эвакуировать университет вглубь Сибири.

2. Эвакуация имущества университета не удалась совершенно. Все оборудование и библиотека остались в полной неприкосновенности в Перми; увезено было лишь несколько ящиков.

3. Личный состав эвакуировался почти целиком. В Перми остался лишь проф. А. С. Безикович, преподаватели по каф[едре] математики О. К. Житомирский и В. В. Безикович (Дойникова), библиотекарь Обнорский, преподаватель по геодезии Жуков и преподаватель по анатомии Бадзиев. Через некоторое время к этой группе лиц присоединился я, вернувшийся из Екатеринбурга, и профессора всеобщей истории Н. П. Оттокор и В. Э. Крусман.

### *II. Меры, принятые нами к сохранению и восстановлению университета*

4. Путем обращения к местным властям нам удалось прежде всего охранить наиболее важные университетские здания и все университетское имущество. Ректорство, эвакуировавшееся нашим ректором, было передано А. С. Безиковичу, а этим последним — Н. П. Оттоктору.

5. В целях восстановления как формально, так и реально университета в Москву и Петроград поехал А. С. Безикович. Он получил разрез-

шение Наркомпроса на восстановление трех факультетов: физико-математического, медицинского и сельскохозяйственного. Восстановление факультета общественных наук ожидалось в ближайшем будущем. В целях получения личного персонала для преподавания на этих факультетах Безиковичу было предоставлено право указания комиссариату профессоров и преподавателей для Пермского университета с одновременным представлением отзывов или рекомендаций их для научных установлений или лиц, пользующихся крупной известностью в данной области научного знания. Комиссариат должен был лиц, таким путем ему представленных, назначить в Пермский университет.

6. А. С. Безикович вел переговоры с целым рядом учреждений в Москве. Более или менее конкретные обещания он получил от Лазарева относительно физиков; относительно профессоров или преподавателей по другим специальностям положительных ответов А. С. Безикович не получил. В Питер ему съездить не удалось, он отправил Вам подробное письмо, но по сведениям, у нас имеющимся, письмо это пропало.

7. Мы в Перми получили возможность пригласить преподавателей (калибра прежних старших и младших ассистентов) по следующим кафедрам: геофизики, астрономии, химии, механики, физики, зоологии и ботаники. Но в большинстве случаев это люди (за исключением геофизика, астронома и химика), не могущие читать самостоятельно лекций и приглашенные нами лишь для руководства практическими занятиями. Должен все же прибавить, что все эти люди или с большим практическим стажем или с известным научным багажом.

### *III. Нынешнее положение университета*

8. Мы организовали три факультета (ф[изико-]мат[ематический], сельскохозяй[ыйственный] и медицинский), причем имеем возможность приступить к занятиям 15 октября таким образом, что 2/3 всех курсов, читаемых на первом курсе, будут нами читаться или по крайней мере будут открыты лабораторные занятия и практические упражнения.

9. Более затруднительно обстоит у нас дело со старшими курсами. Здесь удается организовать чтение лекций и ведение практических занятий лишь по некоторым предметам в зависимости от наличия сил.

К Вам, дорогой Владимир Андреевич, мы обращаемся с искренней и горячей просьбой помочь нам в организации занятий в университете.

Т[ак] к[ак] продовольственные и топливные условия в Перми теперь сносные, то желающих заниматься студентов очень много и возможность заниматься действительно в Перми имеется. Вот почему мы и решили пойти навстречу желаниям и просьбам студенчества и организовать занятия в университете, поскольку это в наших силах. Не откажите нам и нашим студентам в Вашей мощной поддержке и помощи.

Нам необходимо заполучить несколько профессоров и преподавателей. Ниже приложен список по факультетам должностей преподавателей и профессоров, коих желательно нам было бы иметь, чтобы как следует вести занятия на первом и отчасти на старших курсах.

Особенно для нас важны следующие кафедры: 1) физика, 2) астрономия, 3) геология и минералогия, 4) ботаника, 5) зоология, 6) анатомия нормальная, 7) гистология, 8) физиология, 9) химия и 10) фармация. Очень были бы желательны профессора по этим кафедрам, но если это возможно, то мы были бы удовлетворены и преподавателями, могущими читать курсы или даже хотя бы самостоятельно вести практические занятия.

Часть кафедр у нас вовсе вакантна, часть оставлена эвакуировавшимися преподавателями.

Однако по всем кафедрам у нас имеются незамещенные доцентуры, которые теперь переведены в профессоры и, т[аким] о[бразом], лицо, занявшее у нас кафедру, ни в каком смысле не станет поперек дороги старому профессору (старому не по годам, а по службе), буде он возвратится оттуда, куда ему пришлось эвакуироваться.

В случае если Вы, как мы все надеемся, не откажете нам в помощи, благоволите направлять желающих занять ту или иную кафедру, а также получить преподавательскую должность вместе с отзывами учреждений или лиц в Пермский университет, дабы мы указанные бумаги переправили в Москву в комиссариат в целях назначения данного лица к нам профессором или преподавателем.

Материальные условия жизни у нас довольно хорошие. Ставки на 30% меньше московских, но продукты и топливо дешевле значительно, чем в Москве и Питере, [так] что жить можно. Университет женатым предоставляет квартиру с отоплением и освещением (квартиры очень хорошие), холостым предоставляется комната в особом этаже унив[ерситетского] здания, где теперь устраивается табльдот, т[ак] что холостые преподаватели будут в смысле еды обеспечены (более или менее) и от хлопот избавлены.

Не откажите, дорогой Владимир Андреевич, сообщить о результатах нашей просьбы; быть может, Вы будете любезны и пришлете нам вести даже до того времени, когда начнет намечаться что-либо конкретное.

Кстати, по астрономии хотел приехать к нам П. М. Горшков; было бы очень желательно, чтобы он не изменил своего намерения. Я пишу ему особо, но если Вы встретите его, то посодействуйте нашему университету.

В прошлом письме я дал Вам довольно подробный отчет о своей работе как учебной, так и, поскольку это в нынешнее время возможно, научной. Настоящее письмо слишком растянулось, и я боюсь утруждать Вас подробным отчетом. Занимался я главным образом вопросами, имевшими отношение к основной теме моей работы — к движению жидкости с меняющейся температурой. Здесь я разобрал общий случай связи потока энер-

гии с вертик[альными] течениями; получились весьма простые результаты, связывающие температуру в жидкости, вертикальные течения и поток энергии; удалось объяснить довольно много метеорологических явлений; статью об этом я подготовил к печати, и, может быть, удастся ее напечатать во втором выпуске нашего журнала.

Далее я подробно разработал вопрос об изменении вихревой нити, ввел две величины, характеризующие эти изменения, и связал эти величины с давлением и температурой, воспользовавшись условными уравнениями, полученными мною в статье в *Comptes rendus*. Этим уравнениям я дал механическую интерпретацию.

Оказалось возможным путем обобщения понятия вихря построить бескон[ечные] последовательности векторов, имеющих многие свойства, аналогичные свойствам вихрей; этими путями удалось обобщить теорему Лагранжа о случаях невозможности возникновения вихря.

Исследуя условия уравнения, оказалось возможным движение в жидкости с меняющейся температурой классифицировать. При этом получается очень много примеров и разнообразных приложений к динамике атмосферы.

Я начал было уже все это приводить летом в систему, но эвакуация и дальнейшие события все перевернули вверх дном, и я был оторван от работы, наиболее для меня дорогой...

Очень бы хотелось увидеться с Вами, но, видимо, нескоро это случится. Как поживает Ольга Николаевна? Конечно, все мои и Вам и Ольге Николаевне шлют поклон и пожелания всего лучшего.

Если у Вас будет время, напишите мне хоть несколько слов. Здесь живу в полном научном одиночестве, — это очень тяжело, хотя, конечно, жизнь петербуржцев, как я слышал, наверное, много хуже нашей.

Всего хорошего, дорогой Владимир Андреевич, не откажите помочь Пермскому университету и пришлите мне весточку.

Искренне уважающий Вас  
Ваш ученик *Фридман*

6 октября 1919 г.

Вы, наверное, слышали об ужасной участи Г. Г. Вейхардта, утонувшего в озере. Мне особенно больно было слышать это, так как Георгий Георгиевич был в Перми самым близким мне человеком.

Приложение к письму от 6.X 1919 г.

1. Физика.
2. Химия органическая.
3. » неорганическая.
4. Химия физическая.
5. » медицинская.

6. Геология и минералогия.
7. Ботаника.
8. Зоология позвоночных.
9. » беспозвоночных.
10. Гистология.
11. Физиология.
12. Нормальная анатомия.
13. Патологическая анатомия.
14. Фармация.
15. Статистика и политическая экономия.
16. Астрономия.

По всем кафедрам имеются вакантными не меньше одной профессуры и несколько преподавательских должностей.

По кафедре геологии и минералогии имеются две вакантных профессуры и несколько преподавательских должностей.

Глубокоуважаемый и дорогой  
Владимир Андреевич,

Пользуюсь оказией, чтобы снова обратиться к Вам с просьбой Пермского университета помочь нам в восстановлении его. В предыдущем письме я подробно писал Вам о всех наших нуждах и об условиях временного или постоянного устройства службы в Пермском университете. Несколько необычный путь приглашения профессоров и преподавателей объясняется двумя причинами: 1) малочисленностью нашего нынешнего состава и 2) спешностью дела. Как только жизнь университета войдет в нормальную колею, так и пополнение его будет происходить нормальным путем. Во всяком случае, если в этом направлении Вы усматриваете какие-ни. будь трудности, не откажите написать мне сами или, если Вы заняты, не откажите сказать Я. Д. Тамаркину, дабы он отписал подробно мне.

Особенно в настоящее время мы нуждаемся в представителях (профессорах или преподавателях) по следующим кафедрам: физика, химия, ботаника, геология с минералогией и зоология. Не откажите помочь нам, — приходим прямо в отчаяние, думая о весеннем семестре; наш старый состав удаляется от нас с той же интенсивностью, с какой удаляется линия фронта Колчака. И теперь нам стоило невероятных трудов организовать занятия на первом курсе; я должен читать общий курс физики, а это, как Вы легко усмотрите, губительно и для меня и для предмета. Что же касается цикла биологических предметов, то здесь дело обстоит вовсе скверно, весь расчет на то, что при Вашем содействии Петроград нас поддержит.

Как Вы легко можете себе представить, никаких занятий своими работами я вести не могу, так как загружен университетскими делами



полностью. Надежды, что освобожусь для своей работы в этом году, нет никакой.

Еще раз, дорогой Владимир Андреевич, прошу Вас оказать содействие нашему, поистине «терпящему бедствие» университету.

Передайте мой поклон Ольге Николаевне. Надо надеяться, что и Вы и супруга Ваша в добром здравье.

Искренне уважающий Вас  
Ваш ученик *А. Фридман*

19.XI 1919

Адрес: г. Пермь. Университет.  
*Фридману*

Глубокоуважаемый и дорогой  
Владимир Андреевич,

Спешу сообщить Вам, каким путем, по мнению А. Н. Крылова, скорее всего Вы можете получить английскую визу: Вам необходимо запастись соответствующей бумагой от Академии, удостоверяющей, что Вы командуетесь на конгресс, и эту бумагу послать по адресу А. Н. Крылова в Лондон с просьбой исходатайствовать Вам английскую визу. Это один путь; другой путь (на него мне указывал Tieds — председатель комитета по созыву математического конгресса)<sup>40</sup> — обратиться в комитет конгресса с просьбой о визе; мне думается, что этот второй путь значительно сложнее первого.

По поручению П. М. Никифорова я навел в комиссии Гринберга все справки о приборах и фотографической бумаге и по приезде сообщу Вам и ему. Приеду я через 10—12 дней.

Конгресс прошел очень хорошо, к русским было прекрасное отношение; в частности, меня включили в число членов комитета по созыву следующего конгресса. Особым успехом отличался доклад А. Ф. Иоффе. Работа Н. М. Гюнтера очень заинтересовала Lichtenstein'a, который в настоящее время редактирует журнал *Zeitschrift für Mathematik*. Работы Тамаркина заинтересовали Courant'a из Геттингена. Работами моими и моих сотрудников заинтересовались Blumenthal, Karman и Levi-Civita. Если у Вас будет время, с удовольствием доложу подробно Вам о конгрессе.

Пока всего Вам хорошего.

Искренне уважающий Вас  
*А. Фридман*

Берлин 2.V 1924

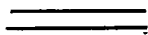
*Директор Главной геофизической обсерватории  
Ленинград 23 февраля 1925 г.*

Глубокоуважаемый  
Владимир Андреевич,

Помимо официального письма считаю необходимым написать Вам еще неофициальное. Посылая Вам постановление Секции воздуха, соответствующую аргументировку, телеграмму и просьбу сообщить все это Кржижановскому, я ни в какой мере не думаю, что все эти действия Секции воздуха будут в полной мере успешны. Однако самый факт вынесения указанных постановлений даст нам возможность впоследствии, если съезд в Москве придет к несуразным и гибельным для дела решениям, возражать против осуществления этих решений. Мне было крайне неприятно затруднять Вас настоящим письмом, но Вы единственный человек, который может в этом деле помочь.

Искренне уважающий Вас  
Ваш ученик А. Фридман

# ПРИЛОЖЕНИЯ





---

---

## **ЗАМЕТКИ, РЕЗЮМЕ И КРАТКИЕ АННОТАЦИИ СТАТЕЙ**

### **АННОТАЦИЯ СТАТЬИ**

#### **«О СРАВНЕНИЯХ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ И ЧИСЛАХ БЕРНУЛЛИ»<sup>41</sup>**

Для сравнений вида

$$x^2 \equiv q \pmod{p}, \quad (1)$$

где  $q$  не сравнимо с нулем по  $\text{mod } p$ , известны решения в том случае, когда  $p = 4n - 1$ . В случае, когда  $p = 4n + 1$ , формулы для решений сравнения (1) неизвестны. Авторы доказывают общую формулу, дающую решения сравнения (1) для обоих случаев  $p = 4n \pm 1$ .

### **АННОТАЦИЯ СТАТЬИ**

#### **«К ТЕОРИИ АЭРОПЛАНА»<sup>42</sup>**

Рассматриваются явления, возникающие при движении изогнутых поверхностей в воздухе. Изучение движения таких поверхностей распадается на три раздела: 1) движение плоскости, перпендикулярной к направлению ее движения; 2) движение плоскости, наклонной к направлению движения; 3) движение изогнутой поверхности.

### **АННОТАЦИЯ СТАТЬИ**

#### **«ОБ ОТЫСКАНИИ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА»<sup>43</sup>**

В статье рассматривается задача: найти все ортогональные преобразования  $x, y, z$  в  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , такие, что уравнение

$$\Delta V = 0$$

допускает решения вида

$$V = f(\rho) V_1(\rho_1, \rho_2),$$

где  $V$  — потенциал, а  $f(\rho)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

Показано, при каких преобразованиях уравнения Лапласа при использовании коэффициентов Ламе эта задача имеет решение.

### ОБ ОТЫСКАНИИ ИЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ <sup>44</sup>

Я позволю себе указать, что эта заметка — результаты моих поисков поверхностей трижды изодинамических

$$\rho = \text{const}, \quad \rho_1 = \text{const}, \quad \rho_2 = \text{const},$$

определенных Ламе \* следующим образом:

1. Напряжения на поверхности  $\rho_i = \text{const}$  в упругом теле, которое под действием поверхностных сил находится в равновесии, нормальны этим поверхностям:  $\rho_i = \text{const}$ .

2. Напряжения на поверхности  $\rho_i = \text{const}$  зависят только от  $\rho_i$ . Если обозначить эти напряжения через  $f_i(\rho_i)$ , то уравнения в криволинейных координатах  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , которые определяют изодинамические поверхности, запишутся в виде

$$\begin{cases} f'(\rho) + f(\rho) \left( \frac{\partial \log H_1}{\partial \rho} + \frac{\partial \log H_2}{\partial \rho} \right) - f_1(\rho_1) \frac{\partial \log H_1}{\partial \rho} - f_2(\rho_2) \frac{\partial \log H_2}{\partial \rho} = 0, \\ f'_1(\rho_1) + f_1(\rho_1) \left( \frac{\partial \log H_2}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \log H}{\partial \rho_1} \right) - f_2(\rho_2) \frac{\partial \log H_2}{\partial \rho_1} - f(\rho) \frac{\partial \log H}{\partial \rho_1} = 0, \\ f'_2(\rho_2) + f_2(\rho_2) \left( \frac{\partial \log H}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \log H_1}{\partial \rho_2} \right) - f(\rho) \frac{\partial \log H}{\partial \rho_2} - f_1(\rho_1) \frac{\partial \log H_1}{\partial \rho_2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $H, H_1, H_2$  — дифференциальные параметры поверхностей  $\rho = \text{const}, \rho_1 = \text{const}, \rho_2 = \text{const}$  \*\*.

Анализ уравнений (1) и хорошо известных уравнений Ламе для  $H, H_1, H_2$  приводит к следующим результатам.

Первый случай. Все напряжения  $f, f_1, f_2$  не являются константами. В этом случае существует только один класс изодинамических поверхностей, а именно класс поверхностей Дарбу \*\*\* с дифференциальными параметрами

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vartheta(\rho)}{\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)}}, \\ H_1 &= \frac{\vartheta_1(\rho_1)}{\sqrt{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 - \rho)}}, \\ H_2 &= \frac{\vartheta_2(\rho_2)}{\sqrt{(\rho - \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)}}, \end{aligned}$$

где  $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$  — полиномы третьей степени.

\* Lamé. Leçons sur les coordonnées curvilignes. Paris, 1859, p. 275.

\*\* Love A. E. H. Lehrbuch der Elastizität. Leipzig, Berlin, 1907.

\*\*\* Darboux G. Annal. Ecole Normal, 1878.

Второй случай. По крайней мере одно из напряжений  $f, f_1, f_2$  — константа\*. Этому случаю соответствуют три вида изодинамических поверхностей:

1) некоторые классы ортогональных поверхностей вращения и плоскости, проходящие через прямую, например ортогональные цилиндрические поверхности и параллельные плоскости;

2) концентрические сферы и ортогональные конусы, вершины которых в общем центре сфер;

3) поверхности, для которых  $H = H_1 = H_2^{**}$ . Только перечисленные поверхности могут быть изодинамическими поверхностями; точные доказательства сформулированных предложений будут даны в последующей работе.

### АННОТАЦИЯ СТАТЬИ

#### «ОБ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ БЬЕРКНЕСА»<sup>45</sup>

Рассматривается следующая задача: определить закон изменения объемов двух сфер, взаимное действие которых друг на друга в каждый данный момент подчиняется закону обратных квадратов расстояния.

Задача приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} - \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left( x \frac{dy}{dt} \right) = c,$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} - \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left( y \frac{dx}{dt} \right) = c,$$

(где  $c$  — постоянная, положительная в случае притяжения и отрицательная в случае отталкивания), которые могут быть записаны в виде

$$x'' = - \frac{x'y' + 2c}{3y}, \quad y'' = - \frac{x'y' + 2c}{3x},$$

допускающем первый интеграл  $xy' - yx' = a$ , где  $a$  — произвольная постоянная, которую всегда можно положить  $a \geq 0$ .

### РЕЗЮМЕ СТАТЬИ «ОБ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЯХ»<sup>46</sup>

Наблюдения над шарами-пилотами показали возможность определения величины и направления вихрей с горизонтальной осью. Обозначим  $V$  — скорость,  $\varphi$  — направление ветра,  $\Omega$  — вихрь,  $\psi$  — его направ-

\* Мы не рассматриваем случай, когда все напряжения равны между собой.

\*\* Darboux G. Leçons sur systèmes orthogonaux et les coordonnées courvilignes. Paris, 1894, p. 166.

ление; допустим, что возрастанию высоты  $H$  соответствует возрастание скорости ветра  $\Delta V$  и изменение его направления  $\Delta \varphi$  (углы выражаются в радианах). Имеем

1) если  $\Delta V \leq 0$ ,

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \lambda} \frac{\Delta V}{H},$$

$$\psi = \pi + \varphi - \lambda,$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\Delta V}{V \Delta \varphi};$$

знак  $\sin \lambda$  тот же, что и  $\Delta V/H$ ;

2) если  $\Delta V = 0$ ,

$$\Omega = \pm \frac{1}{2} V \frac{\Delta \varphi}{H},$$

$\psi = \pi + \varphi$  (если первая формула имеет знак  $+$ ),  $\psi = \varphi$  (если первая формула имеет знак  $-$ ). Эти формулы весьма удобны для вычисления вихрей по наблюдениям над шарами-пилотами.

Бьеркнес нашел, что вихрь с вертикальной осью, рассчитанный в единицах  $MTS$  (метр-тонна-секунда),  $\sim 10^{-5}$ ; вихрь с горизонтальной осью  $\sim 10^{-3}$ . Вертикальные скорости, создаваемые вихрями, не превосходят  $1,0-1,5$  м/сек.

Подсчеты, основанные на наблюдениях над шарами-пилотами в общем подтверждаются данными, полученными автором во время подъемов на аэропланах 26-й авиационной эскадрильи. Аэроплан представляет собой мощное средство изучения атмосферных вихрей, однако для этого необходимо оборудовать аэроплан аппаратурой для фиксации наклона аппарата и положения его рулей.

Существует тесная связь между образованием вихрей и облаков; это вопрос, который еще предстоит решить, но результаты наблюдений заставляют предполагать, что кучевые облака есть не что иное как образования, подобные сферическим вихрям. Остается обсудить устойчивость такой системы вихрей.

Живая сила некоторой массы атмосферы состоит из трех частей: живая сила тока с потенциалом скоростей; ( $Z_1$ ), живая сила тока вихря ( $L_2 + L_s$ ) и, наконец, живая сила, производимая изменением плотности атмосферы. Эта последняя очень мала; что же касается живой силы, производимой вихрями, то в обычных случаях движения атмосферы для массы атмосферы, заключенной в параллелепипеде небольшой высоты, она очень мала по сравнению с живой силой тока с потенциалом скоростей.

Весьма желательно количественно изучить атмосферные вихри с горизонтальной осью, потому что именно эти вихри определяют характер



атмосферных движений и погоды.

$$L_1 = \int_S (\rho (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \Phi dS + \frac{1}{2} \int_{\tau} \Phi \frac{d\rho}{dt} d\tau,$$

$$L_2 + L_3 = \frac{1}{2} \rho_0 \tau \left( u_0^2 + v_0^2 - u_0 \frac{u_R - u_{-R}}{2} - v_0 \frac{v_R + v_{-R}}{2} \right),$$

где  $\tau$  — объем жидкости, ограниченный поверхностью  $S$  с внешней нормалью  $n$ ;  $u, v, w$  — составляющие скорости какой-либо частицы жидкости;  $\rho$  — ее плотность;  $\Phi$  — потенциал скорости; если объем  $\tau$  — параллелепипед, то  $u_0, v_0$  — значения  $u$  и  $v$  в его центре,  $u_R, v_R$  и  $u_{-R}, v_{-R}$  — значения составляющих скоростей на высотах  $R$  и  $-R$  от середины объема вверх и вниз, соответственно.

#### АННОТАЦИЯ СТАТЬИ «К ВОПРОСУ О КОЛЕБАТЕЛЬНОМ РАЗРЯДЕ КОНДЕНСАТОРА»<sup>47</sup>

Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\alpha x + \beta}{x} \frac{dV}{dx} + \gamma V = 0,$$

где  $V$  — разность потенциалов конденсатора емкости  $C$ ;

$$\alpha = -\frac{r}{aL}, \quad \beta = -\frac{R}{aL}, \quad \gamma = \frac{1}{LCa^2};$$

$L$  — самоиндукция колебательной цепи,  $R$  — ее сопротивление, причем

$$R = r + \frac{R_0}{1 - at}, \quad \text{а } x = 1 - at.$$

Так как это уравнение типа уравнений Фукса, то на этом основан предлагаемый прием его интегрирования.

Интеграл имеет вид

$$V_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^k \frac{\vartheta^k(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (1+\beta) (k-1+\beta)} (1 - at)^k.$$

#### АННОТАЦИЯ СТАТЬИ «ПОРЯДОК ВЕЛИЧИНЫ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ»<sup>48</sup>

В статье приведены таблицы изменения величин, встречающихся в динамической метеорологии, и показано на примерах, как можно использовать эти таблицы в целях упрощения дифференциальных уравнений движения атмосферы.

Построим обычным способом среднюю кривую распределения некоторого метеорологического элемента, отложив  $x$  на оси абсцисс. Обозначим через  $A_{x_1, x_2}$  количество случаев, когда величина метеорологического элемента лежала между  $x_1$  и  $x_2$ , и определим границы  $x'$  и  $x''$ , для которых выражения

$$\frac{A_{-\infty, x'}}{A_{-\infty, +\infty}} \text{ и } \frac{A_{x'', +\infty}}{A_{-\infty, +\infty}}$$

равны некоторому определенному числу  $\varepsilon$ . Тогда  $x'$  и  $x''$  дадут границы для порядка элемента; например, если  $\varepsilon = 1/200$ ,  $x'$  и  $x''$  дадут интервал, в который наш элемент попадет 99 раз из 100. Мы будем задавать порядок метеорологических величин интервалом  $10^n - 10^{n+1}$ . Очевидно, что при написании уравнений член порядка  $10^{n-2} - 10^{n-1}$  может быть отброшен, если он суммируется с членом порядка  $10^n - 10^{n+1}$  (с ошибкой не больше 2%). Работая с эмпирическим материалом, мы всегда должны заменять производные отношением конечных разностей. В качестве разности по длине в горизонтальном направлении выберем, например,  $s = 10$  км, в вертикальном  $z = 0,1$  км, а  $\Delta t = 3600$  сек (так как изменения метеорологических элементов в горизонтальных направлениях в 100—1000 раз меньше, чем в вертикальном). Дадим оценку элементов  $v_s$ ,  $v_z$ ,  $p$ ,  $\frac{1}{\rho}$  ( $= \frac{RT}{p}$ ),  $T$  и их производных по  $s$ ,  $z$  и  $t$ . Хуже всего измеряются две первые величины и особенно плохо вторая (ошибка до 20%), давление измеряется с точностью  $10^{-4}$ , а абсолютная температура — очень неточно, также как и скорость ветра. Производные

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

строятся из данных наблюдения, например,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_1 - p_0}{3600}.$$

Из синоптических карт на поверхности Земли и на высоте строятся

$$\frac{\partial v_s}{\partial s}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial s}, \quad \frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{\partial 1/\rho}{\partial s}, \quad \frac{\partial T}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 1/\rho}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial s^2},$$

причем, например,

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{p_1 - p_0}{10^4}.$$

Из кривых распределения элементов по вертикальному направлению вычисляем

$$\frac{\partial v_s}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2}, \dots,$$

причем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_1 - p_0}{10^2}.$$

Из синоптических карт, построенных для разных высот, находим

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial s \partial z}, \dots,$$

а из карт изоплет, построенных на поверхности Земли, находим

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial t \partial s}, \dots,$$

а из карт изоплет, построенных на высоте

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial t \partial z}, \dots$$

Приведем пример:

|                               | $v_s$               | $v_z$               | $p$                 | $1/p$               | $T$                 |
|-------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                               | $10^0 - 10^{-1}$    | $10^{-2} - 10^{-1}$ | $10^2$              | $10^3$              | $10^2$              |
| $\frac{\partial}{\partial s}$ | $10^{-5} - 10^{-4}$ | $10^{-7} - 10^{-6}$ | $10^{-7} - 10^{-6}$ | $10^{-5} - 10^{-4}$ | $10^{-5} - 10^{-4}$ |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | $10^{-3} - 10^{-2}$ | $10^{-5} - 10^{-4}$ | $10^2$              | $10^{-1}$           | $10^{-3} - 10^{-2}$ |
| $\frac{\partial}{\partial t}$ | $10^{-4} - 10^{-1}$ | $10^{-6} - 10^{-5}$ | $10^{-5} - 10^{-4}$ | $10^{-4} - 10^{-3}$ | $10^{-4} - 10^{-3}$ |

Рассмотрим, как пользоваться оценками по порядку величины. Имеется трехчленное уравнение (любой произвольный случай может быть сведен к этому)

$$A_1 + A_2 = B.$$

Если  $A_1$  и  $A_2 \sim 10^n - 10^{n+1}$ , а  $B \sim 10^{n-2} - 10^{n-1}$ , то приближенно можно положить

$$A_1 + A_2 \approx 0,$$

памятуя о том, что  $B \neq 0$ . В уравнении должно быть не меньше двух членов более высокого, чем остальные, порядка. При наличии произведения двух членов надо быть осторожным в оценке, учитывая  $\pm$ -порядок в сомножителях; лучше рассчитать произведения из эмпирических данных. Если  $B$  есть сумма нескольких членов, которые все порядка  $10^n - 10^{n+1}$ , то можно сделать только одно заключение: порядок  $B$  не превышает  $10^n -$

$10^{n+1}$ . Если отдельные члены независимы и одного порядка, то и их сумма того же порядка, если они зависят один от другого, то порядок их суммы может быть значительно меньше. Уравнение, получаемое путем отбрасывания членов малого порядка, нельзя ни дифференцировать, ни интегрировать; только после выполнения этих операций над полными точными уравнениями можно отбросить члены малого порядка. В качестве примера рассмотрим выражения полных производных в свободной атмосфере с помощью таблицы:  $dv_x/dt$ ,  $dv_z/dt$ , как легко видеть, нельзя упростить;

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = (10^{-5} - 10^{-4}) + (10^{-6} - 10^{-5}) + \\ + (10^{-6} - 10^{-5}) + (10^{-4} - 10^{-3}) \approx \frac{\partial p}{\partial t} + v_z \frac{\partial p}{\partial z}$$

может быть упрощено и т. д.

#### РЕЗЮМЕ СТАТЬИ

##### «К ВОПРОСУ О СКОРОСТИ ЗВУКА»<sup>49</sup>

Формула, которая выражает скорость звука в идеальном газе:

$$v^2 = \frac{1}{2} RT.$$

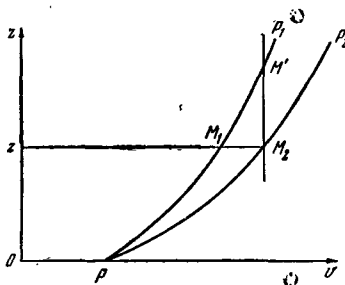
Согласно этой формуле скорость звука не зависит ни от плотности, ни от давления газа при данной температуре. Для реальных газов и для воздуха, в частности, экспериментально установлено определенное соотношение между скоростью звука при заданной температуре и плотностью и давлением газа. Из развитых в статье соображений следует, что это соотношение объясняется как качественно, так и количественно, если применить уравнение состояния Ван-дер-Ваальса.

#### РЕЗЮМЕ СТАТЬИ

##### «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВОЗДУХА ПРИ ПОМОЩИ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ШАРАМИ-ПИЛОТАМИ, ПРОИЗВОДИМЫХ С ОДНОГО ПУНКТА»<sup>50</sup>

Наблюдения с помощью двух шаров-пилотов с различными собственными вертикальными скоростями подъема, производимые из одного пункта, могут дать сведения о распределении вертикальных течений на различных высотах, определяя высоты, достигнутые шаром-пилотом за определенный интервал времени, и, таким образом, позволяют найти истинное распределение ветра на различных высотах.

Под фиктивной высотой шара-пилота в момент времени  $t$ , достигнутой с момента освобождения шара, мы понимаем произведение из собственной вертикальной скорости подъема на величину  $t$ . Отмечая на горизонтальных осях скорости или направления ветра по данным наблюдений двух шаров-пилотов, а на вертикальных осях соответствующие фиктивные высоты, мы получим две кривые  $P_1$  и  $P_2$  (см. рисунок); разность ординат этих кривых дает кривую  $\Delta$ ; дифференцируя  $\Delta$  по фиктивной высоте, мы получим кривую  $\Delta'$ , абсциссами которой будут фиктивные высоты.



Обозначим отношение собственной вертикальной скорости подъема первого шара-пилота к скорости второго через  $1/\mu$ ; тогда истинная высота  $h$ , соответствующая фиктивной высоте  $z$ , будет

$$h = z + \frac{\mu}{1-\mu} \Delta;$$

вертикальная скорость, соответствующая истинной высоте  $h$ , определяется формулой

$$w = w_1 \frac{\mu}{1-\mu} \Delta',$$

где  $w_1$  — собственная вертикальная скорость подъема первого шара-пилота.

Наконец, скорость и направление ветра на истинной высоте  $h$  будет та же, что для фиктивной высоты  $z$ .

Решение задачи, приведенное здесь, есть приближенное решение для случая, когда  $\Delta$  мало. Точное решение зависит от выражения вида

$$\delta_1(u) = \int \frac{(\varphi(u) - \mu)}{1 - \varphi(u)} du + \text{const},$$

где  $\varphi(u)$  — заданная функция, а  $\mu$  — заданная постоянная.

**РЕЗЮМЕ СТАТЬИ**  
**«К ВОПРОСУ О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ПРАВИЛА**  
**ПАРАЛЛЕЛОГРАММА СИЛ»**<sup>51</sup>

Для того чтобы при доказательстве правила параллелограмма сил освободиться от тяжелых ограничений, которые требуют, чтобы у некоторой функции существовали производные первого и второго порядка, мы можем рассмотреть в доказательстве правила ромба, данном Пуассоном, систему четырех сил, равных по величине единице и расположенных вдоль по ребрам некоторой пирамиды (а не такую же систему, лежащую в одной плоскости).

Если  $R$  — равнодействующая двух сил, равных единице и образующих между собой угол  $2\alpha$ , равна  $\varphi(\cos \alpha)$ , то применение видоизмененного доказательства Пуассона приводит к уравнению

$$\varphi(\cos \alpha \cos \beta) = \varphi(\cos \gamma_1) + \varphi(\cos \gamma_2), \quad (1)$$

где

$$\cos \gamma_1 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos A,$$

$$\cos \gamma_2 = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos A$$

и  $A, \alpha, \beta$  означают произвольные углы.

При  $A = 90^\circ$ , используя одно свойство функционального уравнения:  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , можно доказать, что

$$\varphi(\cos \alpha) = 2 \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что для вывода правила ромба достаточно допустить только свойства равнодействующей, которые Дарбу установил в своей статье в «Bulletin des Sciences Mathematiques», 1875, р. 281.

Уравнение Пуассона получается из уравнения (1), если  $A = 0^\circ$ .

### АННОТАЦИЯ СТАТЬИ «О КИНЕМАТИКЕ ВИХРЕВЫХ ЛИНИЙ»<sup>52</sup>

В общем случае движения идеальной жидкости при наличии притока энергии теорема Гельмгольца о сохранении вихрей неприменима. Поскольку трубки вихрей играют особую важную роль в практике (например, в динамической метеорологии, гидравлике, аэродинамике), представляется интересным выяснить законы, по которым линии вихрей разрушаются, и найти механические величины, которые характеризуют их разрушение.

В настоящей работе рассматриваются кинематические законы сохранения и диссипации вихревых линий.

Введем (в современных обозначениях) величину

$$D_a f = (a, \text{grad } f).$$

Выделим три важных для дальнейшего исследования направления.

Для данной точки  $M$  в данный момент времени  $t$  вихревая линия и совпадающая с нею жидкая линия (т. е. касательная к ней) имеют определенное направление  $\Omega$  ( $\Omega$  — вектор вихря); в следующий момент  $t + \Delta t$ , когда точка  $M$  придет в точку  $M'$ , будет иное направление  $\Omega'$  вектора вихря; с ним не будет уже совпадать направление  $L$  только что совпадавшей с вихрем жидкой линии; присоединяя направление  $\Omega$  старого вихря, получаем триэдр; его плоские углы (например,  $Z\Omega'$ ) и двугранный угол при ребре  $L$  характеризуют изменение вихря; назовем его основным сферическим триэдром.

Рассмотрим пределы отношений плоских углов упомянутого двугранного угла к промежутку времени; все эти величины — «элементы первого порядка»; необходимым и достаточным условием, для того чтобы ансамбль векторных линий поля вектора  $a$  был ансамблем сохраняющихся линий, является совпадение линий  $L$  и  $\Omega'$  основного триэдра для всех значений  $t$  и для всех точек  $M$ . Аналитически это условие выражается доказываемой в работе

теореме 1. Необходимые и достаточные условия, чтобы ансамбль векторных линий поля вектора  $a$  был ансамблем сохраняющихся линий, заключаются в выполнении следующих равенств:

$$\frac{\frac{da_x}{dt} - D_{au}}{a_x} = \frac{\frac{da_y}{dt} - D_{av}}{a_y} = \frac{\frac{da_z}{dt} - D_{av}}{a_z},$$

где  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  могут быть, в частности, компонентами вектора вихря.

Рассмотрим поле скоростей  $V$ . Обозначим вектор

$$\frac{da}{dt} - D_a V \text{ через } \text{Helm } a,$$





**Теорема 5.** Для того чтобы движение жидкости было прямым, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} [\Omega, DV] &= 0, \\ \left[ \Omega, D \frac{dV}{dt} \right] &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \left[ \Omega, D \frac{d^m V}{dt^m} \right] &= 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

### АННОТАЦИЯ КНИГИ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (КИНЕМАТИКА)»<sup>53</sup>

Содержание:

Введение. Отдел первый — Кинематика точки. Гл. 1 — Точка в пространстве и её перемещение; гл. 2 — Движение точки и ее элементы; гл. 3 — Колебательное движение. Отдел второй — Кинематика твердого тела. Гл. 1 — Положение твердого тела в пространстве; гл. 2 — Перемещение твердого тела; гл. 3 — Движение твердого тела; гл. 4 — Плоское движение твердого тела; гл. 5 — Относительное движение; Прибавление.

### АННОТАЦИЯ СТАТЬИ «О ГЕОМЕТРИИ ПОЛУСИММЕТРИЧНОГО ПЕРЕНОСА»<sup>54</sup>

Каждый линейный перенос, а следовательно, каждая, основанная на каком-либо таком переносе, дифференциальная геометрия полностью определены заданием трех величин.

1.  $G_{\mu}^{\lambda\nu}$ , которая определяет, насколько отличаются ковариантные и контравариантные параметры  $\Gamma_{\mu}^{\lambda\nu}$  и  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ .

2.  $S_{\lambda\mu}^{\nu}$ , которая определяет, насколько ассиметричен контравариантный параметр.

3.  $Q_{\mu}^{\lambda\nu}$ , представляющая собой ковариантную производную произвольного тензора  $\xi^{\lambda\nu}$   $n$ -го ранга.

Наиболее общий случай имеет место тогда, когда эти три величины не подчинены никаким условиям; риманова геометрия появляется в том случае, когда все эти три величины обращаются в нуль.

Введенные выше три величины могут, не обращаясь в нуль, приводиться к произведению векторов с единичным аффинором, т. е. с  $\delta^{\lambda\nu}$ . Тогда имеют место промежуточные случаи.

Геометрические свойства этих промежуточных случаев рассматриваются в настоящей работе. При этом показано, что переносы с вырожден-

ными  $G_{\mu\lambda}^{\nu}$  и  $S_{\lambda\mu}^{\nu}$  выделяются замечательно простыми свойствами геодезического многообразия. Если вырождается и  $Q_{\mu}^{\lambda\nu}$ , то возникают переносы, которые представляют собой прямое обобщение переноса Вейля и может быть найдут применение в физике. В заключение статьи кратко указано на одно обобщение аффинной теории поля Эйнштейна, которое приводит прямо к переносу вида, рассмотренного в настоящей работе.

### **АННОТАЦИЯ СТАТЬИ** **«О ВОЗМОЖНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ ЭЛЕКТРОНОВ** **В АТОМЕ РЕЗЕРФОРДА»**<sup>55</sup>

Рассматривается случай, когда  $n$  отрицательных электронов расположены в виде двух колец в двух параллельных плоскостях.

В рассматриваемой задаче точечные электроны расположены соответственно на окружностях двух колец одинакового радиуса  $r$ , центры которых находятся на одной прямой с положительным ядром, плоскости перпендикулярны к этой прямой и вращаются вокруг этой прямой с одинаковой угловой скоростью. Предполагается, что число электронов на каждом кольце одинаково и что кольца расположены на одинаковых расстояниях в обе стороны от ядра. Для упрощения рассматриваются лишь такие конфигурации, в которых электроны каждого кольца образуют правильные  $n$ -угольники, смещенные один относительно другого на некоторый угол, не зависящий от относительных размеров системы. Устойчивость полученных движений не анализируется.

### **РЕЗЮМЕ СТАТЬИ** **«О ПЕРЕМЕЩАЮЩИХСЯ ОСОБЕННОСТЯХ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ** **НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ»**<sup>56</sup>

Настоящая работа содержит строгое обоснование теории переноса особенностей в плоском движении несжимаемой жесткости и дальнейшее применение этой теории к исследованию условий жесткости и устойчивости бесконечной периодической системы вихрей, представляющей собой обобщение вихревых цепочек Кармана.

В § 1 даются необходимые для дальнейшего изложения определения и результаты из области гидродинамики, в частности рассматривается плоское движение несжимаемой жидкости с изолированными вихрями и источниками. В этом случае движение будет представлено функцией

$$\varphi + i\psi = f(z)$$

комплексного переменного  $z = x + iy$ . Проводя аналогию между понятием циркуляции и понятием потока жидкости через замкнутую кри-

вую как интегралом от нормальной компоненты скорости ( $P = \int_L v_n ds$ ,

где  $v_n$  — нормальная к контуру  $L$  составляющая скорости), можно как случай одного изолированного вихря в точке  $z_0$ , так и одного изолированного источника характеризовать одной функцией:

$$f(z) = \frac{P + iC}{2\pi} \ln(z - z_0),$$

причем в первом случае  $P = 0$ , а во втором циркуляция  $C = 0$ . В общем случае, когда  $P \neq 0$  и  $C \neq 0$  можно говорить об источнике вихрей в точке  $z_0$ . Движение с  $n$  источниками вихрей определяется выражением

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k + iC_k}{2\pi} \ln(z - z_k).$$

В § 2 вводится понятие особенности движения, под которым понимается каждая особенная точка, движение которой может быть представлено определенной функцией  $f(z)$ . Далее величина скорости перемещения особенности выводится из принципа сохранения количества движения поплавка при его внезапном затвердении, причем под поплавком понимается бесконечно малое кольцо, окружающее рассматриваемую точку.

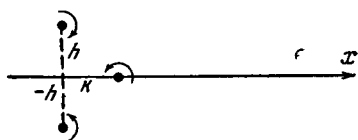


Рис. 1

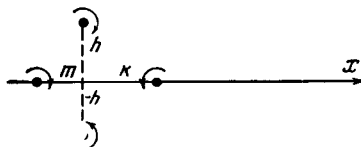


Рис. 2

Аналогичное применение принципа сохранения момента количества движения приводит к бесконечной скорости вращения затвердевшего поплавка, если в рассматриваемой особенности существует вихрь. Полученные результаты позволяют написать уравнения движения системы с  $n$  вихреисточниками:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \frac{A_2}{z_1 - z_2} + \frac{A_3}{z_1 - z_3} + \dots + \frac{A_n}{z_1 - z_n}, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \frac{A_1}{z_2 - z_1} + \dots + \frac{A_3}{z_2 - z_3} + \dots + \frac{A_n}{z_2 - z_n}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dz_n}{dt} &= \frac{A_1}{z_n - z_1} + \frac{A_2}{z_n - z_2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}, \end{aligned}$$

где  $z = x + iy$ ,  $A_i$  — коэффициенты ряда Лорана. Из этих уравнений могут быть получены два первых интеграла, а в частном случае, когда

есть только вихри или только источники, можно получить четыре первых интеграла движения. Далее, в § 3 рассматривается движение системы вихрей, которая возникает из периодического параллельного смещения конечного числа вихрей в определенном направлении на определенное расстояние  $l$ . Условие жесткости, состоящее в сохранении взаимных расстояний, требует равенства скоростей перемещения всех  $p$  вихрей, что дает ряд уравнений, которым должны удовлетворять как циркуляции отдельных вихрей, так и взаимные расстояния между вихрями.

В случае, если вихрей два, получаются два случая Кармана. При  $p = 3$  для вихрей, расположенных, как показано на рис. 1, получаются три случая; они неустойчивы. При  $p = 4$  для вихрей, расположенных, как показано на рис. 2, получим четыре случая.

#### АННОТАЦИЯ КНИГИ <sup>57</sup>

#### «ОПЫТ ГИДРОМЕХАНИКИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ»

Содержание:

Ч. I — Кинематика вихрей. Гл. 1 — Сохраняемость векторных линий; гл. 2 — Изменение вихрей. Ч. II — Динамика сжимаемой жидкости. Гл. 3 — Условия динамической возможности движения; гл. 4 — Связь кинематических и динамических элементов.

Дополнение: Б. И. Извеков, И. А. Кибель, Н. Е. Кочин «О некоторых работах, связанных с «Опытом гидромеханики сжимаемой жидкости».

#### НА ВЫСОТЕ 7400 м\* <sup>58</sup>

Около 7 час 10 мин. мы, напутствуемые последними приветствиями, пожеланиями и инструкциями начальника школы тов. Коррилова, устремились в высь.

К моменту полета погода решительно испортилась: стал накрапывать мелкий дождь, облака сгустились и утро наступило туманное, серенькое с мелким дождем. На высоте 230 м мы уже вошли в облака, которые на высоте 450 м совершенно закрыли от нас землю. С того времени мы во все время полета земли уже не видели, она была закрыта от нас слоем облаков.

Мы попали в чрезвычайно мощный слой облаков. На 1835 м казалось, что облака начинают редеть, но это был только конец первого слоя облаков, который переходил сразу же во второй, и на высоте 2670 м облака

\* Незадолго до своей смерти А. А. Фридман, как сообщалось уже в № 1 нашего журнала, принял участие в рекордном на высоте для СССР полете на аэростате. К сожалению, А. А. Фридман не успел обработать полученный им материал, и мы имеем только общий очерк, написанный им для журнала «Хочу все знать». В виду интереса, который представляет часть очерка, описывающая самый полет, редакция помещает ее здесь в дополненном согласно рукописи покойного виде (прим. ред. журнала «Климат и погода»).

снова чрезвычайно сгустились. Водяные капли сменились на этой высоте снежинками и льдинками, а температура упала до  $-25^{\circ}\text{C}$ . На высоте 3170 м сквозь облака показалось солнце, и мы начали уже думать, что нашему облачному одиночеству конец, но не тут-то было. Это был конец лишь второму облачному слою, на высоте 3530 м мы снова попали в густые облака и лишь в 10 час 19 мин на высоте 5200 м вышли вовсе из облаков и попали на яркое солнце, имея над головами синее небо.

Любопытны ощущения и переживания в облаках. Полная тишина, полный покой, ничего не видно, не знаешь, над какой местностью летишь. Ни тебя никто не видит, ни ты никого. Полная изолированность. Сначала, правда, доносятся с земли звуки «быта»: гудки паровозов, звонки, пение петухов, лай собак и т. п. Когда эти звуки слышишь, чувствуешь себя уютнее, но вскоре и эти звуки пропадают. Наступает мертвая тишина; эта тишина, правда, прерывалась у нас иногда странными звуками — будто кто-то по аэростату, как по барабану палкой бил. Сначала думалось, что это сетка рвется, но потом оказалось, что это расправлялась материя.

На высоте около 6000 м мы почувствовали необходимость «закусить» кислородом. Сначала решили попробовать наши шары-пилоты, но по неловкости и неосторожности (шары очень нежные) два из них я разорвал, третий мы взять не решились и начали дышать, пользуясь медицинскими подушками. Ощущения на высоте неприятные: чувствуется удушье, идут красные круги перед глазами, колотится сердце, пульс до 110. Затем появляется сонливость, апатия, по временам, если не дышать кислородом, впадаешь в длительное забытие, делать ничего не хочется и самое простое действие требует большого напряжения воли. Вдыхание кислорода удивительно помогает, — вдохнешь, чувствуешь мгновенное опьянение, а после как будто целена какая сползает с глаз, снова возвращается энергия, снова становишься человеком.

Пока мы возились с вдыханием кислорода, произошло несчастье. Среди полной тишины раздался оглушительный взрыв, мы взглянули наверх и видим, что аэростат весь окутан дымом. Сейчас же мелькнула мысль: «горим», шансов на спасение в этом случае очень мало. Потом дым рассеялся и мы увидели, что наш «кислородный сундук» лопнул. Произошло вот что: на высоте, где давление мало, кислородный сундук расперло и разорвало, газ (влажный) вырвался на свободу, охладился и влага конденсировалась в виде облака, которое мы и приняли за дым. Установив, в чем дело, мы облегченно вздохнули, хотя запас кислорода значительно уменьшился и долго держаться на высоте было трудно.

Аэростат, разогреваемый лучами солнца, лез все выше и выше. В 11 час 30 мин мы достигли высоты 7100 м, а в 11 час 51 мин достигли максимальной высоты — 7400 м. На этой высоте было слишком  $20^{\circ}$  мороза, но не было холодно, я летал в пиджаке и было буквально жарко. Солнце жгло не хуже, чем на юге, сверкало солнце, отражаемое нижним

облачным слоем, ослепительно. Над нами простиралось голубое небо, и в непосредственной от нас, как казалось, близости тянулись бледные нити перистых облаков.

Достигнув максимальной высоты, шар начал опускаться, этому я очень обрадовался, так как на высоте сильно страдал. Но моя радость была преждевременной, шар снова поднялся и достиг опять максимума — высоты 7400 м.

В общем на высоте более 6000 м мы продержались свыше 3 час, а на высоте 7000 м и выше пробыли более двух часов. Все это время мы частью были в сознании, частью погружались в глубокие обмороки. Эти обмороки могли быть чрезвычайно опасными, так как мы могли настолько ослабеть, что не быть в состоянии произвести необходимые манипуляции для вдыхания кислорода. Если бы это случилось, гибель наша была бы неизбежна, таким образом погибли два аэронавта Кроче Спинелли и Сивель, достигнув вместе с Гастоном Тиссандье высоты свыше 8000 м.

Зная, что наш запас кислорода чрезвычайно мал, я все время упорно отказывался дышать им, сберегая кислород для пилота. Соображение у меня было очень простое — пилот был сильнее меня, мог лучше вынести недостаток воздуха и именно ему, умеющему управлять шаром, надо было сохранить максимальную свежесть, я же мог бы находиться в полуобморочном состоянии и, спокойно лежа в корзине шара, достигнуть нижних плотных слоев, если только пилот сохранил бы способность управлять аэростатом. Словом, кислород в первую очередь нужен был пилоту, а не мне. Однако самоотверженный тов. Федосеенко угрозами заставил меня «кормиться» кислородом, и думаю, что этим его угрозам я в значительной степени обязан своей жизнью.

Картина, развернувшаяся перед нами, когда мы совершали свой полет над облаками, была восхитительна. Там и сям над ровным облачным полем возвышались высокие белые холмы, ослепительно сверкавшие на солнце. Эти холмы представляли совершенно правильную картину, расположенные по углам сетки с ромбовидными частями облаков. Между облачными холмами воздух был сплошь заполнен ледяными кристалликами, переливающимися на солнце всеми цветами радуги; казалось, что эти кристаллики исходят из одного блестящего, яркого центра; сначала мне показалось, что мы видим какое-то явление электрического порядка, и мне стало не по себе, тем более что на горизонте была видна огромная грозовая башня в виде черной наковальни. Но потом я сообразил, что блестящий шар, из которого радужными искрами рассыпались во все стороны льдинки, — это явление оптическое, нечто вроде ложного солнца.

На поверхности облаков мы увидели тень нашего шара, окруженную ореолом, — явление довольно обычное при полетах в облаках.

Я уже писал, что шар упорно не хотел идти вниз, наконец понижение температуры взяло свое, и в 13 час 30 мин мы начали определенно спускаться

ся. Наш балласт был почти израсходован, мы имели лишь 3 места балласта да кое-какой «экономический балласт» — съестные припасы; при этих условиях спуск был очень труден и мог быть чреват разными неприятностями. Но я твердо верил в искусство тов. Федосеенко и был совершенно спокоен.

В 17 час на высоте в 3800 м мы увидели сквозь поредевшие облака землю; первое, что нам бросилось в глаза, — берега и обширное водное пространство; мелькнула мысль, что мы или над Ладожским озером или, что еще хуже, над Финским заливом. Потом все разъяснилось, — водное пространство оказалось Ильмень-озером, впрочем, от этого дело менялось мало, — если бы мы опустились посреди Ильмень-озера, то думаю, что, несмотря на наши спасательные папковые куртки, вряд ли бы я писал сейчас эти строки. Перед спуском нам пришлось распутывать якорный канат, и тут я от души пожалел, что не занимался физкультурой и что 20 кг для меня — почти непосильный груз. Канат выбирали мы вдвоем, но удерживать мне нужно было одному, — пришлось в петлю сунуть пальцы, так как удержать канат в руке я не рассчитывал, а в то же время вес его был недостаточен, чтобы переломить пальцы. Было только очень больно, и после рука недели две болела...

В 17 час 15 мин мы были на высоте 2000 м. Земля была хорошо видна, спуск шел прекрасно, только балласт был весь израсходован да в мозгу шевелилась мысль: свои или чужие. Если свои, — теплый, дружеский прием, ведь везде есть друзья Авиорадиохима. Если чужие — тюрьма, хотя бы временная, и длинные разговоры. С такими мыслями спускались мы до высоты 300 м, бросили якорь, шар подскочил и начал снова медленно опускаться. Отовсюду стали сбегаться крестьяне, мы закричали им в рупор, чтобы они ловили шар, — мы убедились, что шар среди «своих». Шар пойман крестьянами, и в 17 час 31 мин мы опустились на руки крестьян на Мшинском поле в одном километре к юго-востоку от деревни Окорки Можеевской волости Демьяновского уезда Новгородской губернии.

Судьба забросила нас в один из глухих уголков Новгородской губернии в 100 км от ближайшей железнодорожной станции и в 55 км от ближайшей паромной пристани. Прочли крестьянам импровизированную лекцию о нашем полете; крестьяне с охотой помогли нам убрать шар, и через несколько дней довольно утомительного и скучного путешествия мы 21 июля 1925 г. приехали вместе с нашим товарищем шаром в Ленинград.

---

---

## **МАТЕРИАЛЫ И СТАТЬИ О ЖИЗНИ И ТВОРЧЕСТВЕ А. А. ФРИДМАНА**

### **CURRICULUM VITAE А. А. ФРИДМАНА <sup>59</sup>**

Александр Александрович Фридман родился в С.-Петербурге 17 июня 1888 г.; в 1897 г. поступил в подготовительный класс второй гимназии, которую окончил в 1906 г. с золотой медалью.

В 1906 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета С.-Петербургского университета. Совместно с Я. Д. Тамаркиным представил сочинение на тему «Исследование неопределенных уравнений второй степени», которое было удостоено факультетом золотой медали.

В 1910 г. окончил университет и был оставлен профессорами В. А. Стекловым и Д. К. Бобылевым по кафедре чистой и прикладной математики для приготовления к профессорской и преподавательской деятельности.

Осенью 1910 г. Советом Института инженеров путей сообщения в Петрограде был избран на должность руководителя практических занятий студентов по высшей математике.

Осенью 1912 г. был приглашен Советом Горного института для чтения лекций по дифференциальному исчислению.

Весной 1913 г. поступил на службу физиком в аэрологическую обсерваторию в Павловске, где и работал в области аэрологии и главным образом динамической метеорологии; весной того же года руководил практическими занятиями на гидрометеорологических курсах Министерства торговли и промышленности.

Осенью 1913 г. закончил экзамены на степень магистра чистой и прикладной математики в Петроградском университете.

В осеннем семестре 1913 г. по прочтении пробной лекции на тему «О методе Рунге для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» читал в Институте инженеров путей сообщения о приближенных вычислениях, а в весеннем семестре 1914 г. читал в том же институте факультативный курс «О гармоническом анализе и приближенном интегрировании дифференциальных уравнений».



Весной 1914 г. был командирован директором Главной физической обсерватории академиком Б. Б. Голицыным в Лейпциг к профессору Бьеркнесу для ознакомления с методами названного ученого в части синоптической и динамической метеорологии.

Летом 1914 г. участвовал в разработке и подготовке мероприятий для аэрологических наблюдений, которые должны были производиться во время полного солнечного затмения в августе 1914 г.; для этого он совершил ряд полетов на дирижаблях.

Осенью 1914 г., имея целью ввести аэрологические наблюдения в авиационную практику и тем, с одной стороны, оказать посильную помощь авиации, с другой стороны, увеличить число аэрологических станций, поступил с разрешения и одобрения директора обсерватории Б. Б. Голицина в добровольческий авиационный отряд, где и работал сначала на северном фронте близ городов Осовца и Лька, а затем и на других фронтах над организацией аэрологических наблюдений и вообще аэронавигационной службы.

В ноябре 1914 г. по приказанию заведующего авиацией и воздухоплаванием в действующей армии был командирован в 6-ю авиационную роту во Львов для организации аэронавигационной службы в других отрядах русской армии.

С декабря 1914 г. по март 1915 г. принимал участие в полетах над Перемышлем; производил опыты путем бомбометания на крепость Перемышль с целью выяснения основных аэробаллистических свойств авиационных бомб.

Весной 1915 г. организовал центральную аэрологическую станцию при 6-й авиационной роте, а также ряд аэрологических станций в различных авиационных отрядах русской армии. Задачей станций являлось обучение наблюдателей аэрологов и заведование аэрологической службой в авиационных отрядах.

С мая по ноябрь 1915 г. летал в качестве наблюдателя в 26-ом корпусном авиационном отряде, во время полетов произвел ряд наблюдений над характером атмосферных вихрей.

Зимой 1916/17 г. организовал по особому плану аэронавигационную службу на всех фронтах русской армии, а также Центральное управление этой службы и был приглашен в школу летчиков наблюдателей в Киев читать лекции по аэронавигации.

В марте 1916 г. назначен заведующим центральной аэронавигационной и аэрологической службой фронта, в задачу которой входили и научные исследования в области аэронавигации.

Летом 1916 г. назначен членом комиссии по изучению воздушной артиллерии при Управлении Военного Воздушного флота и получил *honoris causa* звание летчика наблюдателя.

С осени 1916 г. руководил совместно с инженером Э. К. Гарфом и

А. Ф. Гавриловым обширными (около 2 500 000 чисел) вычислениями баллистических таблиц (по методу проф. Рунге).

Зимой 1916 г. организовал ремонтную мастерскую по починке приборов при Центральной аэронавигационной станции и руководил разработкой проекта большого завода по изготовлению авиационных и других технических приборов.

В начале 1917 г., имея намерение прочесть в качестве приват-доцента в Киевском университете факультативный курс теоретической аэродинамики, прочел две пробных лекции в физико-математическом факультете: «О движении жидкости с меняющейся температурой» и «О криволинейных координатах». Осуществить прочтение курса не удалось вследствие перевода на службу в Москву.

В апреле 1917 г. назначен членом по технической части Московской хозяйственно-строительной комиссии по постройке завода авиационных измерительных приборов Управления Военного Воздушного флота в Москве.

Летом 1917 г. назначен временно заведующим первым отделением завода авиационных измерительных приборов, и с этого времени занимался организацией научно-технического и других отделов завода, а также руководил заводом в качестве директора.

Весной 1918 г. был избран Советом Пермского государственного университета на должность профессора по кафедре механики.

Осенью того же года участвовал в организации Физико-математического общества в Перми, был избран секретарем указанного общества, а также секретарем редакционного комитета; организовал журнал этого общества и руководил его изданием до конца 1919 г.

Осенью 1919 г. кроме лекций по механике читал лекции по механическому отделу физики.

В декабре 1919 г. был избран временно исполняющим обязанности помощника ректора, в этой должности состоял до весны 1920 г.

Осенью 1919 г. был избран старшим физиком Екатеринбургской обсерватории по заведованию математическим бюро обсерватории.

В январе 1920 г. организовал в Пермском государственном университете при физико-математическом факультете технические отделения: химико-металлургическое, инженерно-строительное и электро-механическое и был избран председателем указанных отделений.

Зимой 1920 г. получил приглашение занять должность научного сотрудника, члена Атомной комиссии в Государственном оптическом институте.

Весной 1920 г. возвратился в Главную физическую обсерваторию в качестве старшего физика и организовал здесь Математическое бюро.

Весной 1920 г. был приглашен факультетом воздушных сообщений Института инженеров путей сообщения для чтения лекций по аэромеханике. Летом 1920 г. этот институт пригласил его занять должность преподавателя.

давателя по кафедре математики. В течение летних месяцев 1920 г. он был избран заведующим подготовительными курсами Института инженеров путей сообщения.

Летом 1920 г. физико-математический факультет Петроградского университета избирает его преподавателем математики и механики.

Осенью 1920 г. он был избран профессором по кафедре механики первого Петроградского политехнического института и адъюнктом по той же кафедре Морской Академии.

Осенью 1921 г. — профессором по кафедре прикладной аэродинамике в Институте путей сообщения.

Летом 1922 г. был командирован с научной целью в Германию и Норвегию.

Осенью 1923 г. его назначают старшим руководителем цикловых занятий по Морской академии, а также редактором Журнала геофизики и метеорологии.

Весной 1924 г. был командирован за границу, в Голландию для участия в Первом международном конгрессе по прикладной математике. Конгрессом он был избран членом постоянного комитета по созыву конгресса.

В феврале 1925 г. назначен временно исполняющим должность директора Главной геофизической обсерватории, а в июне утвержден в должности директора названной обсерватории.

В феврале 1925 г. принял на себя редакторство отдела геофизики в Большой Советской Энциклопедии.

В марте 1925 г. был избран заместителем председателя комитета по созыву I Геофизического съезда.

В июле 1925 г. совершил рекордный для СССР полет на аэростате, достигнув высоты 7 400 м.

### **ОТЗЫВ АКАДЕМИКА В. А. СТЕКЛОВА О ТРУДАХ А. А. ФРИДМАНА <sup>60</sup>**

#### **В физико-математический факультет Пермского университета**

В ответ на предложение факультета за № 2 от 12 января 1918 г. предлагаю при этом мой отзыв о научных трудах приват-доцента Киевского университета Ал. Ал. Фридмана с своей рекомендацией его с самой лучшей стороны как ученого работника, так и преподавателя.

*Академик В. Стеклов*

*Петроград, 19 февраля (6 февраля ст. ст.) 1918 г.*

**Отзыв академика Стеклова  
о работах магистра по чистой и прикладной математике  
Александра Александровича Фридмана**

Ал. Ал. Фридман начал изучение высшей математики еще с 6-го класса гимназии и тогда же вместе с Я. Д. Тамаркиным напечатал две небольших статьи по теории чисел: «Journal für die reine und angew [andte] Mathematik» [и] «Mathematische Annalen».

Последняя удостоилась лестного для учеников гимназии отзыва проф. Геттингенского университета Давида Гильберта.

В университете, будучи на I курсе, Фридман (совместно с Тамаркиным) получил золотую медаль за представленное ими (по теории чисел) сочинение на заданную тему, обнаружившее большие познания авторов в литературе вопроса и трудоспособность (сочинение содержало 100 страниц).

По окончании курса г. Фридман был оставлен мною стипендиатом при университете (в 1910 г.) и сразу в 1913 г. выдержал испытание на степень магистра и чистой прикладной математики.

В то же время он продолжал и самостоятельные исследования и в 1911 г. напечатал в Сообщениях Харьковского математического общества работу «Sur la recherche des solutions particulières de l'équation de Laplace».

Здесь он решил в общем виде поставленную мною в моей докт[орской] диссертации задачу об особом виде частных решений ур[авнений] Лапласа, имеющую значение для теории установленных мною фундаментальных функций, обнаружив должную изобретательность и хорошее знакомство с анализом. В то же время А. А. Фридман занялся изучением и вопросов прикладного характера, применяя к таковым по возможности точные методы математического анализа. В результате появилось исследование «К теории аэроплана», напечатанное в 1911 г. в Журнале Русского физико-химического общества.

Автор обнаружил здесь основательное знакомство с литературой вопроса о движении аэроплана как с чисто практич[еской], так и теорет[ической] частями и, основываясь на этих данных, развил приближенную теорию движения аэроплана.

В 1912 г. им произведено опять исслед[ование] чисто геометрического характера под заглавием «Sur la recherche des surfaces isodynamiques», результаты которого опубликованы в заметке, помещенной в Comptes rendus de l'Acad. des sci, de Paris, т. 154. Здесь, исследуя дифференциальные ур[авнения] с частн[ыми] производными, характеризующие динамические поверхности (уравнение Lamé), он дает полное решение задачи в двух случаях, когда натяжения не равны постоянным или суть величины постоянные, не равные между собой.

В 1913 г. он обращается (совместно с М. И. Петелиным) к изучению интересного вопроса гидродинамики о пульсирующих шарах (Bierknes'a).

Последний показал, что при известных условиях среднее взаимное действие двух таких сфер происходит по закону Ньютона.

Автор поставил общую задачу: найти закон изменения объемов двух пульсирующих сфер, при котором взаимодействие их в каждый данный момент совершается по только что упомянутому закону, и удовлетворит[ельно] разрешил ее при помощи простого анализа.

Около этого времени он занял должность физика при Главной физической обсерватории Академии наук, где начал работать под руководством акад. Б. Б. Голицина (покойного) преимущественно в области аэродинамики, и скоро был командирован для изучения дела за границу.

При объявлении в 1914 г. войны Германией он осенью 1914 г. отправился добровольцем в действующую армию (рядовым) в авиационную роту. Это на время прервало его научную деятельность, но ненадолго. В том же году ему удалось закончить и напечатать в Геофизическом сборнике статью «Sur la distribution de la température aux diverses hauteurs».

Подобного рода сложные вопросы лишь в самое последнее время стали подвергаться математическому анализу, применение которого встречает здесь весьма большие трудности ввиду сложности задачи.

Ал. Ал. Фридман, если не ошибаюсь, впервые подверг математической обработке вопрос о распределении температуры на различных высотах, приняв во внимание атмосферные движения известного типа (вертикальные стационарные токи). Он воспользовался для приближенного решения задачи новейшими методами интегрирования уравнений при помощи метода последовательных приближений, приведя таким путем задачу к интеграции дифференциальных уравнений фуксова типа.

Хотя с теоретической точки зрения решение не составлено со всей строгостью точного анализа, но в подобного рода вопросах немислимо и требовать абсолютной строгости.

Исследование, представляя несомненный интерес, свидетельствует о находчивости автора и умении широко пользоваться и применять к сложным вопросам практики методы современного анализа. Через год Ал. Ал. Фридман (после обратного взятия немцами Перемышля) переведен в тыл, в Киев в качестве преподавателя, а затем и помощника заведующего военной школой летчиков (уже в чине прапорщика).

Затем он руководит занятиями слушателей и читает лекции по аэронавигации (в начале 1916 г.), конспект которых напечатан в 1916 г. В том же 1916 г. и затем в 1917 г. он опубликовал в Геофизическом сборнике (т. III) исследование «Об атмосферных вихрях» и (совместно с Н. Путой и А. Альтбергом) статьи: «Определение вертикальных течений воздуха с помощью наблюдений, производимых с одного пункта», «К вопросу о скорости звука», где постановка задач и их математическая обработка

принадлежит А. А. Фридману. Из сказанного видно, что Ал. Ал. Фридман является весьма разносторонним и самостоятельным работником в области науки, обладающим обширными познаниями в области чистой математики, молодым ученым с широкой инициативой и изобретательностью.

Следует отметить также редкую трудоспособность г. Фридмана и обширную эрудицию не только по вопросам чистой и прикладной математики (в университетском смысле слова), но и во многих вопросах практической механики, физики, метеорологии.

В настоящее время Ал. Ал. Фридман работает уже над магистерской диссертацией по гидродинамике о вихревых движениях жидкости, принимая в расчет и изменение температур, и получил уже, насколько мне известно, в этом сложном вопросе ряд интересных результатов как с чисто теоретической точки зрения, так и с точки зрения возможных практических применений \*.

Не сомневаюсь, что Ал. Ал. Фридман, посвятив себя долгу научной работы в университете, широко разовьет свою научную деятельность.

Привлечение его в качестве преподавателя механики в Пермский университет я считаю весьма желательным. Университет найдет в нем достойного работника и научную силу.

Академик В. Стеклов

Петроград, 18 февр. (5 февраля ст. ст.) 1918.

Ал. Ал. Фридман имеет и значительную педагогическую опытность, т[ак] к[ак] с 1912 г. состоял преподавателем в Институте инженеров путей сообщения и одно время читал там курс приближенных вычислений. Он мне известен как весьма толковый лектор, на что считаю необходимым обратить внимание. В 1916 г. он получил звание приват-доцента Киевского университета.

Академик Стеклов

### А. А. ФРИДМАН

(некролог)<sup>61</sup>

Недавно скончавшийся директор Главной геофизической обсерватории, Александр Александрович Фридман, принадлежал к числу лучших моих учеников и своевременно был оставлен мною при Петербургском университете для приготовления к профессорскому званию по прикладной математике. Еще будучи студентом, он напечатал несколько исследований, доказавших и его широкие познания в области математических наук и способность к самостоятельной исследовательской работе. Отлич-

\* Некоторые результаты опубликованы в *Comp. rend. Acad. sci.*, 1917; всего А. А. Фридманом напечатано 12 работ (прим. В. А. Стеклова).

ный математик, он дал не только ряд работ по анализу, но и применил его методы к исследованию основных вопросов гидродинамики, в особенности в ее применениях в динамике атмосферы, которая должна была впоследствии лечь в основу научной метеорологии. В теоретической метеорологии, изучению которой посвятил свои силы А. А. Фридман в последние годы, он является одним из первых начинателей. Его исследования по разным практическим вопросам динамики атмосферы пользуются широкой известностью и содержат ряд ценных, новых результатов. Следует отметить чрезвычайную разносторонность его таланта и редкую трудоспособность. Мировая война на некоторое время отвлекла его от чисто научной работы, но и при самых неблагоприятных условиях, в качестве военного летчика, побывавшего и при наступлении русских войск на северо-западном фронте, и при взятии Перемышля, он находил время для научной работы. За время войны им напечатаны, например, исследования «Значение линий тока воздушных движений для воздухоплавания», «Об атмосферных вихрях», в то же время им разрабатывался вопрос о метании бомб с аэропланов и, как замечает профессор Фикер, единственное удачное попадание, наблюдаемое им, было сделано именно А. А. Фридманом. По окончании войны он снова возвратился к научной работе, заняв место профессора механики в недавно открытом Пермском университете. В 1920 г. снова возвращается в Главную геофизическую обсерваторию, где начал работать вскоре после окончания университета, заняв должность старшего физика. С этого времени началась его усиленная работа как теоретическая, так и практическая. В Перми еще было напечатано исследование «О вертикальных течениях в атмосфере», играющих важную роль в разных метеорологических явлениях и обративших на себя еще внимание гениального Ломоносова. Затем «О распределении температуры с высотой при наличии лучистого теплообмена земли и солнца», «Об одном адиабатическом движении тяжелого газа», «Идея вращающейся жидкости в атмосферных движениях», «Атмосферные вихри и порывистость ветра» и др. За это же время им издано обширное исследование «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», в котором рассматриваются сложные и важные вопросы о движении сжимаемой жидкости с изменениями температуры. Эти изыскания имеют важное значение не только с чисто математической точки зрения, но и по их многочисленным применениям к объяснению многих метеорологических явлений. Дальнейшее развитие исследований по вопросу о вертикальных токах в атмосфере он дал затем в статье: «Die verticalen Strömungen in der Atmosphäre».

Отмечу еще его работы «Die Grossenordnung der meteorologischen Elemente und ihrer räumlichen u. zeitlichen Ableitungen» (совм. с Hesselberg'ом). «Sur la cinématique des lignes de tourbillons» «Über Wirbelbewegung in einer kompressiblen Flüssigkeit» «Über atmosphärische [Wirbel und die Turbulenz des Windes]».

Отмечу, что все эти исследования о вопросах совершенно конкретных, касающихся главнейших практических нужд метеорологии, в значительной мере содействовали развитию научной метеорологии, именно потому, что были произведены отличным математиком и практиком одновременно и одинаково ценны и с математической и с практической сторон. В то же время А. А. Фридман не переставал работать и в области чистой математики.

Укажу, например, исследования: «Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativen Krümmung des Raumes», где он исправляет некоторые неправильности в суждениях Эйнштейна, «Über die Geometrie des halbsymmetrischen Übertragungen» (совм. с I. A. Schouten). Также его курс «Приближенные вычисления» (совм. с Я. С. Безиковичем), «О возможных конфигурациях в атомах Резерфорда» (совм. с проф. Тамаркиным), наконец, его брошюры «Мир, как пространство и время» и «Основы теории относительности».

Всего за несколько месяцев до неожиданной его смерти, он был назначен директором Главной геофизической обсерватории и с обычным усердием принялся за организационную работу, а меньше, чем за месяц до смерти совершил полет на воздушном шаре с целью исследования верхних слоев атмосферы.

С опасностью для жизни он достиг высоты почти в 7,5 км, произведя ряд интересных наблюдений. В то же время был моим главным помощником по редактированию посмертного труда акад. А. М. Ляпунова «Sur les figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation», проверял самым тщательным образом каждую формулу этого крайне сложного исследования. И за несколько дней до его болезни приходилось не раз вызывать его по этому делу в два часа ночи и позднее, так как день весь посвящал он работе в Обсерватории.

В только что полученном мною письме от проф. Фикера, директора Прусского метеорологического института, он, благодаря за прекрасные часы и дни, проведенные на 200-летнем юбилее Академии Наук в Ленинграде и Москве, добавляет: «только одна тень будет навсегда омрачать воспоминание об этих днях — смерть А. А. Фридмана, в котором Вы потеряли одного из самых блестящих Ваших учеников и которого будет оплакивать каждый метеоролог. Крепчайшая надежда теоретической метеорологии отошла с ним. Этот случай для меня особенно горестен, так как он был мне наиболее близким из всех русских метеорологов».

А. А. Фридман умер в расцвете сил и таланта, 37 лет от роду.

Вице-Президент Академии Наук

В. А. Стежков

Октябрь 1925 г.



**ПАМЯТИ А. А. ФРИДМАНА**<sup>62</sup>

Характеристика личности А. А. была дана различными лицами: его учителями, сотрудниками и учениками, и память о нем, несмотря на истекшие уже два года, обладает какой-то особенной жизненной силой.

Для него наука и работа были дороже жизни, которую он сжигал во имя идеи и глубокой веры в будущие достижения человеческого разума. Мечта о возможности снестись когда-нибудь с иными мирами, когда человечество сумеет преодолеть силу тяготения, казалась ему осуществимой в недалеком будущем.

Во всех его полетах была частица этого стремления «оторваться от земли», уйти от мелких интересов и забот и подняться выше, то «Excelsior», которое было девизом его жизни. Он горел сам, но умел зажигать и других; его энтузиазм и доверие к лучшим сторонам человеческого «я» заставляли и других работать с ним бескорыстно и самоотверженно, и, несмотря на то, что многие трудились с ним до переутомления, они вспоминают о нем с благодарностью, так как он никогда не «угашал духа», а поднимал его, вселяя веру в будущее и доверие к собственным силам и труду.

Около него группировалось много учеников различных специальностей и дарований, и он не ограничивался чтением лекций, а интересовался их занятиями и каждую работу просматривал тщательно, был требователен, подчас беспощаден. Читая ясно и просто он, так сказать, «гипнотизировал» среднего студента, которому казалось все доступным и понятным, но эта кажущаяся простота скрывала необходимость большой работы, требовала больших знаний и способностей. И «средним» было трудно, но даровитые, не боявшиеся работы, тянулись к нему и знали, что в А. А. встретят поддержку и опору. И действительно он хлопотал о материальном устройстве своих талантливых учеников и вдохновлял их для творческой работы. «Это же мои дети», — говорил он про своих любимых учеников и часто дарил им свои идеи, исправлял и дополнял ими написанное и радовался каждой напечатанной работе своих питомцев. Он всегда вспоминал, как еще в гимназии он и Я. Д. Тамаркин послали за границу совместную работу и, получив лестное письмо с известием, что присланное будет напечатано, были в таком буйном восторге, что впервые пострадали за науку — их обоих выгнали из класса.

А. А. не был только ученым теоретиком, он любил и практическое применение науки к жизни. Организаторские способности А. А. подсказывали ему зачастую верные пути и оценку положения, а кипучая энергия приводила в исполнение задуманные планы. С одной стороны, — жизненные задачи, сознание ответственности и долга, живая интересная работа созидания, с другой, — стремление уйти от жизни людей, практических целей и отдаться науке и мирному творчеству.

В этой двойственности, в переходе от ученых изысканий к бурной деятельности проходила вся его жизнь.

Есть книга Тиссандье «Мученики науки», и имя А. А. может быть смело написано в ней. Его жизнь была посвящена познанию и творчеству, а следовательно, упорному труду, надорвавшему его силы, и страданиям сомнения и отчаяния, изнурившим его мятежный дух.

«Я работолюбивый», — говорил он, и действительно он любил всякое познание, но математика была как-то «органически» соединена с ним. В детстве для него было придумано самое строгое наказание, усмирявшее его непокорный нрав, — его оставляли без уроков арифметики, и таким он остался на всю жизнь. Его мучила жажда знания, и избрав механику, этот «рай математических наук», по словам Леонардо-да-Винчи, он не смог ограничиться ею и искал и находил новые отрасли, изучал глубоко, детально и вечно мучился от недостаточности своих знаний. «Нет, я невежда, я ничего не знаю, надо еще меньше спать, ничем посторонним не заниматься, так как вся эта „так называемая — жизнь“ — сплошная потеря времени». И он мучил себя сознательно, так как видел, что ему не хватает времени обнять взором те широкие горизонты, которые открывались ему при изучении новой науки. Он не хотел покориться и боролся, но каждый раз с глубоким страданием должен был признать слова Ньютона о великом океане знания и об ученых, подбирающих лишь те камешки, которые море им пожелает выбросить.

Изучая любую отрасль науки, А. А. становился в ней не только специалистом, но и творцом. Целый вихрь новых идей захватывал его с неудержимой силой, и если жажда познания приносила ему и радость и мучения, то творчество было жестоким кумиром, дарившем ему и великое счастье и глубокую внутреннюю муку, тоску о недоступном.

Всегда готовый скромно учиться у всякого, кто знал больше него, он создавал, что в своем творчестве идет новыми путями, трудными, никем еще не исследованными и любил приводить слова Данте: «L'acqua ch'io prendo giammai non si corse» (Par. II, 7). «Вод, в которые я вступаю, не пересекал еще никто».

Умение всматриваться в глубину, охватить широким размахом, ясно, кратко изложить, применить к практике или оставить в виде новой теории, осветить со всех сторон и дать новый толчок мысли, — таковы были характерные особенности его работы, а его творческая мысль проникала во все закоулки накопленных им знаний и освещала их ярким светом его дисциплинированного ума и творческой фантазии.

Но великая радость, которую дает творчество, гордость духа от сознания сил своих и намеченных открытий слишком часто сменялась отчаянием, муками сомнения и неудовлетворенностью своей работой. Вечное стремление создать большее, найти новое, невозможность одолеть препятствия, сознание одиночества и слабости сил человеческих, — вот что создает из истинного ученого «мученика науки».

Екатерина Фридман

АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФРИДМАН<sup>63</sup>*П. Л. Капица*

Александр Фридман — один из лучших наших ученых. Если бы не смерть от брюшного тифа в возрасте 37 лет, он и сейчас был бы с нами. Безусловно, он сделал бы еще многое в физике и математике и достиг бы высших академических званий. В молодом возрасте он был уже профессором, обладал мировой известностью среди специалистов по теории относительности и метеорологии. В 20-х годах, находясь в Ленинграде, я нередко слышал отзывы о Фридмане, как о выдающемся ученом, от профессоров Круткова, Фредерикса, Бурсиана.

Фридман сделал одно из самых значительных теоретических открытий в астрономии — он предсказал расширение Вселенной.

Из решения Фридманом космологических уравнений Эйнштейна вытекала возможность изменения во времени радиуса кривизны нашего мира. Через несколько лет после опубликования работы Фридмана американский астроном Хэбб обнаружил разбегание галактик — следствие расширения Вселенной. Таким образом, Фридман «на кончике пера» открыл поразительное явление космического масштаба.

По этому поводу иногда говорят, что Фридман не очень-то верил в свою собственную теорию и относился к ней, лишь как к математическому курьезу. Он будто бы говорил, что его дело — решать уравнения, а разбираться в физическом смысле решений должны другие специалисты — физики.

Это ироническое высказывание о своих трудах остроумного человека не может изменить нашу высокую оценку его открытия. Даже если Фридман не был уверен в том, что расширение Вселенной, вытекающее из его математических выкладок, существует в природе, это никаким образом не умаляет его научной заслуги. Вспомним, например, теоретическое предсказание Дираком позитрона. Дирак тоже не верил в реальное существование позитрона и относился к своим расчетам, как к чисто математическому достижению, удобному для описания некоторых процессов. Но позитрон был, открыт, и Дирак, сам того не предполагая, оказался пророком. Никто не пытается преуменьшить его вклад в науку из-за того, что он сам не верил в свое пророчество.

Позже Дирак предсказал существование индивидуальных магнитных полюсов, которых не нашли, хотя одно время Ферми думал, что они могут реально существовать, но это было ошибкой. Неизвестно, верит ли он в то, что их найдут. Но если это случится, ученые воздадут должное Дираку за силу его теории.

Фридман не дожил до подтверждения своих расчетов прямым наблюдением. Но мы теперь знаем, что он был прав. И мы обязаны дать справедливую оценку замечательному результату этого ученого.

Имя Фридмана до сих пор было в незаслуженном забвении. Это несправедливо и это необходимо исправить. Мы должны увековечить это имя. Ведь Фридман — один из пионеров советской физики, ученый, внесший большой вклад в отечественную и мировую науку. Надо опубликовать собрание всех его трудов и издать его биографию.

#### **ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ А. ФРИДМАНА «О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА»<sup>64</sup>**

*А. Эйнштейн*

Результаты относительно нестационарного мира, содержащиеся в упомянутой работе, представляются мне подозрительными. В действительности оказывается, что указанное в ней решение не удовлетворяет уравнениям поля (А). Как известно, из этих уравнений следует, что дивергенция тензора вещества  $T_{ik}$  обращается в нуль. В случае, характеризуемом предположениями (С) и ( $D_3$ ), это приводит к соотношению

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_4} = 0,$$

что вместе с уравнением (8) требует постоянства радиуса мира во времени. Следовательно, значение этой работы в том и состоит, что она доказывает это постоянство.

#### **К РАБОТЕ А. ФРИДМАНА «О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА»**

*А. Эйнштейн*

В предыдущей заметке я подверг критике названную выше работу. Однако моя критика, как я убедился из письма Фридмана, сообщенного мне г-ном Крутковым, основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты г. Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, что уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т. е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства.

#### **РАБОТЫ А. А. ФРИДМАНА ПО ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА<sup>65</sup>**

*В. А. Фок*

Среди научных работ А. А. Фридмана его исследования по теории тяготения Эйнштейна составляют по своему числу лишь небольшую долю (менее одной десятой части) всех опубликованных им работ, но по тому влия-

янию, какое они оказали на развитие науки, они стоят едва ли не на первом месте.

Александр Александрович Фридман и Всеволод Константинович Фредерикс, будучи профессорами Петроградского (ныне Ленинградского) университета, были первыми, познакомившими русских физиков, работавших в Петрограде, с недавно созданной Эйнштейном теорией тяготения. Это было в самом начале двадцатых годов, когда только что была прорвана блокада Советской России и из-за границы начала поступать научная литература. В Физическом институте университета собирался семинар, где в числе других ставились доклады по теории Эйнштейна. Участниками семинара были профессора и студенты старшего курса (их было тогда немного). Основными докладчиками по теории относительности были В. К. Фредерикс \* и А. А. Фридман, но иногда выступали Ю. А. Крутков, В. Р. Бурсиан и другие. Доклады Фредерикса и Фридмана я живо помню. Стиль этих докладов был различный: Фредерикс глубоко понимал физическую сторону теории \*\*, но не любил математических выкладок, Фридман же делал упор не на физику, а на математику. Он стремился к математической строгости и придавал большое значение полной и точной формулировке исходных предпосылок. Очень интересны бывали возникавшие между Фредериксом и Фридманом дискуссии.

Основные свои две работы по теории относительности А. А. Фридман написал в 1922 и 1923 гг.; они были впервые напечатаны на немецком языке в т. 10 и 21 журнала «*Zeitschrift für Physik*» за 1922 и 1924 гг. Первую из них «О кривизне пространства» Фридман успел также опубликовать по-русски в Журнале Русского физико-химического общества (т. 56 за 1924 г.), а вторую «О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства» он опубликовать по-русски не успел. Мне эти работы хорошо памятли еще и потому, что вторую из них (а может быть, и обе) я переводил для А. А. Фридмана на немецкий язык, причем обратил его внимание на один не разобранный им случай пространства отрицательной кривизны.

---

\* Опубликованная в «Успехах физических наук» (1922, 2, стр. 162) статья В. К. Фредерикса содержит первое на русском языке изложение общей теории относительности, данное в докладах, которые автор прочитал в Москве и Петрограде в начале двадцатых годов (*Прим. ред. журнала УФН*).

\*\* Мне помнится, на мой вопрос: «Как формулируется закон движения многих тел в общей теории относительности?» — Фредерикс сразу ответил: «Движение тел определяется движением особых точек метрического тензора». Это было за много лет до вывода на этой основе уравнений движения системы тел (работы Эйнштейна и мои работы 1938—1939 гг.). Не могу также не вспомнить, что Фредерикс еще до новой квантовой механики и до неравенств Гейзенберга говорил мне о необходимости поставить в атомной физике проблему наблюдения и что он первый оценил работы де Бройля 1923—1924 гг. о волнах материи.

Рассмотрим кратко содержание этих работ. Исходные предположения Фридмана заключаются в следующем. Вводится пространственная координатная система, относительно которой вещество предполагается неподвижным (сопутствующие координаты). Постулируется ортогональность времени к этому пространству. Предполагается, что само пространство обладает постоянной кривизной (положительной или отрицательной), зависящей только от времени \*. При таких предположениях квадрат элементарного интервала может быть написан в виде

$$d\tau^2 = - \frac{R^2}{c^2} d\sigma^2 + M^2 dt^2, \quad (1)$$

где  $d\sigma^2$  есть квадрат элемента длины на сфере или псевдосфере единичного радиуса (на сфере при положительной кривизне и на псевдосфере Лобачевского при отрицательной кривизне). Выбор координат на сфере и на псевдосфере несуществен; Фридман принимает в случае сферы

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2 \quad (2)$$

и в случае псевдосферы

$$d\sigma^2 = \frac{1}{x_1^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (3)$$

Уравнения тяготения Эйнштейна Фридман пишет в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \bar{R} + \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik}. \quad (4)$$

Он использует, таким образом, уравнения, содержащие космологическую постоянную  $\lambda$ . По этому поводу необходимо заметить следующее. Первоначально постоянная  $\lambda$  была введена Эйнштейном в уравнения тяготения для того, чтобы получить «стационарное» решение ( $R = \text{const}$ ) при отличной от нуля плотности вещества (поэтому постоянная  $\lambda$  и была названа «космологической»). Затем, после работ Фридмана Эйнштейн отказался от члена с  $\lambda$ , и долгое время было принято считать, что член с  $\lambda$  не нужен и даже что уравнения (4) при  $\lambda \neq 0$  неверны. На самом же деле член  $\lambda g_{ik}$  должен всегда рассматриваться совместно с членом  $\kappa T_{ik}$ , причем нужно иметь в виду, что тензор массы  $T_{ik}$  определяется из локальных соображений не вполне однозначно, а лишь с точностью до слагаемого \*\*, пропорционального  $g_{ik}$ . «Космологический» член  $\lambda g_{ik}$  как раз и компенсирует неоднозначность в определении тензора  $T_{ik}$ . Для однозначного определения тензора

\* В первой работе рассматривается случай положительной кривизны, а во второй — случай отрицательной кривизны.

\*\* Физически это соответствует произвольной постоянной в выражении для давления («давление на бесконечности»).

$T_{ik}$  и постоянной  $\lambda$  необходимы добавочные соображения. В задачах обычного астрономического типа можно потребовать, чтобы на бесконечности (т. е. на достаточно большом удалении от рассматриваемых масс) пространство было евклидово и чтобы там тензор  $T_{ik}$  обращался в нуль. Тогда необходимо будет и  $\lambda = 0$ . В космологической же задаче условий на бесконечности ставить нельзя и тот или иной выбор  $\lambda$  представляет особую космологическую гипотезу. Поэтому использование Фридманом уравнений (4) представляется вопреки принятому мнению вполне оправданным.

Решая уравнения (4) при сделанных им предположениях, Фридман исследует как стационарный случай  $R = \text{const}$ , так и нестационарный случай  $R = R(t)$ . В стационарном случае выражение (2) (положительная кривизна) приводит к несколько обобщенным решением Эйнштейна и де Ситтера, соответствующим при  $\lambda > 0$  положительной плотности; выражение же (3) (отрицательная кривизна) приводит к новым решениям, но таким, которые соответствуют нулевой или отрицательной плотности.

Наиболее замечательны результаты Фридмана, относящиеся к нестационарному случаю. В этом случае будет  $M = M(t)$  и вводя, согласно уравнению  $dt' = M(t)dt$ , вместо  $t$  новую переменную можно без ограничения общности свести задачу к случаю  $M = 1$ . Тогда при положительной кривизне (формула (2)) для  $R(t)$  получается уравнение

$$\frac{R\dot{R}^2}{c^2} + R - \frac{\lambda}{3c^2} R^3 = A \quad (5)$$

и при отрицательной кривизне (формула (3)) уравнение

$$\frac{R\dot{R}^2}{c^2} - R - \frac{\lambda}{3c^2} R^3 = A, \quad (6)$$

где  $A$  — постоянная, связанная с плотностью соотношением

$$\kappa \rho R^3 = 3A. \quad (7)$$

При положительном знаке постоянной  $A$  получается решение с положительной плотностью.

Тем самым доказана возможность нестационарных решений, соответствующих постоянной (как положительной, так и отрицательной) кривизне «сопутствующего» пространства. В этом и состоит основной результат работ Фридмана.

Интересно проследить, как отнесся Эйнштейн к этому неожиданному для него результату. Вскоре после опубликования первой работы Фридмана появилась заметка Эйнштейна, в которой он несколько свысока говорит, что результаты Фридмана показались ему подозрительными и что он нашел в них ошибку, по исправлении которой решение Фридмана приводится к стационарному. В то время (1923 г.) в заграничной командировке был Ю. А. Кругков, который по просьбе Фридмана виделся в

Берлине с Эйнштейном и с большим трудом (как он мне говорил) убедил последнего в его неправоте. В результате дискуссий между Крутковым и Эйнштейном вскоре появилась вторая заметка Эйнштейна, в которой тот полностью признает свою ошибку и дает высокую оценку результатам Фридмана. Такая готовность Эйнштейна — великого ученого, стоявшего тогда на вершине своей славы, — признать свою ошибку заслуживает быть отмеченной.

В заключение необходимо сказать, что результаты Фридмана — доказательство возможности нестационарной (в частности, расширяющейся) Вселенной — имеют гораздо большее значение, чем то, какое он сам им придавал. Фридман не раз говорил, что его дело — указать возможные решения уравнения Эйнштейна, а там пусть физики делают с этими решениями что они хотят. Но впоследствии найденные Фридманом решения космологических уравнений получили применение в астрономии. Это произошло уже после безвременной кончины Фридмана, тогда, когда было открыто (Хабблом и другими) красное смещение в спектрах отдаленных галактик, истолкованное как доплеровский эффект от расширения Вселенной. Таким образом, работы Фридмана проложили путь к дальнейшему развитию науки о Вселенной как науки не только теоретической, но и наблюдательной, и в этом их немеркнувшее значение.

## **ТЕОРИЯ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ, СОЗДАННАЯ А. А. ФРИДМАНОМ <sup>67</sup>**

*Я. Б. Зельдович*

### **§ 1. История открытия Фридманом нестационарности Вселенной**

Данная статья приурочена к 75-летию со дня рождения А. А. Фридмана, которое исполнилось 17 июня 1963 г.

Прошло около 40 лет со времени опубликования двух коротких статей, в которых на основе общей теории относительности дается нестационарное решение космологической проблемы, или, говоря проще и короче, предлагается теория расширяющейся Вселенной. Вскоре, в 1925 г., Фридман умер, умер раньше, чем астрономические наблюдения подтвердили его теорию. По свидетельству академика В. А. Фока, переводившего работу Фридмана на немецкий язык для «Zeitschrift für Physik», автор не был уверен, что мир действительно устроен в соответствии с найденными им решениями \*.

---

\* См. статью В. А. Фока, стр. 398.



Правильная теория не только объясняет известные факты, но и предсказывает новые явления. Классический пример, который всегда приводят в этой связи, — предсказание существования планеты Нептун, сделанное астрономом Леверье\*. Но Леверье пользовался небесной механикой, которая еще до его работы была блестяще разработана и подтверждена.

Между тем работа Фридмана была первым (сейчас можно добавить — единственным) правильным применением общей теории относительности к космологии.

Общая теория относительности основана на специальной теории и принципе равенства тяжелой и инертной масс. В теории Фридмана делается единственное дополнительное предположение, что Вселенная в среднем однородна и изотропна; в окрестности Солнечной системы и нашей Галактики с определенной плотностью распределены другие галактики\*\*, имеется определенная средняя плотность вещества; предполагается, что и на любом расстоянии, в любом другом месте физические условия в среднем такие же.

Наша Галактика не является какой-то избранной, центральной во Вселенной, точно так же, как не являются избранными ни Земля, ни Солнце. Далее, движение галактик должно быть таким, чтобы оно не нарушало однородности и изотропности пространства, т. е. одинаковости условий во всех точках пространства и равноценности всех пространственных направлений в данной точке.

Из такого минимального количества предпосылок теоретически был получен грандиозный вывод: галактики не могут быть в покое друг относительно друга\*\*\*. Относительные скорости движения двух объектов возрастают пропорционально расстоянию между ними.

В настоящее время максимальная скорость удаления, зарегистрированная для далеких галактик, составляет 0,3—0,4 скорости света, т. е. порядка 100 000 км/сек. Эта скорость определяется по доплеровскому смещению спектральных линий.

Есть шуточный рассказ о том, как Роберт Вуд, проехав светофор на красный свет, объяснял полисмену, что из-за доплерэффекта он воспринимал свет как зеленый. Но в спектрах далеких галактик действительно

.....  
\* Менее известно, что кроме планеты, расположенной за орбитой Урана (т. е. Нептуна), Леверье предсказал еще существование планеты, орбита которой находится внутри орбиты Меркурия. В действительности такой планеты нет. Аномалии в движении Меркурия, на которых основывался Леверье, объясняются эффектами общей теории относительности.

\*\* Галактики — скопления звезд ( $10^9$  —  $10^{12}$  звезд), подобные скоплению, видимому как Млечный Путь, к которому принадлежит наша Солнечная система.

\*\*\* В принципе возможно равенство нулю скорости в определенный момент времени, однако ускорение всегда отлично от нуля. Поэтому мгновенное  $v = 0$  в такой же мере не является покоем, как и обращение в нуль скорости камня, брошенного вертикально вверх, в верхней точке траектории.

линии, соответствующие сине-зеленой части спектра, попадают в красную область, в видимой части спектра наблюдаются линии, которые в обычных лабораторных условиях лежат в ультрафиолете. Рассматривая это явление с классической точки зрения, можно сказать, что кинетическая энергия движения далеких объектов гигантски велика; эта кинетическая энергия во много раз превышает энергию любых известных ядерных реакций (за исключением реакций аннигиляции).

Таким образом, теория Фридмана предсказала грандиозное явление, масштаб которого в миллиарды раз больше масштаба явлений в солнечной системе. Поэтому без преувеличения можно говорить о великом научном подвиге Фридмана; его работа является основой всей современной космологии, общенаучное значение этой работы не меньше значения знаменитых гидродинамических работ Фридмана.

Значение и нетривиальность работы Фридмана выступают еще ярче, когда знакомишься с работами по космологии других ученых и, в частности, творца теории относительности Альберта Эйнштейна. Эйнштейн исходил из предвзятой точки зрения, что Вселенная должна быть стационарной, т. е. в среднем неизменной с течением времени. Когда оказалось, что уравнения не дают такого решения, он стал произвольно менять уравнения общей теории относительности (грубо говоря, ввел нечто вроде отрицательной плотности и отрицательности давления в пустоте) только с тем, чтобы спасти стационарность. Кстати, стационарность решения Эйнштейна оказалась иллюзорной: выяснилось, что его решение неустойчиво относительно малых возмущений.

Когда появились работы Фридмана, Эйнштейн отнесся к ним отрицательно. Только после разъяснений Круткова, приехавшего в Берлин с письмом Фридмана, он признал эти работы. Через несколько лет, в 1929 г. последовало экспериментальное подтверждение нестационарности Вселенной, всеобщего разбегания туманностей. В 1935 г. в книжке «Сущность теории относительности» Эйнштейн, подводя итог, отмечает правильность концепции Фридмана и подчеркивает, что изменение уравнений, которое он сам производил, было ошибкой.

Работы Фридмана опубликованы в 1922—1924 гг. в период больших трудностей. «Россия во мгле» — вот впечатление Герберта Уэллса о Москве и Петрограде 1921 г. В том же номере журнала, где опубликована работа Фридмана, помещено обращение к немецким ученым: собрать научную литературу для русских коллег, которые были отрезаны от нее во время войны и революции. В этих условиях создание теории огромного значения было подвигом не только научным, но и общечеловеческим.

## § 2. Прошлое и будущее в теории Фридмана

Как уже было сказано, теория приводит к связям между расстоянием и скоростью:

$$u = Hr, \quad (2,1)$$

где  $H$  — так называемая постоянная Хаббла, названная по имени астронома, открывшего явление разбегания далеких галактик.

Называя  $H$  постоянной, имеют в виду, что  $H$  не зависит от расстояния между галактиками и от направления  $r$ . Теория предсказывает, что  $H$  зависит от времени. В самом деле, при инерционном движении скорость постоянна, а расстояние увеличивается, так что  $H$  уменьшается; к этому добавляется еще влияние тяготения, также уменьшающее  $H$ .

Что говорит теория о прошлом и будущем Вселенной?

Выводы, относящиеся к прошлому, однозначны. В настоящее время происходит расширение, следовательно, раньше плотность была больше.

Величина  $H$  имеет размерность  $1/\text{сек}$ . Поэтому  $H^{-1}$  представляет собой время.

При инерционном движении  $H^{-1}$  как раз и есть время, протекшее с момента, когда плотность была бесконечна.

С учетом гравитационного взаимодействия скорость расширения в прошлом была больше, чем без учета тяготения, а значит, время, протекшее с момента бесконечной плотности до сегодняшнего дня  $T$ , меньше, чем  $H^{-1}$ ,  $T < H^{-1}$ .

В теории Фридмана неизбежен вывод о том, что был момент, когда плотность была бесконечна (этот момент удобно выбрать за начало отсчета времени). Этот вывод остается в силе независимо от того, по какому закону нарастает давление при большой плотности; в однородной Вселенной давление не зависит от координат, а ведь на движение влияет только сила, равная разности давлений (градиенту давления).

Выводы из теории Фридмана относительно будущего существенно зависят от соотношения между сегодняшними значениями (постоянной Хаббла) и средней плотностью вещества  $\rho$ .

Есть определенная критическая величина  $\rho_c = \frac{3}{8\pi} \frac{H^2}{\kappa}$ , где  $\kappa$  — ньютоновская постоянная тяготения:

$$\kappa = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ сек}^{-2}$$

(вывод этого выражения с помощью ньютоновской механики в следующем параграфе).

Если фактическая плотность  $\rho$  меньше этого критического значения,  $\rho < \rho_c$ , то тяготение не сможет остановить наблюдаемое расширение; хотя расширение и будет замедляться, но оно не сменится сжатием; расстоя-

ние между двумя далекими галактиками с течением времени будет неограниченно расти.

Если же плотность больше критической,  $\rho > \rho_c$  (о фактическом положении см. в § 5), то притяжение велико и наблюдаемое в настоящее время расширение должно в будущем смениться остановкой и сжатием; вместо доплеровского «красного смещения» (разбегание) астрономы далекого будущего будут говорить о «синем» или «фиолетовом» смещении спектральных линий. В этом случае не только в прошлом, но и в будущем решение дает бесконечную плотность.

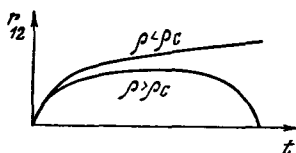


Рис. 1

Зависимость от времени расстояния между двумя галактиками в двух случаях схематически показана на рис. 1.

### § 3. Элементарный вывод закона расширения

Общая теория относительности содержит в себе как предельный случай классическую механику вместе с ньютоновской теорией тяготения.

Рассмотрим малую область, внутри которой все скорости малы по сравнению со скоростью света  $c$ ; малы и разности гравитационного потенциала внутри области (по сравнению с  $c^2$ ). К такой области применимы уравнения Ньютона. При этом мы пользуемся теоремой, которая одинаково имеет место и в ньютоновской теории и в общей теории относительности: вещество, окружающее рассматриваемую область сферически-симметричным слоем, никак не влияет на процессы внутри области. Оказывается, что это утверждение распространяется и на область, мысленно вырезанную в бесконечном пространстве, заполненном веществом с постоянной плотностью.

Обратимся к «арифметике». Рассмотрим шаровую область радиуса  $R$ , внутри которой вещество с плотностью  $\rho$  имеет в данный момент  $t = t_0$  скорость, распределенную по закону

$$u = Hr. \quad (3,1)$$

В частности, частица  $A$  на краю имеет мгновенную скорость

$$u_R = HR.$$

Ускорение этой частицы равно

$$\frac{du_R}{dt} = -\kappa \frac{M}{R^2}, \quad (3,2)$$

где  $M$  — масса вещества, заключенного внутри рассматриваемой области:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3. \quad (3,3)$$

С течением времени  $\rho$  и  $R$  меняются, но  $M$ , очевидно, постоянно. Следовательно, уравнение легко проинтегрировать; умножаем слева и справа на  $u_R = dR/dt$ :

$$\begin{aligned} u_R \frac{du_R}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} u_R^2 \right) = -\kappa \frac{M}{R^2} \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\kappa M}{R}, \\ \frac{1}{2} u_R^2 - \frac{\kappa M}{R} &= \text{const} = k. \end{aligned} \quad (3,4)$$

Пусть читатель простит элементарность расчета; мы получили постоянство суммы кинетической и потенциальной энергий единицы массы на краю области; существенно, что при выводе не пришлось пользоваться рассуждениями о работе удаления частицы на бесконечность, которые зависели бы от того, чем окружена область.

Если в данный момент  $u_R > 0$  и  $k > 0$ , то, очевидно,  $u_R$  никогда не обратится в нуль, расширение никогда не сменится сжатием.

Подставим значения величин для  $t = t_0$ :

$$\frac{1}{2} u_R^2 - \frac{\kappa M}{R} = \frac{1}{2} H^2 R^2 - \kappa \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{1}{R} = R^2 \left( \frac{1}{2} H^2 - \frac{4\pi}{3} \kappa \rho \right) = k.$$

Итак, критическое условие

$$\frac{1}{2} H^2 - \frac{4\pi}{3} \kappa \rho_c = 0, \quad (3,5)$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi\kappa}. \quad (3,6)$$

Результат в точности совпадает с теорией Фридмана. Легко также найти закон изменения со временем плотности и постоянной Хаббла как для  $\rho > \rho_c$ , так и для  $\rho < \rho_c$ .

Чтобы не заниматься алгеброй, ограничимся предельным законом при малых  $t \ll t_0$ ; когда  $R$  мало,  $R(t) \ll R(t_0)$ , соответственно велика скорость  $u_R$  и величиной  $k$  можно пренебречь по сравнению с большими  $u_R^2$  и  $\kappa M/R$ . Тогда

$$\frac{1}{2} u_R^2 = \frac{\kappa M}{R}, \quad u_R = \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}}, \quad \frac{2}{3} R^{3/2} = t \sqrt{2\kappa M}. \quad (3,7)$$

Постоянная интегрирования выбрана так, чтобы при  $t = 0$ ,  $R = 0$ , т. е. за начало отсчета времени выбран момент бесконечной плотности.

Найдем выражение плотности  $\rho(t)$ . Для этого подставим

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3(t) \rho(t),$$

получим

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi k t^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{t^2}. \quad (3,8)$$

Численное выражение дано для плотности в  $[г \cdot см^{-3}]$  при  $t$  в  $[сек]$ .

Наконец, для постоянной Хаббла получим

$$H = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t}. \quad (3,9)$$

Рассматривалась область с вполне определенным количеством вещества  $M$ , с определенным  $R(t)$ . Однако результаты для таких величин, как  $\rho(t)$ ,  $H(t)$ , оказались не зависящими от выбора  $M$  и  $R$ . Это подтверждает внутреннюю согласованность расчета, подтверждает возможность обобщения расчета на бесконечное пространство.

Иногда говорят о гравитационном парадоксе в ньютоновской теории, о невозможности рассмотрения бесконечной однородной Вселенной в этой теории. В действительности есть определенный последовательный способ действий, при котором никакого парадокса не возникает. Будем сначала рассматривать шар конечного размера  $R$  с определенной плотностью  $\rho$  и распределением скорости  $u = Hr$ ; решение механической задачи для него тривиально и приводит к определенной зависимости  $H(t)$  и  $\rho(t)$ , в которую  $R$  не входит. Следовательно, если  $R \rightarrow \infty$  в момент  $t_0$  при фиксированных  $H(t_0)$  и  $\rho(t_0)$ , то получится правильное решение для бесконечной однородной Вселенной.

Такое решение могло бы быть получено хоть через год после формулировки Ньютоном законов механики и всемирного тяготения. В действительности такой подход был найден лишь в 1935 г. в порядке осмысливания и популяризации решения Фридмана. Однако ньютоновский подход является строгим и точным.

Решение найдено путем рассмотрения шаровой области, в которой имеется выделенная точка — центр шара. В центре  $O$  вещество покоится (рис. 2). В каждой другой точке вещество движется с определенной скоростью, имеется выделенное направление — направление скорости  $u$ . Однако легко убедиться на классическом уровне, что эта выделенность

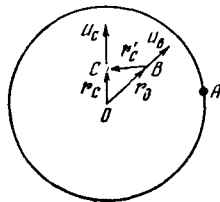


Рис. 2

центра и направления является фиктивной. Возьмем произвольную точку  $B$  внутри шара и перейдем в систему координат, в которой  $B$  покоится.

Величины в новой системе координат отметим штрихом. Очевидно, что для какой-то другой точки  $C$  (см. рис. 2)

$$r'_C = r_C - r_B, \quad (3,10)$$

$$u'_C = u_C - u_B. \quad (3,11)$$

Мы пользуемся классическими законами преобразования: эвклидовым для координат, галилеевым для скоростей.

Подставим хэббловский закон

$$u = Hr,$$

получим

$$u' = Hr'. \quad (3,12)$$

Закон движения с точки зрения наблюдателя, находящегося и движущегося вместе с  $B$ , ничем не отличается от закона движения для наблюдателя в центре шара  $O$ , с которым мы себя молчаливо отождествили в предыдущем расчете.

Наблюдатель в точке  $B$  мог бы сказать, что он находится ближе к одному краю области, чем к другому, но только в том случае, если область, заполненная материей, действительно имеет край, т. е. окружена пустотой. Если же область выделена только мысленно в бесконечно простирающемся однородном поле плотности вещества, то точка  $B$  полностью эквивалентна центру сферы, а также любой другой произвольно выбранной точке. Таким образом, действительно построено решение, удовлетворяющее принципу однородности, но решение по необходимости нестационарное.

Величие открытия Фридмана заключается, может быть, не столько в применении общей теории относительности, сколько в отказе от предвзятого представления о стационарности Вселенной.

### Заключение

Испытание временем это самое сильное, безошибочное испытание научной теории. Космологическая теория расширяющейся Вселенной, выдвигнутая А. А. Фридманом, подвергается этому испытанию уже 40 лет; в XX в., когда гигантски ускорилось развитие науки, 40 лет стоят нескольких веков в прошлом. Из этого испытания теория Фридмана вышла окрепшей. Наблюдения подтвердили самый факт нестационарности Вселенной. Бесславно отпали неоднократные попытки найти какое-то другое объяснение красному смещению спектральных линий. Агонизируют теории,

пытающиеся соединить разбегание туманностей с предвзятой идеей стационарности за счет отказа от всех законов физики\*.

Трудности в согласовании короткой шкалы времени с данными о возрасте Земли и других небесных тел отпали после уточнения расстояний, которое привело к уменьшению постоянной Хаббла.

В космологии есть много нерешенных вопросов, но решение этих вопросов следует искать на основе теории Фридмана, в рамках развитых им общих представлений.

В обзорном докладе Уилера на Сольвеевском конгрессе 1958 г. хорошо описана научная драма космологии.

«История прошлого предупреждает нас об опасности пренебрежения теорией Эйнштейна, когда она сталкивается с предвзятыми идеями. Он сам (Эйнштейн) говорит нам о том, как он чувствовал себя несчастным, когда общая теория относительности предсказала, что мир конечной плотности должен иметь изменяющийся размер; как он изобрел искусственный новый член с «космологической постоянной», чтобы скомпенсировать это «неразумное» изменение размера; о последующем открытии, что мир действительно расширяется, и о его заключении, что космологический член с самого начала не следовало бы вводить; о том, что к выводам простой прямолинейно, последовательно развиваемой теории следует относиться серьезно».

Не сказано здесь только одно, — что правильное решение пришло из Советского Союза и принадлежало А. А. Фридману.

Любимым изречением А. А. Фридмана было: «Вод, в которые я вступаю, не пересекал еще никто»\*\*. В своих коротких заметках о космологических решениях Фридман не только сам вступил в новую область, он указал и нам плодотворные пути дальше, вперед, в неизведанное.

## АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФРИДМАН<sup>68</sup>

*П. Я. Полубаринова-Кочина*

А. А. Фридман родился 17 июня 1888 г. Его отец был музыкантом и композитором. Мать Александра Александровича, Людмила Игнатьевна Воячек, дочь чешского музыканта, давала уроки игры на рояле. Сам Фридман говорил, что он не унаследовал музыкальных способностей от своих родителей.

А. А. Фридман учился во Второй петербургской гимназии, где математику вел известный преподаватель Николай Иванович Билибин, пере-

\* Подробная критика теории спонтанного рождения вещества, претендующей на замену теории Фридмана, дана в статье автора в УФН, 1962, 78.

\*\* Слова Данте Алигieri: «L'acqua ch'io prendo giammai non si corse»; цитирую по воспоминаниям Е. П. Фридман (Геофизический сборник, 1927, 5, вып. I).



водчик алгебры Бертрана на русский язык. Билибин отмечал выдающиеся способности своего ученика. Будучи гимназистом, Фридман вместе со своим другом Я. Д. Тамаркиным провел исследование, связанное с числами Бернулли, оно было опубликовано в 1903 г. в «Math. Ann.» т. 62.

По окончании Петербургского университета в 1909 г. Фридман был оставлен при нем профессорами В. А. Стекловым и Д. К. Бобылевым для подготовки к профессорской деятельности по кафедре чистой и прикладной математики. В 1913 г. физик и метеоролог Б. Б. Голицын предложил молодому ученому работать в Павловской аэрологической обсерватории.

С 1913 по 1916 гг. Голицын был директором Главной физической обсерватории института, ведавшего метеорологическими наблюдениями, их обработкой и атмосферными исследованиями, впоследствии переименованной в Главную геофизическую обсерваторию (ГГО).

В 1914 г. Александр Александрович был командирован в Лейпциг к В. Бьеркнесу для ознакомления с методами синоптической и динамической метеорологии.

Вильгельм Бьеркнес вместе с другими норвежскими учеными был основателем норвежской школы динамической метеорологии. Он разработал основы фронтологического метода, в котором важным фактором, обуславливающим изменение погоды, считается появление фронтов. Фронтальной поверхностью (или фронтом) называется поверхность разрыва температуры и других метеорологических элементов. Главнейшие из фронтов разделяют арктические, тропические и экваториальные массы воздуха.

Фридман участвовал в подготовке мероприятий для наблюдения солнечного затмения, которое ожидалось в августе 1914 г.; в ходе наблюдений ему пришлось летать на дирижаблях.

Осенью 1914 г. он вступил в добровольческий авиационный отряд (отряд действовал на фронте вблизи Осовца).

С декабря 1914 г. по март 1915 г. он провел серию полетов над Перемышлем с целью испытания приемов бомбометания, предварительно им же разработанных. Один свидетель этих испытаний сказал, что единственное удачное попадание, наблюденное им, было произведено Фридманом. По ноябрь 1915 г. Фридман был наблюдателем в авиационном отряде, занимался изучением характера атмосферных вихрей. За свою деятельность он получил почетное звание летчика-наблюдателя.

В 1916—1917 гг. А. А. возглавлял аэронавигационную службу на всех фронтах, читал лекции в Киеве, руководил (вместе с А. Ф. Гавриловым) вычислением баллистических таблиц. Уже в этот период его деятельности проявились его организационные способности, храбрость и то горение в работе, которое было так характерно для его дальнейшей жизни.

В 1918 г. Фридман заведует в Москве отделом авиационных измерений, затем получает назначение в Пермский университет для работы в качестве профессора механики. В 1920 г. он возвращается в Петроград, куда приезжают также профессора В. И. Смирнов, Я. Д. Тамаркин, Я. М. Безикович. Они читают лекции по различным вопросам математики. Фридман — по гидродинамике. В это же время и физики Ю. А. Крутков В. К. Фредерикс, В. Р. Бурсиан и П. И. Лукирский начали чтение лекций по квантовой механике, теории относительности и другим разделам теоретической физики. А. А. Фридман вступил с ними в тесный контакт, приглашал их делать доклады в Математическом обществе, что вызывало большой интерес и привлекало много народа. Сам он читал лекции по тензорному исчислению. Были организованы совместные семинары физиков, математиков и механиков.

Фридман очень быстро овладел теорией относительности и уже в 1922 г. написал книгу «Мир как пространство и время». В ней он знакомит широкий круг читателей с идеями принципа относительности, излагая их по возможности просто, но без дешевой популяризации. В этом же году вышла статья Фридмана о кривизне пространства (*Zs. Phys.*, 1922, т. 10). Эта работа в настоящее время расценивается очень высоко, и изложенная в ней теория считается важным шагом в изучении пространств космических масштабов (см. В. А. Фока. Теория пространства, времени и тяготения, 1961; см. также стр. 398—402).

Работая в контакте с физиками, Фридман и сам оказывал влияние на них: так, по его предложению Г. А. Гринберг провел исследование уравнений релятивистской гидродинамики.

К работе в отделе теоретической метеорологии Фридман привлек молодежь, в том числе Н. Е. Кочина, В. А. Фока и несколько старшего по возрасту Б. И. Извекова; позднее, в 1925 г. аспирантом Фридмана стал И. А. Кибель. Но Фридман не побоялся пригласить и совсем уже пожилого Льва Васильевича Келлера, работавшего раньше по статистике в области страхового дела и не имевшего имени в науке. Келлер провел в отделе крупные исследования по статистической теории турбулентности.

Фридман и Келлер ввели понятие моментов связи, т. е. математических ожиданий произведений пульсаций гидродинамических элементов в различных точках области движения и в различные моменты времени. Это дало возможность лучше уяснить физическую структуру турбулентности, а также, если пренебречь моментами связи третьего порядка, замкнуть систему уравнений турбулентного движения.

Фридман относился к числу начальников, которые хвалят своих подчиненных в присутствии других людей. Если его сотруднику удавалось получить интересный результат, Фридман не скупился на похвалы. Так, он пришел в полный восторг, когда Н. Е. Кочин нашел случай адиабатического движения, в котором происходит образование вихрей, и расто-

чая похвалы Кочину, добавил: «А я-то чесал правое ухо левой рукой» (в поисках решения вопроса о том, возможно ли образование вихрей без притока энергии).

Вообще самокритичность была свойственна Фридману, и он часто громко высказывал сожаление по поводу своих недостатков, действительных или мнимых. Со своими сотрудниками он установил такие отношения, при которых можно было делать замечания по его адресу, и он принимал их во внимание.

Однажды женщины отдела выразили Александру Александровичу свое возмущение тем, что в книге «Мир как пространство и время» в примере на арифметизацию он сопоставил свойству человека быть женщиной число 0, а мужчиной — число 1. Он обещал сделать наоборот во втором издании. Нужно отметить, что в отделе у Фридмана работали и женщины, и держал он их не только на «черной» работе.

Фридман заботился о своих сотрудниках. Так, когда была учреждена категория НУ — начинающих ученых, — он для получения дополнительного продовольственного пайка сразу же написал отзывы о работе каждого, кто только начал вести работу. А отзывы он умел писать очень быстро.

Правила бранить сотрудника при отсутствии свидетелей Фридман не придерживался. Наоборот, он имел обыкновение по экспансивности своего характера нарочно громко бранить отсутствующего (обычно речь шла об опоздании на работу, небрежном оформлении работы и т. п.) так, чтобы все слышали и с расчетом на то, что все будет передано провинившемуся.

Фридман обладал колоссальной трудоспособностью, был «ненасытен и жаден до работы» и умел передать энтузиазм другим. Он организовал семинар по динамической метеорологии, в котором принимали участие сотрудники и других отделов ГГО; все вычерчивали карты изобар, наносили на них линии фронтов, т. е. поверхностей разрыва метеорологических элементов, следили за перемещением циклонов и т. п.

Рабочих часов Фридману не хватало, и его ученики часто собирались у него на квартире для обсуждения различных вопросов. Все принимали участие в расчетах баллистических таблиц, к которым Фридман вернулся, чтобы внести в них различные уточнения. Все в той или иной мере были привлечены к изданию трудов А. М. Ляпунова, проверке и подготовке к печати оставшихся после его смерти обширных рукописей, а затем правке корректур.

В 1922 г. вышла в свет напечатанная литографским способом книга Фридмана «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», в которой заложены основы теоретической метеорологии.

Фридманом был поставлен вопрос о необходимости при изучении атмосферных движений рассматривать воздух как сжимаемую бароклинную

жидкость, т. е. такую, в которой давление не является функцией одной лишь плотности, но зависит и от температуры. При этом атмосфера получает от Солнца тепло и теряет его путем лучеиспускания в мировое пространство. И Фридман ставит своей задачей разработку фундаментальных общих вопросов гидродинамики сжимаемой жидкости.

Прежде всего он исследует кинематику вихревых движений. Как известно, для баротропной жидкости (т. е. такой, в которой давление есть функция только плотности) при консервативных силах имеют место теоремы Гельмгольца о том, что: 1) жидкая вихревая трубка при движении жидкости остается вихревой трубкой, состоящей из одних и тех же жидких частиц, и 2) напряжение вихревой трубки не меняется со временем. При указанных условиях имеет место также теорема В. Томсона о том, что производная по времени от циркуляции скорости равна циркуляции ускорения.

Фридман дает свои теоремы, представляющие обобщение теорем Гельмгольца и Томсона. Он показывает, в частности, что вторая теорема Гельмгольца может выполняться без удовлетворения условий первой. Вторая часть книги Фридмана посвящена динамике сжимаемой жидкости.

Отметим, что Фридман разбивал элементы движения на кинематические и динамические, понимая под первыми скорости и их производные, под вторыми — давление, плотность и температуру, а также их производные по координатам и времени. Из уравнений гидродинамики он выделил динамическую группу, т. е. уравнения движения и уравнение неразрывности, поставив такую задачу: найти условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости, другими словами, найти соотношения, представляющие необходимые и достаточные условия того, чтобы движение с заданным полем скоростей было возможно, т. е. чтобы можно было найти давление и плотность как функции координат и времени.

Для несжимаемой идеальной жидкости условия динамической возможности являются ни чем иным, как уравнениями Гельмгольца для вихря, получаемыми исключением давления из уравнений Эйлера.

Задаваясь тем или иным характером скоростей, во многих случаях оказывается возможным найти затем окончательные выражения для скоростей, а также определить давление и плотность. Фридман проиллюстрировал свою теорию рядом примеров.

В отдельной статье (Метеорологический вестник, 1921, т. 31) он применяет этот метод к особенно интересному с точки зрения метеорологических условий случаю циклона, ось которого помещается в пространстве.

Такого рода модели рассматривались в то время английскими учеными Рэлеем, Шоу, Гринем при сильных ограничениях: в предположении постоянства плотности и т. п.

Фридман изучает движения, в которых плотность является функцией давления и температуры, при действии силы тяжести и отклоняющей силы вращения Земли. Предполагается, что в каждой из горизонтальных плоскостей имеется центр вращения, положение которого зависит от времени и, следовательно, ось циклона (геометрическое место центров) перемещается и циклон движется по поверхности Земли, которая считается горизонтальной плоскостью. Угловая скорость вращения жидкости вокруг центра для всех высот считается постоянной, а вертикальная скорость — равной нулю.

Н. Е. Кочину было предложено обобщить эту модель циклона, считая угловую скорость зависящей от высоты и времени; полученные результаты значительно лучше, чем все предыдущие, приближаются к действительным циклонам и антициклонам. Фридман особо выделяет адиабатические движения из-за их относительной простоты, хотя атмосферные движения и не являются таковыми (в них большое значение имеет приток тепла). Из числа адиабатических движений он выделяет не изоэнтропические, для которых энтропия не постоянна во всей области движения, но ее полная, или индивидуальная, производная равна нулю; таким образом, каждая ее частица несет с собой постоянную энтропию, которая, однако, меняется при переходе от одной частицы к другой и в данной точке пространства может изменяться со временем.

Фридман выделяет также случай сжимаемой жидкости, в котором полная производная плотности по времени равна нулю и, следовательно, дивергенция скорости равна нулю; такой случай он назвал несжимаемым движением.

Фридмана очень интересовал вопрос о том, возможны ли адиабатические движения, в которых давление не есть функция плотности и, следовательно, происходит образование и разрушение вихрей. Этот вопрос был утвердительно решен Н. Е. Кочиным, построившим пример движения в виде вращения вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, зависящей от высоты, происходящего под действием лишь силы тяжести. Это движение оказалось несжимаемым, жидкость в нем — бароклиной и вихри — не обладающими свойством сохранения. Тем самым была показана возможность образования вихрей без притока энергии.

В статье, опубликованной после его смерти, Фридман дал приближенные условия динамической возможности движения. Совместно с Б. И. Извековым им были рассмотрены условия динамической возможности в координатах Лагранжа.

Учениками Фридмана был исследован ряд других моделей движения, представляющих интерес для метеорологии, и результаты Фридмана были обобщены на случай движения вязкой сжимаемой жидкости (Б. И. Извеков) и сжимаемой жидкости с заданным притоком тепла (И. А. Кибель).

В дальнейшем динамическая метеорология получила в Советском Союзе

широкое и разностороннее развитие. Я отмечу лишь некоторые работы представителей старшего поколения, не касаясь работ, развиваемых в настоящее время в Главной геофизической обсерватории.

А. А. Дородницыным, Б. И. Извековым и М. Е. Швецем были подведены итоги математической теории общей циркуляции атмосферы, И. А. Кибелем дан теоретический метод прогноза погоды, Е. Н. Блиновой развита гидродинамическая теория волн давления и центров действия атмосферы и заложена основа для долгосрочных прогнозов погоды. Теория лучистого теплообмена была построена Е. С. Кузнецовым, составившим уравнения переноса лучистой энергии.

Диапазон исследований Фридмана был очень широк. С самого начала научной деятельности его занимали основные вопросы теоретической геофизики: объяснение существования верхней инверсии, теория атмосферных вихрей и порывистости ветра, теория разрывов непрерывности в атмосфере, теория атмосферной турбулентности. Не чуждался он и разработки вопросов, имевших непосредственные приложения, вопросов рабочего характера. Так, в самом начале своей научной деятельности он составил инструкцию для обработки подъемов змейковых метеорографов.

А. А. Фридман был человеком живым и общительным, особенно если беседа касалась научных тем. Он принимал самое деятельное участие в приемах и немецкого физика П. Эрэнфеста, и голландского гидромеханика И. Бюрджерса, и итальянского ученого Т. Леви-Чивита, с которыми вел переписку. На эти встречи он приглашал своих сотрудников.

Фридман вступил в члены математического общества г. Палермо и ввел в него своих ближайших сотрудников. После смерти Фридмана эти сотрудники автоматически выбыли из членов общества и перестали получать журнал этого общества.

Несколько раз Фридман выезжал за границу: в 1922 г. в Германию и Норвегию, в 1924 г. в Дельфт (Голландия) на I Международный конгресс прикладной механики. На конгрессе Фридман доложил о своей с Келлером работе, о работе Кочина и упомянул о работах других своих сотрудников и некоторых советских механиков. Беседы Фридмана с другими учеными иногда приводили к их совместному творчеству. Так была написана его и Т. Хессельберга статья о порядке величин метеорологических элементов, совместные работы с Тамаркиным, Извековым, Келлером и другими.

В феврале 1925 г. Фридман стал директором Главной геофизической обсерватории. Несомненно, что он сделал бы очень много для развития ее, если бы преждевременная смерть не прервала его жизни, полной кипучей энергии.

А. А. Фридман скончался 15 сентября 1925 г. в возрасте 37 лет от брюшного тифа. «С ним отошла крепчайшая надежда теоретической метеорологии», — так сказал о нем директор Прусского метеорологического института профессор Фикер.

Незадолго до смерти, в июле 1925 г., Фридман совершил рекордный для своего времени полет на аэростате, достигнув высоты 7400 м, причем пробыл в воздухе 10 час. 20 мин. Пилотом был П. Ф. Федосеенко, погибший через несколько лет при полете на стратостате. Фридман считал, что для познания воздушной стихии и для наблюдения происходящих в ней явлений необходимо окунуться в нее самому.

Когда астронавты опустились вблизи деревни Окорки Новгородской области, они сделали доклад встретившим их крестьянам о значении своего полета. По возвращении в Ленинград Фридман вел переписку с комсомольцами деревни, членами Аэрорадиохима.

Фридман проявлял большой интерес к космическим проблемам, и мечта о возможности общения с другими мирами казалась ему осуществимой в недалеком будущем.

Мы уже видели, что в области теоретической метеорологии Фридмана занимали самые общие и глубокие вопросы. Это же относится и к его исследованиям в теории относительности. Его «расширяющаяся Вселенная» представляла лишь начало исследований, которые ему не суждено было продолжать. Н. М. Гюнтеру принадлежат хорошие слова о том, что «Фридман имел высокую душу исследователя вечных вопросов мироздания и благородный облик жреца чистого знания».

В тех областях, к которым относятся его работы, А. А. Фридман оставил яркий след — это сохранит его имя в науке.

### ВОСПОМИНАНИЯ О ФРИДМАНЕ <sup>69</sup>

*А. Ф. Гаврилов*

Публикуемые в настоящем издании письма А. А. Фридмана охватывают две полосы его жизни: участие в военных действиях русской армии в 1914—1915 гг. и профессорскую деятельность в Пермском университете в 1918—1919 гг.

Мне посчастливилось близко наблюдать этого удивительного человека в другие периоды его жизни: в студенческие годы, в первое время самостоятельной научной работы, в должностях начальника Центральной аэронавигационной станции (ЦАНС) в Киеве, директора завода «Авиаприбор» в Москве — до Октябрьской революции, а после революции, — когда он был профессором физико-механического факультета Ленинградского политехнического института им. Калинина и других высших школ в Ленинграде.

Мои воспоминания, относящиеся к этим промежуткам жизни А. А. Фридмана, может быть, окажутся небезынтересным дополнением к публикуемым письмам.

Математическое дарование А. А. Фридмана обнаружилось уже в гимназии. Я не знал его лично в это время; лишь по рассказам его и других

знаю, что интересовался он в это время теорией чисел. Эти интересы и привели его осенью 1906 г. на математический факультет Петербургского университета.

Это было время первой революции в России, когда после проигранной войны с Японией царское правительство чувствовало себя вынужденным идти на уступки негодующему и впервые почувствовавшему свою силу народу. Рабочие и интеллигенция подкрепляли свои требования забастовками, армия колебалась и не всегда была верна и послушна правительству. Почти вся молодежь была на стороне революции. Университет бурлил, студенты проводили половину времени на сходках, студенческие забастовки сопровождали борьбу народа с правительством. Александр Александрович, особенно на младших курсах, был деятельным участником студенческого политического движения.

Одновременно росла учебная и научная активность студенчества. Лекции читались нерегулярно, а во время забастовок и вовсе не читались. Экзамены сдавались по предметной системе круглый год без сессий, по записи, по мере подготовки. Эта система требовала самостоятельной работы студентов по учебникам, а нередко и по оригинальным монографиям и научным журналам. Она благоприятствовала возникновению студенческих кружков, которые росли, как грибы после дождя, и привлекали наиболее активных студентов.

На нашем факультете при живейшем организаторском участии Александра Александровича возникли кружки математический и физический. Много кружков было на естественном отделении факультета. Для удобства управления ими была создана «Межкружковая организация», председателем которой был выбран доцент В. Л. Комаров (ботаник, впоследствии академик и президент Академии наук СССР). Деятельным членом всех этих организаций был Александр Александрович. Я помню его доклад в одном из кружков «О каналах на Марсе», известия об открытии которых появились незадолго до этого. Под бурные аплодисменты молодой аудитории Александр Александрович закончил доклад словами: «Каналы появились почти внезапно, во всяком случае, они построены очень скоро. Не свидетельствует ли это, что на Марсе уже социализм?»

Математический кружок действовал регулярно до 1910 г., собрал интересную библиотеку и способствовал сближению студентов, интересовавшихся математикой. Деятельными его участниками были в это время (впоследствии почти все они сделались профессорами, а некоторые и академиками) Я. В. Успенский, Я. Д. Тамаркин, А. А. Фридман, В. В. Булыгин, Я. А. Шохат, А. Ф. Гаврилов, А. С. и Я. С. Безиковичи, В. И. Смирнов, Н. А. Агрономов.

Другим студенческим предприятием, которому Александр Александрович отдавал много времени, была издательская комиссия, которая записывала, редактировала и издавала литографским способом лекции, читав-



шиеся профессорами. Если мне память не изменяет, Александр Александрович составлял курсы дифференциального и интегрального исчисления профессора Д. Ф. Селиванова, теорию чисел профессора И. И. Иванова и (совместно с Я. Д. Тамаркиным) высшую алгебру профессора Ю. В. Сохоцкого. Издательская комиссия была выборной, имела комнату в Физическом институте университета, штат переписчиков, кассиршу.

Следует отметить, что ни в научных, ни в издательских делах студенты не имели ни малейшего руководства со стороны университета. Лишь к концу описываемого периода математический кружок не то сам избрал, по требованию ректора, не то получил по избранию совета факультета руководителя — профессора. Однако наш руководитель, профессор Селиванов, так ни разу и не появился на собраниях кружка. Правда, часть профессуры присматривалась к работе кружка и ряд его членов, в частности все перечисленные выше, по окончании университета были приглашены преподавать в технической высшей школе, другие были оставлены при университете (по нынешней терминологии — в аспирантуре).

Следует рассказать еще об одном мероприятии, идея которого принадлежала А. А. Фридману и которое оказало большое влияние на его участников. Зимой 1910/11 учебного года он предложил группе своих товарищей собираться по два раза в неделю для докладов о своей текущей работе, причем, в отличие от обычаев математического кружка, каждый должен был читать целый раздел науки по литературе с посильными дополнениями в течение двух-трех недель подряд. Организация эта оказалась жизнеспособной и действовала два года. Первым докладчиком был автор этих воспоминаний, излагавший теорию поверхностей по Бьянки и Дарбу, вторым — ныне академик В. И. Смирнов, читавший теорию функций комплексного переменного, третьим — А. А. Фридман, читавший теорию упругости, затем Я. Д. Тамаркин (теория потенциала), Я. А. Шохат (шаровые функции). Остальных не помню. Семинар этот способствовал выработке у нас умения читать книги и лекции, а также критически слушать и воспринимать лекции по математике. Совместные занятия сблизили их участников, а воспоминание о них принадлежит к лучшим воспоминаниям наших студенческих лет. Упомяну, что и этот семинар происходил без всякого руководства со стороны университета. Впрочем, в это время все его участники находились, так сказать, под неофициальным обаянием личности и трудов академика В. А. Стеклова, который впоследствии официально оформил этих студентов в качестве «оставленных» и учеников.

В студенческие годы, как, впрочем, и позже, Александр Александрович был неутомим в работе, которой отдавался целиком, забывая сон и отдых. Знания, которые он приобретал при подготовке к экзаменам и при самостоятельном чтении, не хранились в его памяти мертвым грузом. Он всегда умел применить их к решению задач, иногда в удивительно далеких обла-

стях. Может быть, здесь уместно будет вспомнить, что Александр Александрович одним из первых в нашем университете понял теоретическое и практическое значение интегральных уравнений, которые у старшего поколения математиков нашего времени не пользовались уважением.

А. А. Фридман имел редкие способности к математике, однако изучение одного только математического мира чисел, пространства и функциональных в них соотношений не удовлетворяло его. Ему было мало и того мира, который изучается теоретической и математической физикой. Его идеалом было наблюдать реальный мир и создавать математический аппарат, который позволил бы формулировать с должной общностью и глубиной законы физики и затем, уже без наблюдения, предсказывать новые законы.

Он остановился на изучении атмосферы, которая, как он говорил, представляет собой грандиозную лабораторию, для которой в математике подготовлен метод изучения в виде теории потенциала. Вскоре после окончания университета, сдав магистерские экзамены, Александр Александрович поступил на службу в Павловскую аэрологическую обсерваторию (так она, кажется, называлась). Он поселился в Павловске и весь погрузился в изучение методов наблюдения атмосферы, в динамическую метеорологию, синоптику, теорию земного магнетизма. Очень скоро появились предложенные им улучшенные и упрощенные методы обработки наблюдений. Он много думал об улучшении предсказаний погоды. Не довольствуясь шарами-пилотами, которые запускались тогда для наблюдений направления и скорости ветра в нижних слоях атмосферы, он стал мечтать о полетах на аэростатах и только что изобретенных тогда аэропланах на возможно большую высоту для изучения верхних слоев атмосферы, облаков, температурного, магнитного, электрического режима атмосферы. Летом 1914 г. разразилась война. Только что вернувшийся из поездки в Германию Фридман поступает добровольцем в авиацию. Стимулами этого были частью патриотизм, частью любопытство ученого, стремление применить свои знания атмосферы на пользу русской авиации. Одной из причин было также и то, что армия давала несравненно большие возможности разрабатывать и производить наблюдения, не осуществимые в условиях «мирной» науки. 1914 и 1915 гг. прошли в службе в строевых авиационных частях. Адресованные В. А. Стеклову и Б. Б. Голицыну письма этих лет являются ярчайшим человеческим документом, рисующим и нравы войны, и условия «научных занятий» рядового, потом ефрейтора и, наконец, прапорщика (первый тогда офицерский чин) Фридмана. Как и в мирное время, он целиком отдавался науке и службе, почти не замечая неудобств походной жизни и придавая мало значения чрезвычайно реальным опасностям боевых операций.

В первую мировую войну, на заре авиации летчик редко летал дольше нескольких месяцев; если он не был убит противником, если не случалось

смертельной аварии в воздухе (мог сдаться мотор, нарушиться регулировка тросов, поддерживавших крылья, и т. д.) или на земле при посадке (это называлось «капот»), то уже, наверное, летчик «терял сердце», как тогда говорили. Летчики становились механиками, заведовали складами, преподавали в школах.

Фридман вышел из довольно долгой строевой службы без ранений, хотя и с боевыми орденами. Здоровье его, однако, пострадало. Выдающийся теоретик воздушной артиллерии, знаток аэрологии и службы погоды, Фридман обратил на себя внимание начальства: он получил без окончания школы звание летчика-наблюдателя (золотой орел на погонах) и был назначен преподавателем школы летчиков-наблюдателей, только что организованной в Киеве. Одновременно он был причислен к «штабу авиации», который находился, как тогда называлось, при «августейшем заведующем авиацией» великом князе Александре Михайловиче, дяде Николая II.

А. А. Фридману было поручено привести в порядок снабжение авиационных воинских частей специальной измерительной аппаратурой (компасы, высотомеры и высотографы, уклонометры, тахометры и анемометры), а также аппаратурой для бомбометания с самолетов (прицельные приборы и бомбосбрасыватели) и для прицельной стрельбы с самолетов по движущимся целям (самолетам). Лишь немногие из перечисленных приборов были в то время в продаже; производились они лишь за границей. Они были разнотипны и очень несовершенны. Особенно плохо было с приборами воздушной артиллерии.

По докладу Александра Александровича, ему было поручено:

- 1) выяснить, какие из аэронавигационных приборов имеются на вооружении нашей авиации;
- 2) составить их научно-техническое описание;
- 3) исследовать их с эксплуатационной и производственной стороны;
- 4) составить нечто вроде теории аэронавигационных и аэробаллистических приборов, которая позволила бы приступить к проектированию и производству этих приборов.

Для выполнения поставленных задач необходимы были люди, научные лаборатории, мастерские, а в перспективе — специально оборудованный завод.

А. А. Фридман в этом новом для него деле сумел составить отличные организационные схемы.

В 1916 г. при штабе авиации в Киеве была организована Центральная аэронавигационная станция (ЦАНС) под начальством Фридмана. В ее состав входили вычислительное бюро, склад приборов с музеем, мастерская для ремонта приборов и изготовления опытных экземпляров, метеорологическая станция на военном аэродроме в Дарнице и самолет при ней для испытания приборов. Крайне немногочисленный личный состав всех

этих отделов был назначен из числа офицеров, технических чиновников и солдат, которые были известны Александру Александровичу или были ему рекомендованы. Дело было новое, авиация была новым видом техники. Измерительная аппаратура в ней — аэронавигационные и аэробаллистические приборы — была еще менее известна. Людей, которые знали бы эту технику, не было, да и не могло быть. Персонал станции пришлось формировать из теоретиков — математиков, астрономов, физиков — и из инженеров разных специальностей, способных овладеть новыми для них видами техники. Надо было пробудить в них интерес к новому делу, и это почти всегда удавалось А. А. Фридману.

С тех пор прошло сорок лет, острота впечатлений притухла, но тем больше восхищение, которое я испытываю, вспоминая искреннее увлечение, деловую горячность, готовность жертвовать своими интересами и даже жизнью — черты, которые отличали почти весь персонал ЦАНСа.

Две поговорки часто повторял тогда Александр Александрович: «И поелику ты ни холоден, ни тепл, ввергнут будешь в геенну огненную» (из Данте) и «Он талантливый человек — не учась знает». Что знали мы при организации ЦАНСа? Кто математику и теоретическую механику, астрономию, физику, кто инженерное дело по механике или строительству дорог, кто слесарное дело по бытовому ремонту. Были часовщики, бухгалтеры, юрист, агроном, чертежник, художник, студенты.

Вот что было сделано менее чем за год:

1) вычислены (впоследствии напечатанные) таблицы прицельного бомбометания с самолетов (при употреблявшихся тогда параметрах);

2) отремонтирован в специально организованных мастерских весь парк приборов, имевшихся в армии, с модернизацией высотомеров;

3) составлен вчерне проект производства всех приборов;

4) таблицы бомбометания проверены опытным бомбометанием на аэродроме в Севастополе; отчет впоследствии напечатан;

5) спроектированы и построены прицельный прибор и бомбосбрасыватель, испытанные в Севастополе;

6) составлен проект завода в Москве для производства аэронавигационных приборов с собственной аэродинамической трубой, лабораториями, литейной и механической мастерскими;

7) подготовлено около ста аэронавигаторов для строевой авиации и сделаны некоторые исследования по аэрофотосъемке.

Результаты эти устарели, приборы теперь несравненно лучше. Большинство участников этих дел уже нет на свете. Но интересен сам пример, доказывающий, чего можно достичь, когда люди горят желанием делать свое дело как можно лучше, сделать как можно больше, когда они не грешат равнодушием, когда они «не учась знают».

В середине 1917 г. ЦАНС со всем личным составом, с лабораторией, мастерскими, вычислительной, метеорологической и аэрологической стан-

диями и складом приборов переехал в Москву, где к этому времени военное ведомство приобрело и переоборудовало под завод «Авиаприбор» Грузинские бани.

В нашем распоряжении оказалось несколько корпусов, в самом большом из которых были размещены мастерские ЦАНСа, дополненные новым оборудованием. В одном доме разместился вновь организованный научно-технический отдел (с автором этих строк во главе). Большой деревянный дом был отведен под управление завода, технический отдел, хозяйственную часть.

Организован был также совет завода в составе дирекции и начальников отделов — совещательный орган при директоре для рассмотрения важнейших вопросов работы завода.

Завод должен был производить измерительную аппаратуру для авиационных моторов, аэронавигации, бомбометания и стрельбы с самолетов. Выбор приборов и их типы, как и технология их изготовления, должен был быть установлен заводом. Научно-технический и технический отделы должны были подготовить необходимые материалы. К делу приступили, не теряя ни одного дня. Были организованы лаборатории для выработки методов изготовления магнитных стрелок для компасов, тарированных пружин для разных приборов, построена небольшая модель аэродинамической трубы с комнатой Эйфеля для измерений (новость в то время), заказана большая труба диаметром 2 м в рабочей части и скоростью до 100 м/сек. При проектировании трубы нас охотно и, конечно, с большой для нас пользой консультировал профессор Н. Е. Жуковский, который уже построил десяток аэродинамических труб, работавших в механических лабораториях университета и Высшего технического училища.

В научно-техническом отделе было сделано несколько теоретических исследований специальных задач с воздушной артиллерией и с малыми колебаниями стрелок указателей приборов. Начат был ряд других исследований. Технический отдел под руководством С. Д. Богословского готовил чертежи приборов, которые надлежало делать в первую очередь.

Любопытно было наблюдать, как росли практические знания А. А. Фридмана; он приобретал их в области прикладной механики, технологии, бухгалтерии, формы учета труда. Он налету схватывал советы консультантов и удачно применял их указания в аналогичных случаях. Он интересовался теоретическими исследованиями научно-технического отдела и новыми моделями приборов, предлагавшимися к производству. В эти месяцы времени для занятий математикой, конечно, не хватало.

Так шло до Октября. После Октябрьской революции начался спад деятельности завода. Советское правительство не было тогда заинтересовано в развитии военной техники. Завод был законсервирован, а личный состав, и Александр Александрович в том числе, перешел на другую работу. Че-

рез несколько лет завод был восстановлен, однако работали на нем уже другие люди.

Уйдя с завода, А. А. Фридман вернулся к научной работе и преподаванию и был вскоре выбран «экстраординарным», как тогда для молодого ученого полагалось, профессором Пермского государственного университета по кафедре теоретической механики.

Судьбы Пермского университета во время гражданской войны и по окончании ее ярко описаны в письмах Александра Александровича. Читатель, однако, лучше поймет эти места переписки, если познакомится с историей этого университета.

Пермский университет не принадлежал к старым русским университетам, существовавшим до революции в Петербурге, Москве, Казани, Харькове, Киеве, Одессе, Саратове, Томске, Варшаве, Гельсингфорсе. К его организации приступили, кажется, во время войны 1914—1918 гг. по инициативе богатого пермского купца, владельца пароходств, заводов и даже железной дороги, Николая Васильевича Мешкова, который предложил правительству городок домов, построенных им вблизи Перми, на Заимке, и некоторые средства (размеры которых мне неизвестны) для устройства в Перми нормального по составу факультетов и студентов университета. Правительство приняло предложение и поручило Петроградскому университету выделить необходимый преподавательский состав. Я не знаю, содержало ли предложение Н. В. Мешкова какие-либо условия или пожелания относительно деятельности будущего Пермского университета, однако из нескольких разговоров с ним в Москве, где он жил летом 1918 г., могу заключить, что он рассчитывал на развитие или оживление силами университета географических, этнографических и экономических исследований бассейна Камы и Печоры.

На деньги, полученные мною от Мешкова, я, тогда еще не оформленный преподаватель Пермского университета, закупил и отправил в Пермь, где уже находился А. А. Фридман, оборудование для механического кабинета университета. Мешков также приглашал меня принять участие в научной экспедиции по Печоре; в экспедиции должен был быть самолет, который летал бы над тайгой и выбирал пути для экспедиции. План был более чем смелый при тогдашнем состоянии авиации, однако небольшой гидросамолет, возможно, и мог бы работать летом в условиях экспедиции. После Октябрьской революции Мешков потерял, конечно, влияние на дела Пермского университета, однако идеей Печорской экспедиции заинтересовались пермские власти, и я, еще будучи в Москве, по поручению Пермского университета отстаивал смету на эту экспедицию в Малом Совнаркоме. Кажется, экспедиция не состоялась.

К моменту избрания А. А. Фридмана профессором механики Пермский университет имел уже нескольких молодых профессоров математики, в том числе нашего товарища по университету, неоднократно упоминаемого в

письмах Фридмана А. С. Безиковича. Профессором физики был Г. Г. Вейхардт, также бывший студент Петербургского университета.

После окончания гражданской войны, осенью 1919 г., Александр Александрович был назначен (уже Советским правительством) проректором университета по учебным делам. Появились новые заботы об обеспечении университета профессорами и преподавателями на место ушедших с Колчаком (подробно об этом говорится в письмах А. А. Фридмана В. А. Стеклову)\*.

Летом 1920 г. А. А. Фридман возвратился в Петроград. Последние пять лет жизни этого удивительного человека были полны буквально самозабвенного труда в новых областях и с новыми головокружительными успехами.

Отметим вкратце главное направление его деятельности в это время. Избрание Александра Александровича профессором вновь организованного физико-механического факультета Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина дало ему превосходное поприще для преподавательской деятельности в области теоретической механики. Короткий срок не дал школе Фридмана возможности окрепнуть. Однако своими лекциями и темами для самостоятельных занятий он успел произвести сильное впечатление на многих талантливых студентов. Одновременно он читал интереснейшие лекции по механике в Военно-морской академии им. А. Н. Крылова. Продолжением технических увлечений Фридмана был курс теории и проектирования аэропланов, который он читал в Ленинградском институте инженеров путей сообщения (теперь — Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта). Следует отметить редкую добросовестность, с которой он готовился ко всем лекциям, текст которых он всегда писал заранее, тщательно вырабатывая и продумывая все чертежи, буквенные обозначения, систематичности которых он придавал важное значение, детали вычислений, порядок величин, знание которых могло быть полезно при упрощении задачи для приближенного ее решения.

Диссертация «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», о которой так часто говорится в письмах, была закончена и блестяще защищена в Ленинградском университете. Эта работа, представленная к защите в литографированном виде в небольшом числе экземпляров, впоследствии (уже посмертно) была напечатана и явилась первым капитальным исследованием в этой области. Писалась она в 1920 г. в Ленинграде с быстротой просто невероятной. Александр Александрович как-то сказал мне: «Пишу в среднем шестнадцать страниц в день, слог получается средний».

Фридман был увлечен математической частью теории относительности Эйнштейна. За короткий срок появилось несколько его статей с анализом

---

\* См. стр. 348—363.

возможности существования миров («пространство — время») постоянной положительной и отрицательной кривизны. Попутно Фридман заметил и исправил ошибку самого Эйнштейна, который после небольшой переписки признал справедливость возражения Фридмана. Одновременно он опубликовал изложение теории Эйнштейна, доступное для читателя со сравнительно небольшой математической подготовкой (брошюра «Мир как пространство и время»), и совместно с профессором В. К. Фредериксом приступил к составлению обстоятельного изложения теории относительности в четырех томах (вышел только первый том).

В 1923 г. по предложению военного ведомства Фридман совместно с автором этих строк продолжил и модернизировал вычисленные ранее в ЦАНСе таблицы бомбометания с самолетов. Работа выполнялась многочисленным коллективом вычислителей, специально организованным в Ленинграде.

В 1921 г. Фридман был одним из организаторов ленинградского Физико-математического общества. Членом правления общества он оставался до смерти. Фридман придавал большое значение деятельности общества, заседания которого способствовали не только сближению его членов, но и сближению научных идей и применению методов, выработанных в одних разделах науки, к исследованиям в других областях. При всей своей занятости он почти не пропускал заседаний общества.

В последние пять лет своей жизни Александр Александрович энергично работал в области геофизики, точнее физики атмосферы. Я не пишу научной биографии А. А. Фридмана. Было бы невозможно в этих кратких воспоминаниях, являющихся комментарием к переписке, останавливаться более подробно на столь же широких, сколь и смелых и тонких исследованиях Фридмана в труднейшей области математической аэрологии. Эти работы, сколько можно судить, заслуживают переиздания под авторитетной редакцией с соответствующими комментариями и дополнениями. Они изложены в статье одного из сотрудников Фридмана в этой области, Б. И. Извекова, написанной в 1925 г. для «Геофизического сборника» и опубликованной, кажется, в 1927 г.

И в этих работах А. А. Фридман не остается только математиком. Он опять ищет путей непосредственного наблюдения атмосферы. В 1924 г. он поднимается с научными целями на воздушном шаре, управляемом летчиком Федосеенко. Полет этот, по тому времени рекордный по высоте (7400 м), дал, по отзывам специалистов, важные результаты. Он сопровождался драматическими подробностями, описанными в печати тов. Федосеенко. А. А. Фридман и в зрелые годы берег себя так же мало, как и в молодости.

Завершением энергичной научной и организационной деятельности Александра Александровича в этой области явилось назначение его в 1925 г. директором Главной геофизической обсерватории. Молодой ди-



ректор имел все данные, чтобы развить в обсерватории блестящую деятельность. Смерть оборвала его начинания.

Занятия принципом относительности, а также вопросами теоретической и практической метеорологии способствовали сближению Фридмана с зарубежным ученым миром. Не удивительно, что неожиданная ранняя смерть его — от брюшного тифа на 38-м году жизни — произвела потрясающее впечатление не только на его друзей, не только на ленинградских ученых, товарищей, лично знавших покойного, но и на иностранцев, прославивших свои соболезнования (проф. Л. Лихтенштейн, проф. Фикер и др.). Председатель ленинградского Физико-математического общества проф. Н. М. Гюнтер свою речь, посвященную памяти А. А. Фридмана и произнесенную на заседании общества 26 сентября 1925 г., через десять дней после смерти Фридмана, закончил словами: «Страшно думать о тех возможностях, которые таились в Александре Александровиче и которые не осуществятся из-за нелепой случайности».

Его жена, Екатерина Петровна Фридман, всю жизнь неизменно участвовала в трудах Александра Александровича, неутомимо проверяя бесчисленные корректуры его работ и заботясь о быте этого полного мыслей, не жалевшего себя в труде и некрепкого здоровьем человека. Екатерина Петровна пережила мужа лет на двенадцать. Она присутствовала на заседаниях в Геофизическом обществе и в Ленинградском политехническом институте им. Калинина, на которых в 1935 г. — в десятилетнюю годовщину смерти А. А. Фридмана — была отмечена его память. Профессор Кибель в своей речи говорил о его работах в области геофизики, автор этих строк — о работах в области техники. Перу Екатерины Петровны принадлежит превосходная статья, полная понимания характера Александра Александровича, напечатанная в выпуске «Геофизического сборника» за 1927 г., посвященном памяти А. А. Фридмана.

### **ЖИЗНЬ И НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО АЛЕКСАНДРА АЛЕКСАНДРОВИЧА ФРИДМАНА 1888—1925 гг.**

*Л. С. Полак*

Александр Александрович Фридман прожил всего тридцать семь лет, и из них только пятнадцать лет, после окончания С.-Петербургского университета, он смог заниматься научным трудом.

За это время А. А. Фридман так много создал, что даже простой перечень его работ вызывает удивление. Изумительная по разнообразию интенсивная научная деятельность Фридмана нашла отражение в целом ряде некрологов и статей, опубликованных после его смерти в русских и иностранных журналах. В них видна искренняя душевная боль, вызван-

ная преждевременной кончиной замечательного ученого. В. А. Стеклов \* Н. М. Гюнтер и другие говорили о невозполнимой утрате, понесенной отечественной наукой.

«Крепчайшая надежда теоретической метеорологии отошла с ним»,— писал после его смерти директор Прусского метеорологического института профессор Г. Фикер\*.

«Человек выдающегося математического дарования, он продуманно стремился сам проверить экспериментально полученные результаты. Он был всецело предан науке; отдаваясь целиком работе, он умел заставлять работать и увлекаться работой своих коллег»,— так писали о нем в некрологе, помещенном в английском журнале «Nature» за декабрь 1925 г.\*\*

А. А. Фридман был исключительно трудоспособен и трудолюбив. «Я работолюбивый»,— говорил он о себе. Для всего он находил время и работал, буквально не отличая дня от ночи. С 1920 по 1925 г. он работал в Институте инженеров путей сообщения, в Университете, в Политехническом институте, в Морской академии и в Морском инженерном училище, совмещая все это с работой в Главной геофизической обсерватории. Когда в 1922 г. он работал над своей диссертацией «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», то писал по шестнадцать страниц в день.

В этом человеке органически сочетался ученый-романтик, мечтавший о возможности сообщений в недалеком будущем с другими планетами и мирами, и ученый-практик, наделенный большим организаторским талантом.

Александр Александрович Фридман родился в С.-Петербурге 17 июня 1888 г. Девяти лет его отдали в подготовительный класс Второй гимназии, которую он окончил в 1906 г. с золотой медалью. Математические способности Фридмана проявились очень рано. «Еще в детстве,— вспоминает его вдова, Е. П. Фридман,—для него было придумано самое строгое наказание: его оставляли без уроков арифметики». Еще будучи в гим-

\* Meteorol. Z., 1925, Bd. XLII, H. 11. S. 5, 440.

\*\* Nature, 1925, 116, N 2929, p. 908. Приведем еще некоторые высказывания иностранных ученых в связи с кончиной А. А. Фридмана. Письма и телеграммы были получены от всех крупных геофизических институтов Европы и Америки, во всех них проходит мысль, которая выражена проф. Нердингом, президентом Международного метеорологического комитета, в следующих словах: «Смерть Фридмана является потерей не только для Главной физической обсерватории, но и для всей метеорологии». Геофизический институт в Лейпциге, где покойный работал у проф. Бьеркнеса, «всегда с гордостью называл Фридмана своим сотрудником». Проф. Хессельберг, директор Метеорологического института в Христиании: «Он был моим личным другом, с которым я был связан общей работой, и я знаю лучше, чем большинство других ученых, какую утрату нанесла его смерть Главной физической обсерватории. Выдающиеся ученые заслуги делают его смерть огромной потерей и для науки. Он был одним из величайших когда-либо живших метеорологов-теоретиков, и имя его никогда не умрет». Шоу: «Смерть так рано прервала жизнь, столь много обещавшую» («Климат и погода», 1925, № 2—3, стр. 77).

назии, А. А. Фридман со своим товарищем, Я. Д. Тамаркиным (ставшим впоследствии известным математиком), послали за границу совместную работу, которая в 1906 г. была опубликована в Германии в журнале «*Mathematische Annalen*»; эта работа получила похвалу великого Д. Гильберта, что весьма почетно для гимназистов.

Благодаря любезному сообщению М. Н. Киреевой, мы знаем теперь, что в 1905—1906 гг. А. А. Фридман принимал активное участие в революционном движении, входя в ЦК ученической организации при Петербургском комитете РСДРП с с конца 1905 г. по март 1906 г. Его партийная кличка была „Лиловый“\*.

В 1906 г. А. А. Фридман поступил на математическое отделение физико-математического факультета С.-Петербургского университета. Занимаясь в университете, Фридман написал ряд научных работ, из которых одна — «Исследование неопределенных уравнений второй степени» (1909 г.) — была удостоена факультетом золотой медали.

При факультете интенсивно работал математический кружок, в котором принимали участие Я. В. Успенский, Я. Д. Тамаркин, В. В. Булыгин, Я. А. Шохат, А. Ф. Гаврилов, А. С. Безикович, Я. С. Безикович, В. И. Смирнов, Н. А. Агрономов.

В 1910 г. после окончания университета А. А. Фридман был оставлен профессорами В. А. Стекловым и Д. К. Бобылевым на кафедре чистой и прикладной математики для подготовки к профессорскому званию. Осенью этого же года Советом Института инженеров путей сообщения в Петербурге А. А. Фридман был избран на должность руководителя практических занятий студентов по высшей математике. А еще через два года он был приглашен Советом Горного института читать лекции по дифференциальному исчислению.

В 1911 г. А. А. женился на Екатерине Петровне Дорофеевой, которая всю жизнь была ему верным товарищем и помощником.

До весны 1913 г. Фридман занимался почти только математикой. В 1913 г. он поступил физиком в Аэрологическую обсерваторию в г. Павловске, где работал в области аэрологии и динамической метеорологии.

Осенью 1913 г. он сдал экзамены на степень магистра чистой и прикладной математики в Петербургском университете и в осеннем семестре начал читать курс лекций приближенных вычислений в Институте инженеров путей сообщения.

Основную роль в научном творчестве А. А. Фридмана играют проблемы гидродинамики сжимаемой жидкости и турбулентности динамической метеорологии, физики атмосферы и релятивистской космологии.

Какими бы вопросами он ни занимался, он всегда стремился сформу-

\* С. Д и а н и н. Революционная молодежь в Петербурге 1897—1917 гг. Прибой, Л., 1926, стр. 52, 65, 71, 74, 81.

лизовать математически задачу и решить ее, доведя решение в нужных случаях до числовых значений, допускающих экспериментальную проверку\*. Его блестящий математический дар открывал ему возможность решения трудных задач, хотя, как он сам юмористически выражался, он часто только думал о том, «нельзя ли чего откинуть» в интересовавших его уравнениях, не нарушая физического смысла задачи.

В 1914 г. А. А. Фридман напечатал в «Геофизическом сборнике» Главной физической обсерватории статью «О распределении температуры воздуха с высотой», в которой теоретически рассматривал вопрос о существовании верхней инверсии температуры (в стратосфере). Существование верхней инверсии температуры было обнаружено впервые Тейсеран де Бером в 1905 г. Долгое время не удавалось подойти к объяснению этого факта, и лишь в 1909 г. появилось первое теоретическое объяснение, предложенное одновременно Гемфризом и Голдом \*\*. Однако они только нащупали решение этой проблемы, поставив ее как задачу о лучистом равновесии атмосферы при определенных предположениях относительно земного и солнечного излучений и поглощательной способности земной атмосферы.

В 1906 г. Шварцшильд \*\*\* записал систему дифференциальных уравнений гидродинамики и притока лучистой энергии, предполагая коэффициент поглощения атмосферы постоянным, т. е. не зависящим от высоты и длины волны лучистой энергии. Однако решение Шварцшильда, как вскоре выяснилось, основано на таких предположениях, которые противоречат действительности (они приводят к изотермической атмосфере).

Следующий предшественник Фридмана, Эмден \*\*\*\*, сделал предположение, что излучение, падающее на атмосферу, состоит из лучей различной длины волны. Он рассмотрел два значения этого коэффициента: одно для больших длин волн, а другое для малых. При таких допущениях Эмден решает задачу для равновесного состояния атмосферы. Градиенты температуры, полученные Эмденем, довольно хорошо совпадают со средними градиентами, полученными из аэрологических наблюдений, и действительно приводят к существованию верхней инверсии, но чрезмерно велики вблизи земной поверхности. Это обстоятельство навело А. А. Фридмана на мысль, что равновесие в нижних слоях атмосферы не имеет места и нарушается вертикальными течениями. В своей работе он попытался опреде-

\* Удивительно точно звучит определение таланта, часто повторявшееся Фридманом: «Он талантливый человек — не учась знает».

\*\* Cold E. The isothermal layer of the atmosphere. — Proc. Roy. Soc., 1909, 82; Humphreys W. Y. Vertical temperature-gradient of the atmosphere. — Astrophys. J., 1909, 59, стр. 14.

\*\*\* Schwarzschild K. Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. — Göttinger. Nach. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl., 1906.

\*\*\*\* Emden R. Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. — Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss. München, math.-phys. Kl., 1913.

лить распределение температуры при этом предположении. Задача сводится к сложному дифференциальному уравнению, которое не удается интегрировать в конечном виде, но соответственным образом преобразованные дифференциальные уравнения интегрируются бесконечными рядами, расположенными по степеням некоторого параметра. Фридман построил эти ряды, определив коэффициенты разложения, и дал способ вычисления этих коэффициентов в первом приближении, но он не мог в то время доказать сходимости рядов. Результаты вычислений температурных градиентов были им сопоставлены с данными наблюдений. Они оказались близкими к действительным градиентам у поверхности Земли, но резко отличались от градиентов в высоких, близких к стратосфере, слоях атмосферы.

В 1920 г. Фридман снова вернулся к этой проблеме. Он указывает другой, более простой способ разложения в ряды, что дает ему возможность доказать сходимость используемых им рядов\*.

Работы по динамической метеорологии занимают существенное место в научном наследии А. А. Фридмана. Он смотрел на теоретическую метеорологию как на самое важное практическое приложение того раздела теоретической механики — гидродинамики сжимаемой жидкости, — который он разрабатывал. Однако его интерес к динамической метеорологии не был только интересом математика-теоретика. Наука об атмосфере привлекала его своими богатыми и сложными проблемами, своими многочисленными, до сих пор не разрешенными загадками.

Вопросы, которыми занимался Фридман, являются основными в динамической метеорологии: теоретическое объяснение существования верхней инверсии, теория атмосферных вихрей и порывистости ветра, теоретическая модель циклона, теория разрывов непрерывности в атмосфере, наконец, теория атмосферной турбулентности.

Весной 1914 г. Фридман был командирован директором Главной физической обсерватории, академиком Б. Б. Голицыным, в г. Лейпциг для ознакомления с методами выдающегося ученого-метеоролога проф. Бьеркнеса. Летом этого же года А. А. Фридман принял участие в полетах на дирижаблях с целью разработки и подготовки мероприятий для производства аэрологических наблюдений, которые должны были состояться во время полного солнечного затмения в августе 1914 г.

Главными темами, которые разрабатывались тогда школой Бьеркнеса, были преимущественно темы кинематического характера, а именно: построение карт давления на различных высотах (задача статики атмосферы и задача построения карт линий тока воздушных течений). Что же касается динамики атмосферы, то в этой области Бьеркнес был автором названной его именем теоремы о количестве возникающих внутри жидкого контура вихревых трубок. Многие метеорологические приложения этой теоремы

\* См. стр. 135 и далее.

с учетом отклоняющей силы вращения Земли были сделаны Бьеркнесом и его учениками, в особенности Сандстромом; но это были скорее лишь отдельные этюды по динамике атмосферы.

Школа Бьеркнеса развивала его фронтологический метод, в котором изменение погоды связывалось с появлением фронтов разрыва температуры и других метеорологических элементов.

В Лейпциге установились дружеские отношения А. А. Фридмана с Т. Хессельбергом; вместе с ним он написал статью\*, в которой исследовал порядок величины различных метеорологических элементов и их производных по времени и координатам. Эти исследования о порядке величин, входящих в уравнение гидродинамики, показали, что в уравнении неразрывности в случае атмосферных процессов можно пренебречь первым членом по сравнению со вторым, причем делаемая ошибка не превосходит 1%. А это означает, что можно пользоваться уравнениями гидромеханики идеальной жидкости.

Одним из результатов работы в Лейпциге явилась научно-популярная статья Фридмана «Значение линий тока для воздухоплавания»\*\*, в которой дается ряд практических указаний пилотам, как пользоваться картой линий тока для уменьшения полетного времени.

С началом войны, осенью 1914 г., А. А. Фридман поступил в добровольческий авиационный отряд, где работал сначала на Северном фронте, близ г. Осовца и г. Лыка, а затем и на других фронтах над организацией аэрологических наблюдений и аэронавигационной службы.

Будучи на фронте и подвергаясь большой опасности (он многократно участвовал в качестве летчика-наблюдателя в боевых полетах), А. А. Фридман не оставлял своих научных занятий. Сохранилось несколько его писем к Б. Б. Голицыну, написанных в 1914—1915 гг., а также большое количество писем к В. А. Стеклову за период с 1910 г. почти до конца жизни А. А. Фридмана. Из этих писем, хранящихся в Архиве АН СССР, видно, как в самый разгар войны он думал о применении найденных методов для мирных научных целей. «Вероятно, удастся провести через Ставку Верховного (Главкомандующего.— Л. П.) штаты для аэрологических станций в ротах и отрядах. Мне кажется, что правильная организация этого дела могла бы после войны в обсерватории оказать соответствующее содействие»\*\*\*, — писал Фридман Голицыну. Он сообщал своим корреспондентам получаемые им научные результаты, делился с ними планами, описывал наиболее интересные полеты, проявлял неизменный интерес к научной работе друзей. С присущим ему чувством юмора Фридман описывал боевые вылеты и опасности, которым систематически подвергался.

\* См. стр. 371.

\*\* Фридман А. А. Техника воздухоплавания, вып. 6—8. Пг., 1914, стр. 246—258.

\*\*\* См. стр. 327.

«Сегодня летает Фридман», — говорили немецкие солдаты в осажденном Перемышле, когда бомбы ложились точно по намеченным целям.

И всегда, всегда новые идеи и планы, связанные с наукой. «Я думаю по окончании своей аэрологической миссии поучиться летать: вещь эта ... может быть с огромным успехом применена к метеорологии, а особенно к синоптике», — пишет он В. А. Стеклову. А пока шла война, А. А. Фридман вычислял углы метания бомб с аэроплана и проверял свои вычисления на практике. «Мне самому довелось проверить свои соображения во время одного из полетов над Перемышлем. Оказалось, что бомбы падают почти так, как следует по теории»\*. По свидетельству профессора Фикера, единственное удачное попадание, наблюдавшееся им, было сделано именно А. А. Фридманом.

Вот условия, в которых он летал:

Выписка из журнала полетов 14 июня 1915 г., аэроплан «Шнейдер» \*

| Время | Событие   | Замечания                                                       |
|-------|-----------|-----------------------------------------------------------------|
|       | Подъем, м | З, А. — внизу ветер                                             |
|       | 200       | Болтает                                                         |
|       | 550       | Сильно болтает                                                  |
|       | 1070      | Болтает меньше                                                  |
|       | 1070      | Болтает                                                         |
|       | 1100      | Болтает                                                         |
|       | 1300      | Очень сильно болтает                                            |
|       | 1330      | Летит «Буазен», похожий на сковородку                           |
|       | 1430      | Проносится «Буазен» боком, идем на разведку, в воздухе спокойно |
|       | 1900      | Встретили немецкий аппарат, летящий к Днестру                   |
|       | 1800      | Обстрел, 17 шрапнельных разрывов около аппарата                 |
|       | 1800      | Видны 2 немецких аппарата                                       |
|       | 2100      | Обстрел пулеметом с немецкого аппарата, отвечаем из «Маузера»   |
|       | Спуск     |                                                                 |

\* А. А. Фридман. Об атмосферных вихрях. — Геофизический сборник, 1916, 3, вып. 1, стр. 117.

Война не приостановила научную деятельность Фридмана. На фронте, в боевой обстановке он не оставляет начатого им исследования воздушной стихии. По-прежнему в центре его внимания стоят две большие темы: исследование природы атмосферных вихрей и вертикальных воздушных течений. В 1916 г. в третьем томе «Геофизического сборника» появляется работа А. А. Фридмана об атмосферных вихрях \*\*. Работа эта особенно

\* См. стр. 341.]

\*\* См. стр. 369.

интересна тем, что в ней затронуто и связано много вопросов, которые потом разрабатывались Фридманом как отдельные темы. В этой работе он, опираясь на работы Бьеркнеса и его школы, утверждает, что в динамике атмосферных процессов особенно важную роль играют вихри с горизонтальной осью, а не с вертикальной, как это считали раньше метеорологи. В настоящее время эта точка зрения прочно обоснована как аэрологическими наблюдениями, так и теоретическими исследованиями.

Позднее, в 1920 г., А. А. Фридман вновь вернулся к этому вопросу и строго доказал, что в атмосфере под действием консервативных сил могут возникать только вихри с горизонтальной осью. Правда, вертикальные вихри могут возникать под действием диссипативных сил трения и отклоняющей силы вращения Земли, но эти причины являются второстепенными и лишь несколько ослабляют действие вихрей с горизонтальной осью.

Для применения аэрологии к авиации в военной обстановке была необходима густая сеть станций, наблюдающих атмосферу. А. А. Фридман занимается созданием таких станций и организует курсы для обучения наблюдателей, занимается покупкой приборов и, преодолевая инертность руководителей авиации, приступает к постройке завода авиационных измерительных приборов. А. А. Фридман никогда ранее не занимался прикладной механикой, а тем более заводской деятельностью. Он внимательно изучает новую отрасль производства, советуется со специалистами и принимает смелые решения.

Летом 1917 г. его назначают временно заведующим отделением первого в России завода авиационных измерительных приборов, и он занимается организацией научно-технического и других отделов завода, а также временно руководит заводом в качестве директора.

«Моя «военная жизнь» оставила мне наследство в виде тяжелой (хотя, кажется, и временной) сердечной болезни, которая в данный момент не дает мне возможности много двигаться...» «Я отклонил недавно предложение ответственного места...; ... я так измучился, что с удовольствием согласился бы быть сторожем в Пермском университете с правом читать факультативный курс и пореже видеть людей»\*, — в таком непривычно пессимистическом тоне писал А. А. Фридман своему другу и учителю Стеклову. Тем не менее, даже измученный болезнью, он ни на минуту не забывает о науке. Немного оправившись, он снова начинает работать и читать лекции.

В 1918 г. А. А. Фридман был избран Советом Пермского государственного университета на должность экстраординарного профессора по кафедре теоретической механики и с осени того же года приступил к учебной и научной деятельности. Здесь он также проявил себя как блестящий организатор, руководя устройством и оборудованием лабораторий. Он

\* См. стр. 346.



активно участвует в создании Пермского физико-математического общества и становится во главе его журнала.

Сколько инициативы и находчивости проявил ученый в тяжелое время «колчаковии», как презрительно называл Фридман власть царского генерала! В письмах к В. А. Стеклову он просил о помощи как советами, так и в подборе преподавательского состава. В 1920 г. Фридман организовал в Пермском университете новые отделения: химико-металлургическое, инженерно-строительное и электромеханическое. Он вынужден читать многочисленные курсы в том числе физику; с присущим ему юмором он пишет В. А. Стеклову: «Это, как Вы легко усмотрите, губительно для меня и для предмета».

Во время пребывания в Перми Фридманом опубликована работа «О вертикальных течениях в атмосфере»\*. Здесь впервые вопрос о происхождении и развитии вертикальных течений рассматривается в зависимости от величины притока энергии. Обычно в задачи теоретической метеорологии ввиду больших математических трудностей, которые влечет за собой общая постановка задачи, вводилось предположение адиабатичности процессов. В вопросе о вертикальных течениях такое упрощение недопустимо. Поэтому А. А. Фридман рассматривает проблему при наличии притока энергии. Правда, ему пришлось все же сильно упростить задачу, рассматривая лишь случаи стационарного движения, полагая горизонтальные скорости равными нулю и рассматривая все входящие в задачу метеорологические элементы (давление, температуру, удельный объем и величину притока энергии) как функции только от высоты. При различных величинах притока энергии получаются различные зависимости возможных вертикальных течений от вертикального температурного градиента, причем при данном притоке энергии всегда существует, как оказывается, некоторая область изменений вертикальной скорости, которая соответствует отрицательному значению вертикального температурного градиента, т. е. случаю — температурной инверсии. В конце этой работы, рассматривая возможные случаи равновесия атмосферы, Фридман приходит к парадоксальному, на первый взгляд, результату о возможности равновесия атмосферы при градиенте, превышающем предельный вертикальный температурный градиент ( $3,4^\circ$  на 100 м подъема), т. е. когда верхние слои ее оказываются тяжелее нижележащих. Более плотный верхний слой вовсе не должен неминуемо «потонуть» в более легком нижележащем, ибо равновесие определяется и распределением давления, т. е. действующих в сжимаемой жидкости внутренних сил.

А. А. Фридман являлся крупнейшим теоретиком в области метеорологии, но его интересовал и практический аспект научных исследований. Он неоднократно повторял, что геофизика должна идти навстречу аэро-

\* См. стр. 104.

флоту и дать ему все, что может. Недаром смерть А. А. Фридмана вызвала такой отклик среди работников воздушного флота.

В 1922—1923 гг. было разработано одно из выдающихся достижений Фридмана в области гидродинамики — условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости.

Как известно, четыре уравнения гидродинамики, а именно: три уравнения движения (по числу координатных осей) и уравнение неразрывности, устанавливают зависимость между пятью величинами: тремя составляющими вектора скорости по осям координат, давлением и удельным объемом, а также их производными по времени и пространственным координатам. Если исключить так называемые динамические элементы (удельный объем и давление), то в результате исключения должны получиться уравнения, которым при заданных силах должны удовлетворять величины проекции вектора скорости и их производных для того, чтобы движение вообще было возможным. В простейшем случае несжимаемой жидкости это исключение приводит к знаменитым теоремам Гельмгольца, устанавливающим сохраняемость вихревых линий и постоянство напряжения вихревых пнуров в идеальной жидкости. К подобным же соотношениям легко прийти и в случае сжимаемой жидкости, в которой давление есть функция только удельного объема. В самом же общем случае сжимаемой жидкости указанное выше исключение давления и удельного объема из уравнений гидродинамики оказывается делом гораздо более сложным\*.

В своей работе, законченной в Ленинграде и представленной в качестве диссертации в физико-математический факультет Ленинградского университета под названием «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», Фридман подробно остановился на этом вопросе. В результате он нашел «условия динамической возможности движений» в виде некоторой системы векторных уравнений.

Условие динамической возможности движения идеальной сжимаемой жидкости, необходимое для всех типов движения, состоит в том, что вектор  $G = F - \frac{dV}{dt}$ , называемый «динамическим градиентом», ортогонален «турбулизирующему» вектору  $H$ , так как  $H = -\text{rot } G$ , то это условие выражает, что динамический градиент ортогонален своему вихрю — «условие незакручиваемости».

Заметим, что турбулизирующий вектор имеет вполне определенный физический смысл как вектор, характеризующий интенсивность развития вихрей.

---

\* Как обобщение знаменитых работ Гельмгольца А. А. Фридман поставил общую задачу об условиях, при которых имеет место сохранение во время движения векторных линий, а также интенсивностей векториальных трубок (см., например, диссертацию А. А. Фридмана «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости». Пг., 1922, стр. 516).

Свое изложение Фридман иллюстрирует многочисленными примерами, очень часто заимствованными из динамики атмосферы.

Значение разработанного Фридманом метода состоит в том, что с его помощью можно исследовать возможность или невозможность тех или иных движений, т. е. испытывать с помощью «условий динамической возможности» различные модели движений, в том числе атмосферные. Многочисленные приложения этого метода к задачам метеорологического характера были выполнены как самим А. А. Фридманом, так и его учениками.

Наиболее важными работами в этой области надо считать работы по изучению модели циклона. Как раз в это время (1919—1921 гг.) был снова поднят вопрос о построении гидродинамической модели циклона. Вопрос этот имел уже длинную историю. Ранее рассматривали почти исключительно несжимаемую жидкость и при этом ограничивались случаем стационарного движения; теперь же стремились поставить вопрос шире, рассматривая, во-первых, сжимаемую жидкость и, во-вторых, перемещающийся циклон, что представляет гораздо больший интерес для синоптической метеорологии.

В отличие от своих предшественников — Рэлея, Шоу и других, — Фридман ставит задачу в гораздо более общем виде и рассматривает сжимаемую жидкость, в которой плотность есть функция давления и температуры. Он исследует движения этой жидкости под действием силы тяжести и отклоняющей силы вращения Земли, причем положение центра вращения меняется с высотой и в любой горизонтальной плоскости меняется с течением времени. Он накладывает только два ограничения: угловая скорость постоянна на всех высотах и не зависит от времени, а вертикальная скорость равна нулю.

Применяя установленные им «условия динамической возможности» движения сжимаемой жидкости, А. А. Фридман установил, что движение возможно или в том случае, когда плотность не меняется с высотой, т. е. практически для достаточно низких циклонов, или же в случае стационарного циклона, где динамический центр неподвижен, между тем как центр вращения обегает его по кругу с постоянной скоростью. Впоследствии гидродинамическая модель циклона была рассмотрена Н. Е. Кочиным\*, получившим ряд ценных результатов.

В целях более гибкого применения условий динамической возможности движения к построению моделей атмосферных движений Фридман выдвинул идею приближенных условий динамической возможности движения.

Идеи А. А. Фридмана получили многостороннее развитие в интересных и принципиально важных работах созданного им коллектива отде-

\* Кочин Н. Е. Теоретическая модель перемещающегося циклона. — Журнал геофизики и метеорологии, 1924, 1, вып. 1, стр. 47.

ления теоретической геофизики Главной геофизической Обсерватории в Ленинграде. Отметим многочисленные работы Б. И. Извекова, И. А. Кибеля, Н. Е. Кочина, П. Я. Полубариновой-Кочиной и др. Обобщение условий динамической возможности движения на случай вязкой жидкости выполнено в работах Б. И. Извекова \* и И. А. Кибеля \*\*.

В 1930 г. И. А. Кибель \*\*\* привлек первый закон термодинамики и дал классификацию всех возможных движений идеального сжимаемого газа при заданном притоке энергии извне. В 1932 г. им же дана \*\*\*\* новая, более простая, чем у А. А. Фридмана, классификация условий динамической возможности движения.

В 1935—1937 гг. вышла в свет «Динамическая метеорология» \*\*\*\*\* , посвященная памяти А. А. Фридмана и написанная в основном его учениками.

Зимой 1920 г. А. А. Фридман вернулся из Перми в Главную физическую обсерваторию, с которой уже не расставался до конца жизни. Сначала он работал в качестве старшего физика и организовал здесь Математическое бюро, осенью 1921 г. был избран ученым секретарем, а позднее, незадолго до смерти, стал директором обсерватории. Он был первым редактором «Журнала геофизики и метеорологии».

Одновременно он постоянно преподавал в разных высших учебных заведениях Петрограда, в частности в Политехническом институте. Он читал здесь теоретическую механику, причем излагал кинематику в векторной форме, широко применял криволинейные координаты, рассматривал при решении задач о колебаниях системы некоторые нелинейные задачи, — все это для того времени было необычным; в частности, он излагал задачу о колебаниях при наличии кулонова трения и при наличии сопротивления, пропорционального квадрату скорости, и т. п. Под влиянием А. А. Фридмана сформировались крупные ученые Н. Е. Кочин, Г. А. Гринберг, Б. И. Извеков, И. А. Кибель, Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье, П. Я. Полубаринова-Кочина и др.

Летом 1922 г. А. А. Фридман был командирован с научной целью в Германию и Норвегию. Он работает со страстным увлечением. Недаром

\* Извеков Б. И. Об условиях динамической возможности движения вязкой сжимаемой жидкости. — Математич. сборник, 1924, 32, вып. 1.

\*\* Кибель И. А. Об условиях динамической возможности движения малых колебаний вязкой сжимаемой жидкости. — Журнал русск. физ.-химич. об-ва. Часть физич., 1928, т. LX, вып. 5, стр. 421—443.

\*\*\* Кибель И. А. Условия динамической возможности движений сжимаемой жидкости с заданным притоком энергии. — Геофизич. сборник, 1932, 5, стр. 3.

\*\*\*\* Кибель И. А. О дифференциальных уравнениях, служащих для определения плотности движущейся сжимаемой жидкости. — Математич. сборник, 1932, 39, вып. 4.

\*\*\*\*\* Динамическая метеорология, ч. 1. Под ред. Б. И. Извекова и Н. Е. Кочина. Л., ред.-издательск. отдел ЦУЕГМС, 1935. То же, ч. 2. М.—Л., Гидрометеоздат, 1937.

он любил повторять слова Данте: «И поелику ты ни холоден, ни тепл, ввергнут будешь в геенну огненную».

В эти годы А. А. Фридманом были получены принципиальной важности результаты в исследовании общей проблемы турбулентности. В природе и технике мы повсюду сталкиваемся с турбулентным движением: например, турбулентные водные потоки, атмосферная турбулентность и т. п. Основные вопросы были намечены еще Тейлором и Шмидтом, которые отметили влияние турбулентного перемешивания на передачу тепла и поставили задачу исследования уравнения притока энергии с точки зрения турбулентности. Основываясь на идеях О. Рейнольдса о турбулентном характере явления диссипации энергии, Ричардсон\* в 1922 г. дал весьма важный практический критерий для определения устойчивости турбулентных состояний в атмосфере. В 1926 г. появилась работа того же автора\*\*, посвященная атмосферной диффузии; второй параграф первой главы этой книги озаглавлен: «Обладает ли ветер скоростью?» — парадоксальный вопрос, смысл которого ясен в плане статистической теории турбулентности. Теоретическое исследование турбулентности привело к двум основным проблемам: а) объяснение перехода ламинарного движения в турбулентное; б) исследование закономерностей развитой турбулентности, требующее применения статистических методов.

Уравнения гидродинамики если и применимы к такого рода движениям, то лишь с весьма существенными ограничениями. В самом деле, по самому существу они применимы лишь к мгновенным величинам различных метеорологических элементов (давления, удельного объема или температуры и составляющих скорости ветра). Однако те значения величин метеорологических элементов, которые мы можем получить из наших наблюдений и которыми мы можем оперировать в наших теоретических подсчетах, никоим образом не могут считаться значениями истинных мгновенных величин. На самом деле они представляют собой некоторые средние величины, относящиеся к некоторому конечному объему пространства и конечному промежутку времени. Все измерительные приборы являются уже «интеграторами», осредняющими значение измеряемой величины на некоторую область. Часто границы этого осреднения неизвестны благодаря сложности и запутанности изменений состояний исследуемой среды, с одной стороны, и неточности теории самих измерительных приборов, с другой.

Таким образом, чрезвычайно сложные турбулентные (в частности, метеорологические) явления изучались лишь суммарно, при помощи рассмотрения тех или иных характеризующих их средних вели-

\* Richardson L. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph.—Proc. Roy. Soc., 1926, v. A CX, 709—737.

\*\* Richardson L. Weather prediction by numerical Process. Cambridge, 1922.

чин. Получаемые нами средние величины, строго говоря, не удовлетворяют и не могут удовлетворять уравнениям классической гидродинамики или в лучшем случае могут удовлетворять им лишь приблизительно. Вот почему возникла задача построить более сложную систему уравнений, которая содержала бы законченную систему характеристик турбулентности и давала бы полное статистическое описание турбулентного движения сжимаемой жидкости; тогда, зная значения характеристик жидкости для некоторого начального момента времени, можно было бы на основании этой системы уравнений установить значения этих характеристик для любого последующего момента времени.

В такой самой общей форме проблема турбулентности была поставлена А. А. Фридманом и Л. В. Келлером в 1924 г. До них никто из исследователей так задачу не ставил.

В 1895 г. О. Рейнольдс получил дифференциальные уравнения для осредненного поля скоростей, которые, однако, образуют незамкнутую систему; они содержат статистические характеристики поля турбулентных пульсаций — напряжения Рейнольдса, — характеризующие перенос импульса турбулентными пульсациями. Появление дополнительных членов при осреднении уравнений гидродинамики связано с нелинейностью этой системы уравнений. Центральной проблемой теории турбулентности являлось получение дополнительных уравнений, определяющих статистические характеристики турбулентных пульсаций, т. е. замыкание системы уравнений Рейнольдса. Изучение этого вопроса связано с исследованием внутренней структуры турбулентного потока.

Еще в 1919 г. Н. Е. Жуковский \* интересовался вопросами турбулентности и в качестве гидродинамической модели турбулентности рассматривал поток, заполненный эллиптическими вихрями.

Тэйлор \*\* в 1921 г. заметил, что скорость жидкости при турбулентном движении есть непрерывная случайная функция точки и времени. В 1924 г. А. А. Фридман \*\*\* и Л. В. Келлер и затем Л. В. Келлер \*\*\*\* указали общий метод описания структуры турбулентности — метод изучения корреляционных функций и других статистических моментов гидродинамических полей, характеризующих мгновенное состояние гидродинамического поля в различных точках потока. Для получения соотношений между

\* Жуковский Н. Е. О снежных заносах и заилинии рек. Собрание сочинений, т. 3. ГТТИ, 1949.

\*\* Taylor G. J. Diffusion by continuous movements.— Proc. Lond. Math. Soc. 1921, 20, p. 196.

\*\*\* См. стр. 45; см. также интересный обзор А. М. Обухова «Турбулентность» в кн. «Механика в СССР за тридцать лет». М.—Л., ГТТИ, 1950.

\*\*\*\* Келлер Л. В. Об установлении системы характеристик атмосферной турбулентности.— Журнал геофизики и метеорологии, 1925, 2, вып. 3-4, стр. 289—290; см. также стр. 449—450 настоящей книги.

средними произведениями скоростей различных порядков ими использованы уравнения Навье-Стокса.

А. А. Фридман не делает никаких предположений о характере распределения мгновенных скоростей, предоставляя освещение этого вопроса эксперименту, его теория свободна от каких-либо механических моделей. Для характеристики связи состояний в двух различных точках потока он вводит осредненное произведение двух каких-либо функций координат и времени, отнесенных к этим различным точкам и различным моментам времени. Теперь их называют моментами связи.

Оказалось, что уравнения содержат средние значения элементов движения, попарные произведения их флуктуаций, а также моменты третьего порядка. Фридман и Келлер считали возможным пренебрегать моментами высших порядков по сравнению с моментами второго порядка, что давало им возможность получить замкнутую систему уравнений. В новейших исследованиях показано, что такое пренебрежение допустимо отнюдь не во всех случаях. Система уравнений Фридмана и Келлера очень сложна, и до сих пор решение ее получено лишь для одного простейшего случая И. А. Кибелем. Однако в ряде случаев нет необходимости решать полную систему уравнений для моментов связи, а можно привлечь лишь отдельные уравнения этого типа, используя некоторые общие свойства движения.

Заметим, что метод Фридмана играет важную роль и в понимании практических вопросов динамики русловых потоков \*.

Выяснив динамическое значение этих статистических характеристик, Фридман поставил обширную вычислительную работу в отделении теоретической геофизики Главной физической обсерватории с целью практической проверки предположений, лежащих в основе метода моментов связи, и использовании этого метода в применении к проблемам динамической метеорологии. За отсутствием полного и надежного материала по микроструктуре атмосферы по смелой идее А. А. Фридмана было решено применить метод моментов к макроскопической картине метеорологических процессов. Интересно, что при этом выявилась глубокая связь метода моментов связи с методом периодограмм.

Полная бесконечная система уравнений Фридмана — Келлера для всевозможных моментов дает аналитическую формулировку проблемы турбулентности. Однако любая конечная подсистема этой системы уравнений всегда незамкнута, т. е. включает в себе больше неизвестных, чем имеется уравнений. Таким образом центральной делается проблема замыкания уравнений для моментов.

---

\* Великанов. Теория русловых потоков. ГТТИ, 1955.

\*\* Извеков Б. И. Журнал геофизики и метеорологии, 1926, 3, вып. 1-2, стр. 18.

В теории турбулентности надо различать крупномасштабные компоненты турбулентности (сравнимые с масштабом течения в целом) и мелкомасштабные компоненты. Первые существенно зависят от геометрии границ потока и внешних сил, в то время как вторые в значительной степени имеют универсальный характер.

Так как крупномасштабные компоненты играют основную роль в передаче импульса и теплообмене, то их теория (в частности так называемые полуэмпирические теории турбулентности) развивалась сравнительно быстро на основе аналогии между турбулентностью и молекулярным хаосом. Здесь важную роль сыграли работы Дж. Тэйлора, Л. Прандтля, Т. Кармана.

Что касается теории мелкомасштабных турбулентных движений, то в 1935 г. Тэйлор \* предложил схему статистически изотропной и однородной турбулентности, упростившую применение общих методов А. А. Фридмана [странно, что Тэйлор (а также и Карман) нигде не ссылаются на работы Фридмана].

Карман \*\* в целях упрощения ввел предположение о самоподобии корреляционных функций поля скоростей в течение периода вырождения турбулентности. Хотя это предположение несколько упрощает задачу, но противоречит некоторым экспериментальным фактам.

Несколько позднее, в 1941 г., А. Н. Колмогоров\*\*\* создал замечательную теорию локально изотропной турбулентности, которая ряд лет оставалась незамеченной за пределами СССР, но затем получила должную оценку и является отправной точкой многочисленных исследований. Основная гипотеза Колмогорова состоит в том, что мелкомасштабные компоненты турбулентности находятся приблизительно в статистическом равновесии.

При этом для исследования внутренней структуры развитой турбулентности рассматриваются относительно движения жидкости внутри областей, размеры которых малы по сравнению с масштабом всего потока.

Вследствие хаотичности передачи энергии к все более мелкомасштабным компонентам турбулентности на их свойствах не должно ска-

\* Taylor G. J. Statistical theory of turbulence.—Proc. Roy. Soc., 1935, Pt 1—4. A 151, p. 421; A 156, p. 307.

\*\* K á r m á n. Th. On the statistical theory of turbulence.—Proc. Nat. Acad. Sci. Washington, 1937, 23, p. 98; The fundamentals of the statistical theory of the turbulence.—J. Aeronaut. Sci., 1937, 4, p. 131; Some remarks of the statistical theory of turbulence.—Proc. 5-th Internat. Congr. Appl. Mech., 1938, p. 347; перевод в сб. «Проблемы турбулентности». М.—Л., ОНТИ, 1936, стр. 271.

\*\*\* Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.—Докл. АН СССР, 1941, 30, 299—303; Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности.—Докл. АН СССР, 1941, 32, 19—21; Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.—Изв. АН СССР, серия физ., 1942, 6, № 1-2, и др.



зываются ориентирующее влияние среднего течения (т. е. они однородны и изотропны); кроме того, режим таких пульсаций будет квазистационарным. По гипотезе Колмогорова при достаточно больших числах Рейнольдса статистический режим этих пульсаций определяется средней скоростью диссипации энергии и коэффициентом вязкости. В связи с глубокими работами А. Н. Колмогорова возникло также направление, связанное с изучением спектра частот турбулентных потоков — теория спектральной турбулентности.

Идея о статистическом равновесии мелкомасштабных компонент была также выдвинута независимо А. М. Обуковым \* и позднее Онзагером \*\* и Вейдцекером \*\*\*. Важные результаты по теории изотропной турбулентности были получены М. Д. Миллионщиковым\*\*\*\*, Л. Г. Лойцянским\*\*\*\*\*, Л. И. Седовым \*\*\*\*\*, А. М. Ягломом \*\*\*\*\* и др. Характеристику дальнейшего развития проблемы и ее современного состояния можно найти в ряде обзорных монографий \*\*\*\*\*. В теории развитой турбулентности в настоящее время основным является статистический подход.

В начале 20-х годов Фридман заинтересовался общей теорией относительности Эйнштейна, и, как всегда, его интерес не ограничился простым ознакомлением с новой областью науки, а привел к собственным замечательным исследованиям. «Скоро мы разберемся в этих вопросах,— Фридман принялся за изучение теории относительности»,— говорили его товарищи по работе. Работы А. А. Фридмана по теории относительности

.....  
\* О б у х о в А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— Докл. АН СССР, 1941, 32, 22;— Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз. 1941, 5, 453—466.

\*\* L. Onsager. The distribution of Energy in turbulence (abstract only).— Phys. Rev., 1945, 68, 286.

\*\*\* Weizsäcker C. Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynolds'schen Zahlen.— Zs. Phys., 1948, 124, 614.

\*\*\*\* М и л л и о н щ и к о в М. Д. Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1939, 22, 236—240; К теории однородной изотропной турбулентности.— Докл. АН СССР, 1941, 32, 611—614, и др.

\*\*\*\*\* Л о й ц я н с к и й Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока.— Труды ЦАГИ, 1939, вып. 440.

\*\*\*\*\* С е д о в Л. И. Вырождение изотропных движений несжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1944, 42, 121—124.

\*\*\*\*\* Я г л о м А. М. Однородная и изотропная турбулентность в вязкой сжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., 1948, 12, 501—522.

\*\*\*\*\* См., например. Б а т ч е л о р Дж. Теория однородной турбулентности. М., ИЛ, 1955.

Уже после написания нашей статьи вышла в свет прекрасная книга А. С. Монина и А. М. Яглома «Статистическая гидромеханика», ч. 1. М., изд-во «Наука», 1965. К книге приложена большая библиография.

относятся к одному из самых трудных ее вопросов, именно — к космологической проблеме.

Мы не останавливаемся на рассмотрении этих поистине великих работ А. А. Фридмана, а отсылаем читателя к статьям В. А. Фока и Я. Б. Зельдовича (см. стр. 398 и 402 настоящей книги).

Вот как оценивает результаты, полученные Фридманом, сам создатель теории относительности, А. Эйнштейн, в своей книге «Сущность теории относительности»: «Его (Фридмана) результат затем получил неожиданное подтверждение в открытом Хэблом расширении звездной системы (красное смещение спектральных линий, которое растет линейно с расстоянием). Последующее представляет не что иное, как изложение идеи Фридмана\*—и далее: «Не вызывает поэтому никаких сомнений, что... схема Фридмана... это наиболее общая схема, дающая решение космологической проблемы»\*\*.

Интересно отметить, что и в теоретической метеорологии и в теории относительности с математической точки зрения Фридман занимался, по существу говоря, исследованием решений дифференциальных уравнений в частных производных с применением его же собственных методов. Он придавал такое значение правильному и глубокому пониманию теории относительности, что даже в курсе классической механики и в других лекциях подчеркивал идею независимости физических величин от выбора системы координат и излагал преобразования Лоренца и основы специального принципа относительности.

В целях популяризации теории относительности им написана книга «Мир как пространство и время», а строгое математическое изложение он предполагал дать в оставшемся незаконченным труде «Основы теории относительности», который он писал совместно с проф. В. К. Фредериксом\*\*\*.

Поистине трудно себе представить, сколько успевал делать этот человек неистощимой энергии. За семь месяцев его пребывания в Главной геофизической обсерватории в качестве директора он успел сделать то, что у других людей заняло бы несколько лет: организовал целый ряд экспедиций, оживил деятельность областных обсерваторий, работал над созданием филиала физической обсерватории в Якутске, основал и редактировал геофизический журнал и т. д. Уже незадолго до кончины А. А. Фридман принял большое участие в строительстве советского воздушного флота, взяв на себя безвозмездную консультацию при научно-опытном аэродроме по вопросам аэронавигации и аэрологии. Всю жизнь он не давал себе ни часу покоя. Его постоянно снедала неугасимая, ненасытная жажда творчества. Он говорил: «Нет, я невежда, я ничего не

\* Эйнштейн А. Сущность теории относительности. М., ИЛ, 1955, стр. 100.

\*\* Там же стр. 113.

\*\*\* Фридман А. А., Фредерикс В. К. Основы теории относительности, т. 1, Пг., 1924, стр. 166.

знаю, надо еще меньше спать, ничем посторонним не заниматься, так как вся эта так называемая „жизнь” — сплошная потеря времени».

Незадолго до смерти, в июле 1925 г., А. А. Фридман принял участие в полете на аэростате с пилотом П. Федосеенко. Они достигли высоты для того времени рекордной — 7400 м, производя задуманные исследования.

Вот как описывает пилот Федосеенко события во время подъема аэростата \*:

*«11 час 30 мин.* Быстро набираем высоту. Начинаем пользоваться кислородом. Пульс бьется учащенно. Уже переходим седьмую тысячу — 7100 м, пульс — 92—96. Пользуемся кислородом. Случайно профессор Фридман нечаянно разорвал два шара-пилота с кислородом; наши и без того малые запасы кислорода уменьшились еще на 50—60 л.

*11 час 38 мин.* Высота 7300 м. Температура — 20,2° С, смоченный термометр давно уже не действует, вода замерзла. Пользуемся кислородом. Идем еще выше. Пульс учащается — 105—110. Профессор Фридман отказывается принимать кислород, оставляя его для меня, как для ведущего шар, приходится почти силой заставлять его вдыхать кислород, убеждая, что мы обоюдно должны поддерживать друг друга.

*11 час 51 мин.* Достигли высоты 7400 м. Анероид давно нам уже не показывает давления, пользуемся ртутным манометром — 301 мм. В легких ощущается какая-то пустота; несмотря на глубокие вдыхания, чувствуется недостаток воздуха. С большими усилиями, помогая друг другу, принимаем кислород, так как последний находится не под давлением».

И как бы соревнуясь с Федосеенко в скромности и сдержанности, но в то же время невольно раскрывая свой отважный характер и глубоко чувствующую, поэтическую натуру, Фридман следующим образом пишет о том же: «Зная, что наш запас кислорода чрезвычайно мал, я все время упорно отказывался дышать им, сберегая кислород для пилота. Соображение у меня очень простое: пилот был сильнее меня, мог лучше вынести недостаток воздуха, и именно ему, умеющему управлять шаром, надо было сохранить максимальную свежесть, я же мог находиться в полубоморочном состоянии и, спокойно лежа в корзине шара, достигнуть нижних плотных слоев, если только пилот сохранил бы способность управлять аэростатом. Словом, кислород в первую очередь нужен был пилоту, а не мне. Однако самоотверженный т. Федосеенко угрозами заставил меня „кормиться” кислородом, и думаю, что этим его угрозам я в значительной степени обязан своей жизнью.

Картина, развернувшаяся перед нами, когда мы совершали свой полет над облаками, была восхитительна. Там и сям над ровным облачным полем возвышались высокие белые холмы, ослепительно сверкавшие на солнце. Эти холмы представляли совершенно правильную картину, рас-

\* Федосеенко П. Ф. На высоте 7400 м. Вестник воздушного флота, 1925. т. VIII, № 9, стр. 23.

положенные по углам сетки с ромбовидными частями облаков. Между облачными холмами воздух был сплошь заполнен ледяными кристалликами, переливающимися на солнце всеми цветами радуги; казалось, что эти кристаллики исходят из одного блестящего яркого центра; сначала мне показалось, что мы видим какое-то явление электрического порядка, и мне стало не по себе, тем более, что на горизонте была видна огромная грозовая башня в виде черной наковальни. Но потом я сообразил, что блестящий шар, из которого радужными искрами рассыпались во все стороны льдинки, — это явление оптическое, нечто вроде ложного солнца».

Спустившись в глуши Новгородской губернии и встретившись с представителями местной молодежи, А. А. Фридман побеседовал с ними и прочитал им импровизированную лекцию — отчет о только что совершенном рекордном подъеме. Впоследствии Фридман поддерживал переписку с этой молодежью.

В последние годы своей жизни А. А. Фридман много занимался еще одной весьма важной проблемой динамической метеорологии — разрывами непрерывности в атмосфере. Важную роль разрывов в атмосферной динамике он оценил давно. Еще в своей работе о вихрях (1916 г.) он искал в них возможную причину порывистости ветра. К этой проблеме он подошел с совершенно другой точки зрения, чем подходили к ней метеорологи норвежской школы во главе с Бьеркнесом. Как известно, в 1921 г. Бьеркнес предложил новую теорию происхождения циклонов Северного полушария, в которой главную роль приписывал волновым движениям, возникающим на границе полярных и экваториальных масс воздуха (так называемый «полярный фронт»).

Отдавая должное этой грандиозной и остроумной теории, Фридман считал ее недостаточно строго обоснованной математически.

Ученик Фридмана, Н. Е. Кочин нашел, что при известных предположениях о поверхностях разрыва они могут распространяться в сжимаемой невязкой жидкости или со скоростью, близкой к скорости звука, или же будут перемещаться, оставаясь стационарными в том смысле, что такая поверхность всегда состоит из одних и тех же жидких частиц. В этом последнем случае, очевидно, скорость перемещения разрыва равна перпендикулярной составляющей скорости частиц, образующих ее. Эта теория нашла интересное приложение в области метеорологии. Если под поверхностью разрыва в атмосфере понимать поверхность инверсии температуры (точнее говоря, это будет некоторый слой, в котором температура быстро меняется) и считать слои инверсии приближенно горизонтальными, то можно заключить, что скорость перемещения слоя инверсии есть не что иное, как вертикальная скорость воздушных частиц, составляющих слой инверсии. Сопоставляя различные скорости перемещения инверсий по данным Аэрологической обсерватории в Линденберге, А. А. Фридман

получил величины, весьма близкие к величинам скоростей вертикальных течений (порядка  $10^{-2} \text{ см/сек}$ ), причем летом скорости перемещений оказываются больше, чем зимой, в полном согласии с годовым ходом скоростей вертикальных течений.

Весной 1924 г. Фридман был командирован в Голландию, где в г. Дельфте состоялся Первый международный конгресс по прикладной механике. Он писал В. А. Стеклову: «Конгресс прошел очень хорошо, к русским было прекрасное отношение, в частности, меня включили в число членов комитета по созыву следующего конгресса.... Работами моими и моих сотрудников заинтересовались Блюменталь, Карман, Леви-Чевита. Если у Вас будет время, с удовольствием доложу подробно Вам о конгрессе».

В сентябре 1925 г. Фридман заболел брюшным тифом и 16 сентября 1925 г. скончался.

## ПРИМЕЧАНИЯ

<sup>1</sup> Статья «О вихрях в жидкости с меняющейся температурой» опубликована в журнале Сообщение Харьковского математического общества, 1916, XV, вторая серия, № 4, стр. 173—176. Термин *helm* введен А. А. Фридманом в честь Г. Гельмгольца.

*Sur les tourbillons dans un liquide à température variable.* — *Compt. rend.*, 1916 (28.VIII), 163, N 9, стр. 219—222.

<sup>2</sup> Статья «О движении сжимаемой жидкости» опубликована в журнале Известия Российск. гидрологич. ин-та, 1923, № 7, стр. 21—28.

Эта статья в несколько переработанном виде включена А. А. Фридманом в его большую работу «Теория движения сжимаемой жидкости и ее приложения к атмосферным движениям» (см. стр. 178).

<sup>3</sup> *Über Wirbelbewegung in einer kompressiblen Flüssigkeit.* — *Z. angew. Math. und Mech.*, 1924, 4, N. 2, 102—107\*.

<sup>4</sup> Статья «О распространении прерывности в сжимаемой жидкости», написанная совместно с Я. Д. Тамаркиным, опубликована в Журнале Русск. физ.-химич. об-ва, 1924/25, 56, вып. 1, стр. 40—58.

<sup>5</sup> *Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit.* — *Proc. First Internat. Congress Appl. Mech.*, Delft, 1925, S. 395—405.

Статья написана совместно с Л. В. Келлером.

Лев Васильевич Келлер (1863—1939 гг.). В 1923 г. он был приглашен на работу в Главную геофизическую обсерваторию — в отдел теоретической метеорологии, возглавлявшийся в то время проф. А. А. Фридманом, который необычайно высоко его ценил.

После смерти Фридмана Келлер стал директором Института теоретической метеорологии. Его работы относятся к динамической метеорологии и гидромеханике.

Наибольшую важность имеют его совместная работа с Фридманом по теории турбулентности и следующие за ней статьи, в которых он развивает аппарат созданной ими теории. Кроме чисто теоретического изучения турбулентности, Келлер занимался методикой измерения характеристик турбулентности в свободной атмосфере.

Непосредственно за этой статьей, представляющей собой доклад, сделанный А. А. Фридманом, напечатана дискуссия по его докладу.

### Дискуссия

Хергессель (Линденберг) высказывает свое удовлетворение активной деятельностью русских ученых в аэрологии. Его особенно заинтересовал доклад об общих уравнениях турбулентности сжимаемой жидкости. Он не хотел бы касаться деталей преж-

---

\* Перевод статей, опубликованных А. А. Фридманом на иностранных языках (за исключением статьи «О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства»), выполнен Н. В. Александровой.

де, чем будет представлена обстоятельная напечатанная статья. Однако уже сегодня можно сделать одно замечание.

Гидродинамические уравнения, положенные в основу всех этих теоретических исследований, согласно смыслу их математического вывода, относятся к мгновенным значениям входящих в них связанных между собой наблюдаемых величин.

В большинстве теоретических аэрологических исследований, где применяются эти формулы, составляются временные средние значения, которые относятся к конечным интервалам времени. С самого начала ясно, что такое применение основных уравнений недопустимо без особого исследования того, возможно ли введение осреднения по времени наблюдаемых величин. Докладчик уже провел исследования, которые доказали, что принципиально такие арифметические осреднения по времени нельзя применять. При этом во всех случаях нужно оценивать величину вводимых таким образом ошибок. Соответствующее подробное сообщение будет нами дано в другом месте.

**А. Фридман.** Профессор Хергессель совершенно верно указывает на принципиальную недопустимость прямого применения гидродинамических уравнений к атмосферным движениям, если они характеризуются нами численными данными, полученными с помощью обычных метеорологических инструментов. В самом деле, инструменты дают нам некоторые средние значения, в то время как гидродинамические уравнения относятся не к средним значениям, а к мгновенным значениям состояния. Только теория турбулентности может проложить правильный путь для применения гидродинамики к динамической метеорологии.

Однако нужно заметить, что относящаяся к динамике атмосферы проблема турбулентности в корне отличается от обычных задач турбулентного движения. Существенное различие лежит не в том, что в обычной теории турбулентности мы имеем дело с несжимаемой жидкостью, а в динамике атмосферы — с сжимаемым газом. Главное различие задач обычной теории турбулентности и атмосферной турбулентности состоит в том, что первая ограничивается рассмотрением стационарного движения, последняя же относится к существенно нестационарным движениям. Это обстоятельство и позволяет выдвинуть на первый план проблему Коши и начальные условия (т. е. проблему прогноза), как это сделано в обобщении Келлера и Фридмана, а граничные условия оказываются, пожалуй, на втором плане.

В 1925 г. в «Журнале геофизики и метеорологии» (1925, т. 2, вып. 3-4, стр. 289—290) Л. В. Келлер опубликовал следующее резюме под названием «Об установлении системы характеристик атмосферной турбулентности».

### Об установлении системы характеристик атмосферной турбулентности

1. Статистико-механический метод изучения турбулентного движения, ведущий свое начало от О. Рейнольдса, нуждается в существенном дополнении: основной задачей при этом следует считать установление законченной системы характеристик, т. е. такой системы, которая давала бы суммарно-статистическое описание турбулентного движения, достаточно полное для того, чтобы, зная значения характеристик для некоторого начального момента времени, можно было бы, на основании уравнения гидродинамики, установить значения таковых же характеристик для любого последующего момента.

2. При известных условиях (см. ниже, п. 4) такой законченной системой оказывается система следующих двадцати характеристик:

1) известным образом сглаженных значений пяти основных элементов: удельного объема, давления и трех составляющих скорости; эти сглаженные функции времени и координат получаются, по примеру Рейнольдса, путем осреднения либо за известный промежуток времени, либо в определенном объеме, окружающем рассматриваемую точку пространства.

2) Пятнадцать дальнейших характеристик, вводимых под названием «моментов связи» и являющихся обобщением введенных Рейнольдсом шести величин, представляющих тензор «добавочных напряжений» (additional stresses) (см. п. 3).

3. Характеристики эти определяются следующим образом: обозначая вышеуказанные пять основных элементов соответственно через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$  и пользуясь по примеру Рейнольдса для обозначения операции осреднения горизонтальной чертой, введем прежде всего понятие корреляционного момента (product moment) каких-либо двух функций  $\varphi$  и  $\psi$ :  $R(\varphi, \psi) = \overline{\varphi\psi} - \varphi\psi$ .

Дав координатам  $x, y, z$  произвольные приращения  $\pm \xi, \pm \eta, \pm \zeta$ , определяем моменты связи  $(\varphi, \psi)$  двух каких-либо функций  $\varphi$  и  $\psi$  таким образом:  $(\varphi, \psi) = R[\varphi(t, x - \xi, y - \eta, z - \zeta), \psi(t, x + \xi, y + \eta, z + \zeta)]$ .

Моменты связи представляют, таким образом, функции времени, координат и трех добавочных переменных  $\xi, \eta, \zeta$ .

4. Остановившись теперь на случае адиабатического движения, допустив затем, что рассматриваемые функции  $\varphi_i$ , а также их производные по координатам удовлетворяют известным, допускаемым нами постулатам (см. п. 5), и, наконец, подобрав соответственно масштаб осреднения, оказывается возможным выразить производные двадцати функций  $\overline{\varphi_i}$  и  $(\varphi_i, \varphi_k)$  по времени через те же функции и их производные по шести переменным, откуда и вытекает, что в рассматриваемом случае означенные двадцать функций представляют законченную систему характеристик.

5. Постулаты, коворым мы подчиняем рассматриваемые функции, сводятся к приближенному равенству:  $R(\psi, \psi_1 \psi_2) \approx \psi_1 R_1(\psi, \psi_2) + \psi_2 R(\psi, \psi_1)$ , где под  $\psi, \psi_1, \psi_2$  подразумеваются какие-либо три из функций  $\varphi_1$  и их производных по координатам.

Постулат этот может быть оправдан либо в предположении, что колебания короткого периода в функциях  $\varphi_i$ , устраняемые процессом осреднения, обладают вместе с тем и малой амплитудой, или же в предположении, что статистические частоты различных комбинаций значений функций  $\psi, \psi_1, \psi_2$  приблизительно следуют «нормальному» закону распределения (по формуле Браве-Гальтона).

6. При несоблюдении указанных выше (п. 4 и 5) условий установленная здесь система характеристик может оказаться еще не полной, но наше исследование во всяком случае обнаруживает, что введенные величины обладают не только описательно-статистической, но и динамической значимостью, и потому уже теперь представляется целесообразным положить эту систему в основание тех заданий, которые должны быть предъявлены, с одной стороны, к экспериментальным исследованиям турбулентности и, с другой стороны, к постановке наблюдений в свободной атмосфере.

<sup>6</sup> Статья «Sur le mouvement d'un fluide parfait compressible» написана совместно с Б. Н. Извековым (представлена В. Стекловым), опубликована в журнале Изв. Росс. АН, 1925, 19, стр. 351—361.

<sup>7</sup> Статья «О приближенных условиях динамической возможности движения сжимаемой жидкости» опубликована в журнале Геофизический сборник, 1927, 5, вып. 2, стр. 24—32.

Настоящая статья представляет собой лекцию А. А. Фридмана, в которой он последовал цели ввести своих сотрудников в круг возникших у него идей, зафиксировать которые представлялось целесообразным, несмотря на их незаконченность. Лекция обработана и приготовлена для печати Н. Е. Кочины.

<sup>8</sup> Статья «Sur la distribution de la température aux diverses hauteurs» опубликована в Геофизическом сборнике, 1914, 1, вып. 1, стр. 35—55.

<sup>9</sup> Zur Theorie der Vertikaltemperaturverteilung.— Meteorol. Z., 1914, 31, стр. 154—156.

<sup>10</sup> Статья «О вертикальных течениях в атмосфере» опубликована в Журнале физ.-матем. об-ва при Пермском гос. ун-те. Пермь, 1919, вып. 2, стр. 67—104; Die vertikale Strömungen in der Atmosphäre.— Beitr. Phys. Atmosph. 1922, Bd X, H. 4, S. 185—201.



<sup>11</sup> Статья «О распределении температуры с высотой при наличности лучистого теплообмена Земли и Солнца» опубликована в Изв. Главной физич. обсерватории, 1920, № 2, стр. 42—44.

<sup>12</sup> Статья «Об атмосферных вихрях с вертикальной и горизонтальной осью» опубликована в журнале Изв. Главной физич. обсерватории, 1920, № 3, стр. 3—4.

<sup>13</sup> Статья «Идея вращающейся жидкости в атмосферных движениях» опубликована в журнале Метеорологический вестник, 1921, 31, № 1, стр. 69—88.

<sup>14</sup> Über vertikale Temperaturgradienten in der Atmosphäre. Ann. Hydrogr. Marit. Meteorol., 1923, 51, S. 12. В том же журнале за тот же год (стр. 124—125) L. W. Pollak напечатал следующие замечания по поводу этой статьи А. А. Фридмана.

### Замечания к статье А. Фридмана «О вертикальном температурном градиенте»

Тот факт, что тяжелая верхняя масса воздуха не обязательно должна проникать в нижнюю, более легкую, уже отмечен в более общей форме Р. Эмденом в его учебнике «Газовые шары» (Teubner, Leipzig und Berlin, 1907) и высказан следующим образом: «Газовый шар может быть в равновесии всегда, когда его плотность изменяется вдоль радиуса».

Однако Эмден исследует здесь (и это представляет существенное дополнение картины строения атмосферы) также характер механического равновесия и доказывает (стр. 395) следующее положение: «Если атмосфера находится в равновесии при показателе политропы  $n$  и ее частицы при изменении положения следуют политропе  $n_1$ , то ее равновесие безразлично, устойчиво или неустойчиво, в зависимости от того, является ли  $n$  равным  $n_1$ , больше или меньше его».

Приняв в исследованиях Фридмана, что воздух является сухим ( $n_1 = 2,5$ ,  $dt/dn = 0,98^\circ \text{C}/100 \text{ м}$ ), мы найдем, что при изопикне  $n = 0$  имеет место неустойчивое равновесие.

Случай перемешивания слоев, более легких, и более тяжелых масс воздуха упоминается наряду с другими случаями также А. Шпрунгом в его учебнике метеорологии (Гамбург, 1885), стр. 171 с учетом характера равновесия.

В. Экманом в статье «О понятии устойчивых слоев» (Meteorol. Z., 1900, S. 22) рассмотрена неточность, имеющаяся в учебнике метеорологии (J. V. Hanns. Ausg. 2, S. 592; Ausg. 3, S. 792), которая, возможно, может привести к недоразумению относительно понятия устойчивости.

<sup>15</sup> Über atmosphärische Wirbel und die Turbulenz des Windes.—Beit. Phys. Atmosph. 1924 (15.XI), Bd. XI, H. 4, S. 154—163.

<sup>16</sup> Über eine Methode der Bestimmung der vertikalen Windgeschwindigkeit. — Meteorol. Z., 1924, 41, H. 3, S. 90—91.

Статья написана совместно с Я. Д. Тамаркиным.

<sup>17</sup> Théorie du mouvement d'un fluide compressible et ses applications aux mouvements de l'atmosphère.— Журнал Геофизич. сборник, 1927, 5, вып. 1, стр. 16—56.

<sup>18</sup> Статья «О кривизне пространства» опубликована в Журнале Русск. физ.-химич. об-ва, часть физич., 1924, 56 (1), стр. 59—68. Первые работа опубликована на немецком языке. (Z. Phys., 1922, 10, H6, 377—387).

Статья вызвала две заметки А. Эйнштейна (см. стр. 398).

<sup>19</sup> Über Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. Z. Phys., 1924, 21, 326—32. русский перевод А. А. Сазыкина под ред. В. А. Фока.

<sup>20</sup> Книга «Мир как пространство и время» вышла в свет в издательстве Academia. Пб., 1923, стр. 1—130.

<sup>21</sup> Письма А. А. Фридмана к Б. Б. Голицыну и В. А. Стеклову находятся в Архиве АН СССР (Архив АН СССР, ф. 69, оп. 3, № 386; ф. 162, оп. 2, № 511). Первые письма опубликованы Л. С. Подаком. Примечания к ним составлены А. Ф. Гавриловым. Тру-

ды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, т. 22. Изд-во АН СССР, 1959, стр. 324—388).

<sup>22</sup> Крылов Алексей Николаевич — тогда профессор Военно-Морской академии, впоследствии академик.

<sup>23</sup> Бубнов Иван Григорьевич — профессор Военно-Морской академии и Петербургского политехнического института, выдающийся инженер-кораблестроитель, конструктор линейных кораблей и подводных лодок дореволюционного русского флота. Умер в 1921 г.

<sup>24</sup> Герсевич Н. М. — профессор Института инженеров путей сообщения. (Н. М. Будто даев. Выдающийся русский историк портовой гидротехники Н. М. Герсевича. Машстройиздат, 1950).

<sup>25</sup> Речь идет о так называемом выпускном свидетельстве, которое получали студенты университетов по прослушании всего курса и сдачи определенной части предметов учебного плана. Получившие выпускное свидетельство имели право приступить к сдаче экзаменов в «государственной комиссии».

<sup>26</sup> Булыгин Василий Васильевич окончил университет в 1910 г., оставлен при кафедре акад. В. А. Стеклова, преподавал в Институте инженеров путей сообщения; умер в 1917 г. Последние годы жизни с успехом занимался теорией чисел.

<sup>27</sup> Тамаркин Яков Давидович — друг детства А. А. Фридмана, был также учеником акад. В. А. Стеклова; выдающийся математик, умер в 1945 г. в Америке.

<sup>28</sup> Ольга Николаевна Стеклова — супруга акад. В. А. Стеклова.

<sup>29</sup> Последний год перед войной А. А. Фридман служил в Астрономической обсерватории в Павловске, стремясь использовать, как он говорил, «гигантскую лабораторию природы для иллюстрации теории потенциала и математических решений задач гидродинамики». В начале войны он пошел в армию добровольцем (он не был военно-обязанным). Служил вольноопределяющимся в авиационных частях. За большие заслуги награжден орденами и произведен в офицеры. Подробности в дальнейших письмах.

<sup>30</sup> Голицын Борис Борисович, князь — выдающийся сейсмолог, в то время директор Главной геофизической обсерватории.

<sup>31</sup> Перемысль — крепость в западной Галиции, которую наши войска осаждали несколько месяцев и в конце концов взяли. Бомба конструкции полковника Ораневского.

<sup>32</sup> Успенский Яков Викторович — тогда молодой профессор Петербургского университета, впоследствии академик, в конце двадцатых годов эмигрировал в Америку.

<sup>33</sup> Адамов Алексей Алексеевич — молодой в то время профессор математики в Политехническом институте и в Институте инженеров путей сообщения. Умер в Ленинграде в двадцатых годах, не достигнув 50 лет.

<sup>34</sup> Вейхардт Георгий Георгиевич — молодой профессор физики в Пермском университете, погиб (утонул) в 1919 г. (см. в одном из следующих писем).

<sup>35</sup> Гаврилов Александр Феликсович — университетский товарищ А. А. Фридмана; окончил университет в 1912 г. и был оставлен акад. В. А. Стекловым при университете. Во время войны несколько лет работал с А. А. Фридманом. С 1919 г. — профессор математики.

<sup>36</sup> Шохат Яков Александрович — ученик В. А. Стеклова. В описываемое время профессор и проректор университета в Свердловске. Умер в США.

<sup>37</sup> Гюнтер Николай Максимович — член-корр. АН СССР, в то время профессор математики Петроградского университета. Умер в Ленинграде в 1941 г.

<sup>38</sup> Смирнов Владимир Иванович — ученик В. А. Стеклова, оставленный при университете с 1910 г., впоследствии профессор университета, с 1942 г. — академик.

<sup>39</sup> Безикович Абрам Самойлович — тогда молодой профессор математики в Пермском университете (ученик акад. А. А. Маркова). В 1925 г. эмигрировал в Америку.

<sup>40</sup> Речь идет о Международном конгрессе по прикладной математике в Дельфте

(Голландия), в котором участвовал А. А. Фридман, выступивший с рядом докладов — своих и чужих.

В. А. Стеклов собирался в это время на Международный математический конгресс в Торонто (Канада). На конгрессе он был вместе с Н. М. Гюнтером, Я. И. Успенским и Н. М. Краевским.

<sup>41</sup> Sur les congruences du second degré et les nombres de Bernoulli. — *Math. Ann.*, 1906, 62, 409—412. Статья написана совместно с Я. Д. Таминым

<sup>42</sup> Статья «К теории аэроплана» опубликована в двух выпусках *Журнала Русск. физ.-химич. об-ва*, 1911, 43, вып. 9, стр. 362—376 и 43, вып. 10, стр. 400—410.

<sup>43</sup> Sur la recherche des solutions particulières de l'équation de Laplace. — *Сообщения Харьковск. математич. об-ва*, вторая серия, 1911, т. XII, стр. 244—268.

<sup>44</sup> Sur la recherche des surfaces isodynamiques. — *Compt. rend.*, 1912 (1. IV), 154, 864—865.

<sup>45</sup> Sur un problème hydrodynamique de Bjerknes. — *Сообщения Харьковск. математич. об-ва*, серия 2, 1913, т. XIII, № 6, стр. 253—262. Статья написана совместно с М. Петелиным.

<sup>46</sup> Статья «Об атмосферных вихрях» напечатана в *Геофизич. сборнике*, 1916, 3, вып. 1, стр. 90—120.

<sup>47</sup> Статья «К вопросу о колебательном разряде конденсатора», написанная совместно с В. И. Смирновым, опубликована в *Журнале Русск. физ.-химич. об-ва*, отдел физич., 1913, 45, вып. 5, стр. 276—282.

<sup>48</sup> Die Grossenordnung der Meteorologische Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen. — *Veroff. Geophys. Inst. Univ. Leipzig*, 1914, Serie 2, 1, 10. Статья написана совместно с К. Г. Хессельбергом.

<sup>49</sup> Статья «К вопросу о скорости звука», написанная совместно с В. Я. Альтбергом, опубликована в *журнале Геофизич. сборник*, 1915, 2, вып. 3, стр. 69—72.

<sup>50</sup> Статья «Определение вертикальных течений воздуха с помощью наблюдений за шарами-пилотами, производимых с одного пункта», написанная совместно с Н. Путья, опубликована в *журнале Геофизический сборник*, 1917, 3, вып. 2, стр. 75—82.

Непосредственно вслед за статьей опубликована заметка (посмертная) Б. Б. Голицына «Некоторые замечания к статье А. А. Фридмана: «Определение вертикальных течений воздуха с помощью наблюдений за шарами-пилотами, производимых с одного пункта»; там же, стр. 83—102; и статья Н. Путья «Примечание к статье кн. Б. Б. Голицына»; там же, стр. 103—106.

<sup>51</sup> Статья «К вопросу о доказательстве правила параллелограмма сил» опубликована в *Журнале Физ.-математич. об-ва при Пермском гос. ун-те*, 1918, вып. 1, стр. 33—43.

<sup>52</sup> Sur la cinématique des lignes de tourbillon. — *Bull. internat. Acad. Polonaise sci. Lettres, classe sci. mathem. natur.*, serie A, 1922, p. 25—44.

<sup>53</sup> Книга «Теоретическая механика (кинематика)», написанная совместно с Л. Г. Лойцянским, представляет собой литографированный курс. Изд. Военно-Морской академии, 1924, стр. 1—277.

<sup>54</sup> Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen. — *Math. Z.*, 1924 21, T. 3—4, S. 211—223. Статья написана совместно со Скоутеном (J. A. Scouten).

<sup>55</sup> Статья «О возможных конфигурациях электронов в атоме Резерфорда», написанная совместно с Я. Д. Таминым, опубликована в *Трудах Гос. оптич. ин-та*, т. 3, вып. 21. Л., 1924, стр. 1—14.

<sup>56</sup> Статья «О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости», написанная совместно с П. Я. Полубариновой, опубликована в *журнале Геофизический сборник*, 1927, 5, вып. 2, стр. 9—24.

<sup>57</sup> Книга «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости» была издана уже после смерти А. А. Фридмана под редакцией и с примечаниями Н. Е. Кочина. Л.—М., ОНТИ, 1934, стр. 1—370.

<sup>58</sup> Статья «На высоте 7400 м» опубликована в журнале Климат и погода, 1925, № 2-3, стр. 8—11 и под тем же названием, но в несколько ином изложении в журнале Хочу все знать, 1925, № 10, стр. 18—20.

<sup>59</sup> Curriculum vitae А. А. Фридмана опубликован в Геофизическом сборнике, 1927, 5, вып. 1, посвященном памяти А. А. Фридмана, стр. 11—13.

<sup>60</sup> Отзыв о трудах А. А. Фридмана, составленный акад. В. А. Стекловым, и приложенное к нему письмо опубликованы впервые К. Н. Лоскутовым в книге «Очерки истории математики и механики. Изд-во АН СССР, 1963, стр. 228—231. Отзыв и письмо хранятся в Гос. архиве Пермской области, ф. 18002, д. 385, лл. 30—33.

<sup>61</sup> Некролог, написанный акад. В. А. Стекловым, учителем А. А. Фридмана, опубликован впервые в Геофизическом сборнике, 1927, 5, вып. 1, стр. 7—8.

<sup>62</sup> Статья жены А. А. Фридмана, Е. П. Фридман, опубликована в Геофизическом сборнике, 1927, 5, вып. 1, стр. 9—10.

<sup>63</sup> Из вступительной речи акад. П. Л. Капицы на сессии Отделения физ.-математич. наук АН СССР, в 1963 г., посвященной 75-летию со дня рождения А. А. Фридмана.

<sup>64</sup> Заметка А. Эйнштейна «Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann (Über die Krümmung des Raumes)» — Z. Phys., 1922, 2, 326.

<sup>65</sup> Заметка А. Эйнштейна «Notiz zu der Arbeit von A. Friedmann (Über die Krümmung des Raumes)» — Z. Phys., 1923, 21, 228.

<sup>66</sup> Статья акад. В. А. Фока «Работы А. А. Фридмана по теории тяготения Эйнштейна» опубликована в УФН, 1963, т. LXXX, вып. 3, стр. 353—356.

<sup>67</sup> Статья акад. Я. Б. Зельдовича «Теория расширяющейся Вселенной, созданная А. А. Фридманом» опубликована в УФН, 1963, т. LXXX, вып. 3, стр. 357—390. Здесь публикуется три первых параграфа и заключение этой статьи.

<sup>68</sup> Статья П. Я. Полубариновой-Кочиной «Александр Александрович Фридман» опубликована в УФН, 1963, т. LXXX, вып. 3, стр. 345—350.

<sup>69</sup> Воспоминания А. Ф. Гаврилова, впервые опубликованы в Трудах Ин-та истории естествознания и техники, т. 22. Изд-во АН СССР, 1959, стр. 389—400.

## БИБЛИОГРАФИЯ РАБОТ А. А. ФРИДМАНА

1. Sur les congruences du second degré et les nombres de Bernoulli. (Совм. с Я. Д. Тамаркиным).— *Math. Ann.*, 1906, **62**, p. 409—412.
2. Quelques formules concernant la théorie de la fonction  $[x]$  et les nombres de Bernoulli. — *Crelle, J.*, 1909, **135**, стр. 146—156.
3. Sur la recherche des solutions particulières de l'équation de Laplace.— *Сообщения Харьковского математич. об-ва*, **12**, 1911, стр. 244—268.
4. К теории аэроплана.— *Журнал Русск. физ.-химич. об-ва*, 1911, **43**, 9, стр. 362—376; **10**, стр. 400—410.
5. Sur la recherche des surfaces isodynamiques.— *Compt. rend.*, 1912 (I.V), **154**, p. 864—865.
6. Sur un problème hydrodynamique de Bjerknes. (Совм. с М. Петелиным).— *Сообщения Харьковск. математич. об-ва*, серия 2, 1912—1913, **13**, № 6, стр. 253—262.
7. К вопросу о колебательном разряде конденсатора.— (Совм. с В. И. Смирновым).— *Журнал Русск. физ.-химич. об-ва*, 1913, **45**, вып. 5, стр. 276—282.
8. Zur Theorie der Vertikaltemperaturverteilung.— *Meteorol. Z.*, 1914, **31**, S. 154—156.
9. Значение линий тока воздушных течений для воздухоплавания.— *Техника воздухоплавания*, 1914, вып. 6—8, 246—258.
10. Die Grössenordnung der Meteorologische Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen. (Совм. с Хессельбергом).— *Veröff. Geophys. Inst. Univ. Leipzig*, 1914, Serie 2, **1**, N. 10.
11. Sur la distribution de la température aux diverses hauteurs.— *Геофизический сборник*, 1914, **1**, вып. 1, 35—55.
12. К вопросу о скорости звука. (Совм. с В. Я. Альтбергом).— *Геофизический сборник*, **2**, вып. 3, 1915, 69—72.
13. Sur les tourbillons dans un liquid a température variable, *Compt. rend.*, 1916, **28**, VIII, **163**, N 9, 219—222.
14. О вихрях в жидкости с меняющейся температурой.— *Сообщения Харьковск. математич. об-ва*, 1917, **15**, № 4, стр. 173—176.
15. Конспект лекций по аэронавигации. Киев, 1916, стр. 1—43.
16. Об атмосферных вихрях.— *Геофизический сборник*, 1916, **3**, стр. 90—120.
17. Определение вертикальных течений воздуха с помощью наблюдений над шарами-пилотами, проводимых с одного пункта. (Совм. с Н. Пулятой) — *Геофизический сборник*, 1917, **3**, вып. 2, стр. 75—83.

18. К вопросу о доказательстве правила параллелограмма сил.— Журнал Пермск ун-та, 1918, вып. 1, стр. 33—43.
19. О вертикальных течениях в атмосфере.— Журнал Пермск. ун-та, 1919, вып. II, стр. 67—104.
20. О распределении температуры с высотой при наличии лучистого теплообмена Земли и Солнца.— Изв. Главной физич. обсерватории. 1920, № 2, стр. 42—44.
21. Об атмосферных вихрях с вертикальной и горизонтальной осью. — Изв. Главной физич. обсерватории, 1921, № 3, стр. 3—4.
22. Идея вращающейся жидкости в атмосферных движениях. — Метеорологич. вестник, 1921, 31, стр. 69—88.
23. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. Диссертация, Пг., 1922, 516 стр.
24. Über die Krümmung des Raumes.— Z. Phys., 1922, 10, H. 6, S. 377—387.
25. Атмосферные вихри и прерывистость ветра.— Труды Аэрологич. обсерватории в Павловске за 1920, 1922, 1, стр. 8—12.
26. Sur la cinématique des lignes des tourbillon.— Bull. Acad. sci. Cracovie, Serie A, 1922, p. 25—44.
27. Die vertikalen Strömungen in der Atmosphäre.— Beitr. Phys. freien Atmosph., München, 1922, X, H. 4, S. 185—201.
28. Über vertikale Temperaturgradienten in der Atmosphäre.— Ann. Hydrografie, Berlin, 1923, 51, H. 1, S. 12—16.
29. Мир как пространство и время. Л., Изд. Academia, 1923, стр. 1—130; изд. 2. Изд-во «Наука», 1965.
30. О движении сжимаемой жидкости. — Изв. Гидрологич. ин-та, 1923, № 7, 21—28.
31. Über eine Methode der Bestimmung der vertikalen Windgeschwindigkeit. (Совм. с Я. Д. Тамаркиным). — Meteorol. Z., 1924, 41, H. 3, S. 90—91.
32. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. — Z. Phys., 1924, 21, S. 326—333. Русский перевод А. А. Сазыкина, УФН, 1963, 80, вып. 3, стр. 447—452.
33. Über Wirbelbewegung in einer kompressiblen Flüssigkeit. — Z. angew. Math. und Mech., 1924, 4, H. 2, S. 102—107.
34. О распространении прерывности в сжимаемой жидкости. (Совм. с Я. Д. Тамаркиным). — Журнал Русск. физ.-химич. об-ва, 1924/25, 56, вып. 1, стр. 40—58.
35. О кривизне пространства.— Журнал Русск. физ.-химич. об-ва, 1924/25, 56, вып. 1, стр. 59—68; см. также ссылку 24. Перепечатано УФН, 1963, 80, вып. 3, стр. 439—446.
36. О возможных конфигурациях электронов в атоме Резерфорда. (Совм. с Я. Д. Тамаркиным). — Труды Гос. оптич. ин-та, 3, вып. 21. Л., 1924, стр. 1—14.
37. Основы теории относительности. (Совм. с В. К. Фредериксом). Л., Изд. Academia, 1924, стр. 1—166.
38. Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit. (Совм. с Л. В. Келлером). — Proc. first Internat. congr. Appl. Mech. Delft, 1924—1925, S. 395—405.
39. Теоретическая механика (кинематика). (Совм. с Л. Г. Лойцянским). Л., Изд. Военно-морской академии, 1924, стр. 4—277. (Литографированный курс).

40. Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen.— *Math. Z.*, 1924, 21, H. 3-4, S. 211—223.
41. Über atmosphärische Wirbel und die Turbulenz des Windes.— *Beitr. Phys. freien Atmosph.*, 1924, 11, S. 154—163.
42. Приближенные вычисления. (Совм. с Я. С. Безиковичем). Л., 1925, стр. 1—132.
43. Sur le mouvement d'un fluide parfait compressible. (Совм. с Б. И. Извековым).— *Изв. Российск. АН*, 1925, XIX, стр. 351—361.
44. Решение численных уравнений. Л., 1925. (Литографированный курс).
45. На высоте 7400 метров.— *Журнал Климат и погода*, 1925, № 2-3, стр. 8—11; *журнал Хочу все знать*, 1925, 10, стр. 18—20.
46. Перспективы работы по организации метеорологической службы. *Климат и погода*, 1925, № 1, стр. 18—22.
47. Théorie du mouvement d'un fluide compressible et ses applications aux mouvements de l'atmosphère.— *Геофизический сборник*, 1927, 5, вып. 1, стр. 16—56.
48. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости. (Совм. с П. Я. Полубариновой).— *Геофизический сборник*, 1927, 5, вып. 2, стр. 9—24.
49. О приближенных условиях динамической возможности движения сжимаемой жидкости. (Совм. с Н. Е. Кочиным). — *Геофизический сборник*, 1927, 5, вып. 2, стр. 24—32.
50. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. Под ред. и с прим. Н. Е. Кочина, с доп. статьями Б. И. Извекова, И. А. Кибеля, Н. Е. Кочина. Л.—М., ОНТИ, 1934, стр. 1—370.
51. Письма к Б. Б. Голицыну и В. А. Стеклову.— *Труды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР*, т. 22. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 324—388.

## ЛИТЕРАТУРА О А. А. ФРИДМАНЕ

1. А. Ф. Вангенгейм. А. А. Фридман (некролог).— Журнал Климат и погода, 1925, № 2-3, стр. 5—7.
2. Похороны А. А. Фридмана; Заграничные ученые о смерти А. А. Фридмана; Заседания памяти А. А. Фридмана (хроника).— Журнал Климат и погода, 1925, № 2-3, стр. 76—78.
3. Памяти профессора летчика-наблюдателя А. А. Фридмана.— Вестник воздушного флота, 1925, т. VIII, № 10, стр. 36—37.
4. Н. М. Гюнтер. Памяти А. А. Фридмана, Научные труды А. А. Фридмана.— Журнал Ленинград. физ.-математич. об-ва, 1926, 1, вып. 1, стр. 5—11.
5. А. Ф. Гаврилов. Памяти А. А. Фридмана.— УФН, 1926, 6, вып. 1; стр. 73—75.
6. Б. И. Извеков, Е. Н. Тихомиров. А. А. Фридман (некролог).— Метеорол. Вест., 1925, 35, № 9, стр. 216—218.
7. Б. И. Извеков. Работы А. А. Фридмана в области геофизики.— Журнал геофизики и метеорологии, 1926, 3, вып. 1-2, стр. 5—18.
8. А. А. Фридман (некролог).— Журнал геофизики и метеорологии, 1925, 2, вып. 3-4, стр. 133—136.
9. П. Федосеев. На высоте 7400 метров.— Вестник воздушного флота, 1925, VIII, № 9; стр. 23—25; см. также журнал Климат и погода, 1925, вып. 1, стр. 26—27.
10. Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. Александр Александрович Фридман. (1888—1925). Труды Ленинградского политехнического института, 1949, № 1, стр. 83—86.
11. Ficker H. A. Friedman.— Meteorol. Z. 1925, 42, H. 11, S. 5, 440.
12. Shaw N. Prof. A. Friedman.— Nature, 1925, 116, N 2929, p. 908.
13. Ficker H.— Z. angew. Math. und Mech., 1925, 5, H. 6, S. 526.
14. В. А. Стеклов, А. А. Фридман (некролог).— Геофизический сборник, 1927, 5, вып. 1, стр. 7—8.
15. Е. Фридман. Памяти А. А. Фридмана.— Там же, стр. 9—10.
16. Curriculum vitae. А. А. Фридмана.— Там же, стр. 11—13.
17. И. Мещерский. Труды А. А. Фридмана по гидромеханике.— Там же, стр. 57—60.
18. М. А. Лорис-Меликов. Работы А. А. Фридмана по теории относительности.— Там же, стр. 61—63.



19. Воспоминания А. Ф. Гаврилова. Труды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, т. 22. Изд-во АН СССР, 1959, стр. 389—400.
20. Л. С. Полак. А. А. Фридман. Вводная статья к публикации писем А. А. Фридмана Б. Б. Голицину и В. А. Стеклову. Там же, стр. 324—342.
21. Л. С. Полак. Александр Александрович Фридман. В кн. «Люди русской науки». М., Физматгиз, 1961, стр. 365—379.
22. П. Я. Полубаринова-Кочина. Александр Александрович Фридман (к 75-летию со дня рождения).— Усп. физич. наук, 80, вып. 3. Физматгиз, 1963, стр. 345—352.
23. В. А. Фок. Работы А. А. Фридмана по теории тяготения Эйнштейна. Там же, стр. 353—356.
24. Я. Б. Зельдович. Теория расширяющейся Вселенной, созданная А. А. Фридманом. Там же, стр. 357—390.
25. В. Н. Тростников. Выдающийся советский ученый А. А. Фридман. М., изд-во «Знание», 1963, стр. 1—48 с предисловием П. Л. Капицы.
26. В. И. Смирнов. Выдающийся геофизик и математик.— Журнал Природа, 1963, 11, стр. 93—96.
27. В. А. Стеклов. Отзыв о трудах А. А. Фридмана (Публикация К. Н. Лоскутова).— Сб. «Очерки истории математики и механики». Изд-во АН СССР, 1963, стр. 228—231.
28. Послесловие Я. А. Смородинского.— В кн: А. А. Фридман. «Мир как пространство и время». Изд. 2-е. Изд-во «Наука», 1965.
29. С. Дианин. Революционная молодежь в Петербурге 1897—1917 гг. «Прибой». Л., 1926.

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

|                       |   |
|-----------------------|---|
| От редакции . . . . . | 6 |
|-----------------------|---|

### Гидромеханика сжимаемой жидкости

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| О вихрях в жидкости с меняющейся температурой . . . . .                                   | 9  |
| О движении сжимаемой жидкости . . . . .                                                   | 12 |
| О вихревом движении сжимаемой жидкости . . . . .                                          | 18 |
| О распространении прерывности в сжимаемой жидкости . . . . .                              | 27 |
| Дифференциальные уравнения турбулентного движения сжимаемой жидкости . . . . .            | 45 |
| О движении абсолютно сжимаемой жидкости . . . . .                                         | 58 |
| О приближенных условиях динамической возможности движения сжимаемой<br>жидкости . . . . . | 68 |

### Динамическая метеорология и физика атмосферы

|                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| О распределении температуры воздуха с высотой . . . . .                                               | 81  |
| К теории вертикального распределения температур . . . . .                                             | 100 |
| О вертикальных течениях в атмосфере . . . . .                                                         | 104 |
| О распределении температуры с высотой при наличии лучистого теплооб-<br>мена Земли и Солнца . . . . . | 135 |
| Об атмосферных вихрях с вертикальной и горизонтальной осью . . . . .                                  | 141 |
| Идея вращающейся жидкости в атмосферных движениях . . . . .                                           | 143 |
| О вертикальных температурных градиентах в атмосфере . . . . .                                         | 160 |
| Об атмосферных вихрях и о турбулентности ветра . . . . .                                              | 166 |
| Об одном методе определения вертикальной скорости ветра . . . . .                                     | 175 |
| Теория движения сжимаемой жидкости и ее приложения к атмосферным дви-<br>жениям . . . . .             | 178 |

**Релятивистская космология**

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| О кривизне пространства . . . . .                                        | 229 |
| О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства . . | 238 |
| Мир как пространство и время . . . . .                                   | 244 |

**Письма А. А. Фридмана**

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| Письма Б. Б. Голицыну . . . . . | 325 |
| Письма В. А. Стеклову . . . . . | 332 |

**Приложения**

Заметки, резюме и краткие аннотации статей:

|                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| О сравнениях второй степени и числах Бернулли . . . . .                                                                               | 367 |
| К теории аэроплана . . . . .                                                                                                          | 367 |
| Об отыскании частных решений уравнения Лапласа . . . . .                                                                              | 367 |
| Об отыскании изодинамических поверхностей (заметка) . . . . .                                                                         | 368 |
| Об одной гидродинамической задаче Бьеркнеса . . . . .                                                                                 | 369 |
| Об атмосферных вихрях (резюме) . . . . .                                                                                              | 369 |
| К вопросу о колебательном разряде конденсатора . . . . .                                                                              | 371 |
| Порядок величины метеорологических элементов и их пространственных<br>и временных производных . . . . .                               | 371 |
| К вопросу о скорости звука (резюме) . . . . .                                                                                         | 374 |
| Определение вертикальных течений воздуха при помощи наблюдений за<br>шарами-пилотами, производимых с одного пункта (резюме) . . . . . | 374 |
| К вопросу о доказательстве правила параллелограмма сил (резюме) . .                                                                   | 376 |
| О кинематике вихревых линий . . . . .                                                                                                 | 377 |
| Теоретическая механика (кинематика) . . . . .                                                                                         | 379 |
| О геометрии полусимметричного переноса . . . . .                                                                                      | 379 |
| О возможных конфигурациях электронов в атоме Резерфорда . . . .                                                                       | 380 |
| О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидко-<br>сти (резюме) . . . . .                                          | 380 |
| Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости . . . . .                                                                                       | 382 |
| На высоте 7400 м (заметка). . . . .                                                                                                   | 382 |
| Материалы и статьи о жизни и творчестве А. А. Фридмана . . . . .                                                                      | 386 |
| Curriculum vitae А. А. Фридмана . . . . .                                                                                             | 386 |
| В. А. Стеклов. Отзыв о трудах А. А. Фридмана . . . . .                                                                                | 389 |
| В. А. Стеклов. А. А. Фридман (некролог) . . . . .                                                                                     | 392 |

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Е. П. Фридман. Памяти А. А. Фридмана . . . . .                                          | 395 |
| П. Л. Капица. Александр Александрович Фридман . . . . .                                 | 397 |
| А. Эйнштейн. Замечания к работе А. Фридмана «О кривизне пространства» . . . . .         | 398 |
| А. Эйнштейн. К работе А. Фридмана «О кривизне пространства» . .                         | 398 |
| В. А. Фок. Работы А. А. Фридмана по теории тяготения Эйнштейна . .                      | 398 |
| Я. Б. Зельдович. Теория расширяющейся Вселенной, созданная<br>А. А. Фридманом . . . . . | 402 |
| П. Я. Полубаринова - Кочица. Александр Александрович<br>Фридман . . . . .               | 410 |
| А. Ф. Гаврилов. Воспоминания о Фридмане . . . . .                                       | 417 |
| Л. С. Полак. Жизнь и научное творчество А. А. Фридмана . . . .                          | 427 |
| Примечания . . . . .                                                                    | 448 |
| Библиография работ А. А. Фридмана . . . . .                                             | 455 |
| Литература о А. А. Фридмане . . . . .                                                   | 458 |

**Александр Александрович ФРИДМАН**

**ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ**

*Утверждено к печати*

*Редколлегией серии «Классики науки» АН СССР*

Редактор издательства *В. М. Медер*

Технический редактор *Н. Д. Новичкова*

Сдано в набор 22/X 1965 г. Подписано к печати 6/III 1966 г.

Формат 70×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. л. 29.

Усл. печ. л. 35,10. Уч.-изд. л. 26,5.

Тираж 1500 экз. Изд. № 3177/65. Тип. зак. 3186

*Цена 2 р. 10 к.*

Издательство «Наука» Москва,

К-62, Подсосенский пер., 21

---

2-я типография издательства «Наука»

Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

# ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

| Страница | Строка      | Напечатано                                                                                                    | Должно быть                                                                                                                                                   |
|----------|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 135      | 13—16 сн.   | О распределении температуры<br>с высотой при наличии<br>лучистого теплообмена<br>Земли и Солнца <sup>11</sup> | <i>г. Пермь</i><br><i>17 февраля 1919 г.</i><br>О распределении температуры<br>с высотой при наличии<br>лучистого теплообмена<br>Земли и Солнца <sup>11</sup> |
| 260      | 12 и 14 сн. | <i>г. Пермь</i><br><i>17 февраля 1919 г.</i><br>$SP_1, P_2$                                                   | $S_{P_1, P_2}$                                                                                                                                                |

А. А. Фридман

А.А.  
ФРИДМАН

ИЗБРАННЫЕ  
ТРУДЫ

МФ









2 р. 10 к.

ИЗБРАННЫЕ  
ТРУДЫ

А.А.ФРИДМАН

А. А. ФРИДМАН

ИЗБРАННЫЕ  
ТРУДЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»